

非一様楕円渦の軸対称化プロセスについて

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 木村 芳文 (Kimura Yoshifumi)

1 Introduction

地球科学や宇宙科学においては2次元乱流の研究は依然として非常に重要な位置を占めていると言える。以下に見るように、2次元乱流においても粘性による拡散と非線形性による伸長の相互作用が本質的に重要であることは3次元の場合と同様であるが、2次元乱流の特徴は伸長が3次元のように渦線ではなく流体粒子のLagrange的なpath (material line) においておこることである。この報告では2次元乱における拡散と伸長の相互作用をパリンストロフィと呼ばれる渦度勾配の大きさの時間発展という観点から議論する。

2次元流における基本的な渦である一様楕円渦はEuler方程式の弱解であり、Kirchhoff渦と呼ばれ長い研究の歴史を持っている。Kirchhoff渦は回転する楕円渦であり、その回転角速度は長短軸の長さが a, b 、渦度 Ω をもつ楕円渦に対しては $\Omega = \omega \frac{ab}{(a+b)^2}$ 、となることやアスペクト比 a/b が3以下の場合には渦は線形安定であることなどが知られている。(Love 1893)¹一方、渦度が一様でない楕円渦は非定常であり、乱流中の non-trivial²な最低次モードの渦励起として研究されてきている。題目にある軸対称化プロセスというのは台風やハリケーンなどで観察されるように

¹Kirchhoff 渦の非線形な安定論は Moore & Saffman(1971) によって拡張された。

²エネルギーやエンストロフィーのカスケードがあるという意味で。

自然界で観察される渦は円形の場合が多く非円形の渦であっても時間とともに円形渦に近付くことを意味しており、2次元乱流の言葉でいえばエネルギー逆カスケードの一つの表現であるとも考えられる。

非一様楕円渦の軸対称化プロセスを数値的に最初に扱ったのは Melander, McWilliams, Zabusky (1987) の論文であろう。彼らは非一様楕円渦における軸対称化においては渦度勾配の発達とフィラメントの放出の2つの過程が重要であることを指摘している。この報告ではパリンストロフィとその生成項を使うことによって彼らの指摘をより精密化することができることを示す。

2 理論

2次元の渦度方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

ここで $\mathbf{u} = (u, v)$ は速度で $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ は渦度、 ν は動粘性率である。流れ関数 ψ を次のように定義すると

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

渦度方程式は $\omega - \psi$ 形式で次のように書ける。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \nu \nabla^2 \omega, \quad \omega = -\nabla^2 \psi. \quad (3)$$

ここで $J(\omega, \psi) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ は Jacobi 行列である。

方程式 (3) を使ってパリンストロフィと呼ばれる渦度勾配の2乗についての発展方程式を得ることができる。

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)(\omega_x^2 + \omega_y^2) = 2\omega_x \omega_y (\psi_{xx} - \psi_{yy}) + 2\psi_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2)$$

$$+ 2\nu(\omega_x(\nabla^2 \omega)_x + \omega_y(\nabla^2 \omega)_y) \quad (4)$$

ここで添字はその方向への微分を意味する。ストレインテンソル

$$S = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y + v_x) \\ \frac{1}{2}(u_y + v_x) & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{xy} & \frac{1}{2}(\psi_{yy} - \psi_{xx}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{yy} - \psi_{xx}) & -\psi_{xy} \end{pmatrix},$$

を使うと方程式 (4) は次のように書けることがわかる。

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = \underbrace{-2 \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} S_{ij}}_{P_s} + \underbrace{2\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial (\nabla^2 \omega)}{\partial x_i}}_{P_d} \quad (5)$$

3次元の場合にはエンストロフィと呼ばれる渦度の2乗について次の関係式が成り立つことが知られている。

$$\frac{D\omega^2}{Dt} = 2 \omega_i \omega_j S_{ij} + 2\nu \omega_i \nabla^2 \omega_i \quad (6)$$

ここで ω は渦度ベクトルの大きさであり、 S_{ij} は3次元のストレインテンソルである。(6)式は3次元における(渦度の)伸長方程式(stretching equation)と呼ばれ、その方程式を基にして乱流中の渦度伸長の議論がなされていることを考えると(Tsinober et.al 1997)、(5)式は2次元の(渦度勾配の)伸長方程式であり同様の解析が2次元の場合にも(少なくともある程度は)可能であると言えよう。

非定常な楕円渦を一般的に扱うためにここでは先に導入した流れ関数 ψ が $\psi(x, y) = F(ax^2 + by^2)$ のような関数形をしていると仮定する。³ただしここで F は任意の(可微分)な関数である。(4)式の(前半)に代

³流れ関数にこのような同心的な関数形を仮定するということは渦度に関しては $\omega = -2(a+b)F' + 2(ax+by)F''$ と言う形をおいていることになり、これは厳密には楕円渦ではない。よってここで得られる結果は数値的にチェックされるべきものである。(次節参照)

入して P_s を計算すると、

$$\begin{aligned}
 P_s &= 64 ab(a-b) xy \times \\
 &\quad [-4(F'')^2 \{ (3a^3x^2 + a^2bx^2 + ab^2y^2 + 3b^3y^2)F''' + 2(a^2x^2 + b^2y^2)^2F'''' \} \\
 &\quad + F' \{ (3a^2 + 10ab + 3b^2)(F'')^2 + 8(a+b)(a^2x^2 + b^2y^2)F''F''' \\
 &\quad + 4(a^2x^2 + b^2y^2)^2(F''')^2 \}] \\
 &\equiv ab(a-b) xy G(x^2, y^2, a, b)
 \end{aligned} \tag{7}$$

という表現が得られる。ここでプライムは $z = ax^2 + by^2$ についての微分、 G は F の汎関数である。

方程式 (7) から以下のことが結論できる。

- [1] 円形渦の場合 ($a = b$) には $P_s = 0$;
- [2] x -軸、 y -軸はそれぞれ正および負のパリンストロフィ生成領域 (以後、 P_s 領域と呼ぶ) の境界線を与える。もし、 G の寄与を無視できるならば P_s は四重極の構造を持つはずである。
- [3] もし $ab(a-b)$ が a, b 依存性を代表するならば $a+b=1$ という条件のもとで $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ において P_s は最大値をとる。

3 数値シミュレーション

前節の理論的予想を裏づけるために以下のような渦度分布を持つような楕円渦の時間発展をシミュレーションする。

$$\omega(r) = \omega_0 [1 - \exp\{-C \frac{R_0}{r} \exp(-\frac{R_0}{R_0-r})\}] \quad (0 \leq r < R_0) \tag{8}$$

ここで $r = \sqrt{ax^2 + by^2}$ であり、 $\omega(r)$ は $\omega(r \rightarrow 0) \rightarrow \omega_0$, $\omega(r \rightarrow R_0) \rightarrow 0$ を満たす。また $C = 2.5608517$ とすることによって $\omega(R_0/2) \sim \omega_0/2$ となる。カットオフ半径は $R_0 = \pi/2$ とした。

2次元 Navier-Stokes 方程式の数値積分法としては擬スペクトル法を 2048×2048 の格子点について用い、また $2/3$ ルールをエリアシングエラーを除くために使った。

図1は初期条件(8)において $(a, b) = (10, 1)$ として時間発展を追ったものであり、等渦度線図を P_θ の値で色分けしたものである。 $t = 0$ の図は前節で予想した通り楕円渦(8)が P_θ について四重極構造を持つことを示している。(第2、第4象限：正、第1、第3象限：負)

楕円渦が反時計回りに回転する間に正の P_θ 領域においては等渦度線の間隔が追い付き現象によって狭くなり勾配の大きさが増す。それに伴い領域が等渦度線の方に伸ばされ細く放出される。一方、負の P_θ 領域は定圧力下にあるかのように等方的に収縮する性質が観察される。(同様の観察は Melander 等 (1987) によってなされているが彼らは P_θ や四重極構造などには言及していない。)

放出された渦領域の先端が時計方向に伸びて行くに従い、新しい正の P_θ が伸びた渦領域のもう一つの辺を覆うように出現する。2つの正 P_θ 領域は渦度勾配の大きさをさらに増加させ結果としてフィラメントの放出を効果的に行なうように観察される。放出されたフィラメントは残された中心核の周辺を取り囲む雲のように見える。おもしろいのは中心核は非常に円形に近くなっているがそれでも P_θ 領域の四重極性が依然残っていることである。(図1のグレースケールは最大値、最小値を使って normalize しているので P_θ の絶対値は非常に小さくなっているのは間違いない。) 前節で見たように単純な円形渦については P_θ はゼロになるべきであって、今の場合に円形渦にちかい中心核が四重極構造を保存しているのは放出された渦領域によってできた中心核を取り囲む雲がバックグラウンドとし

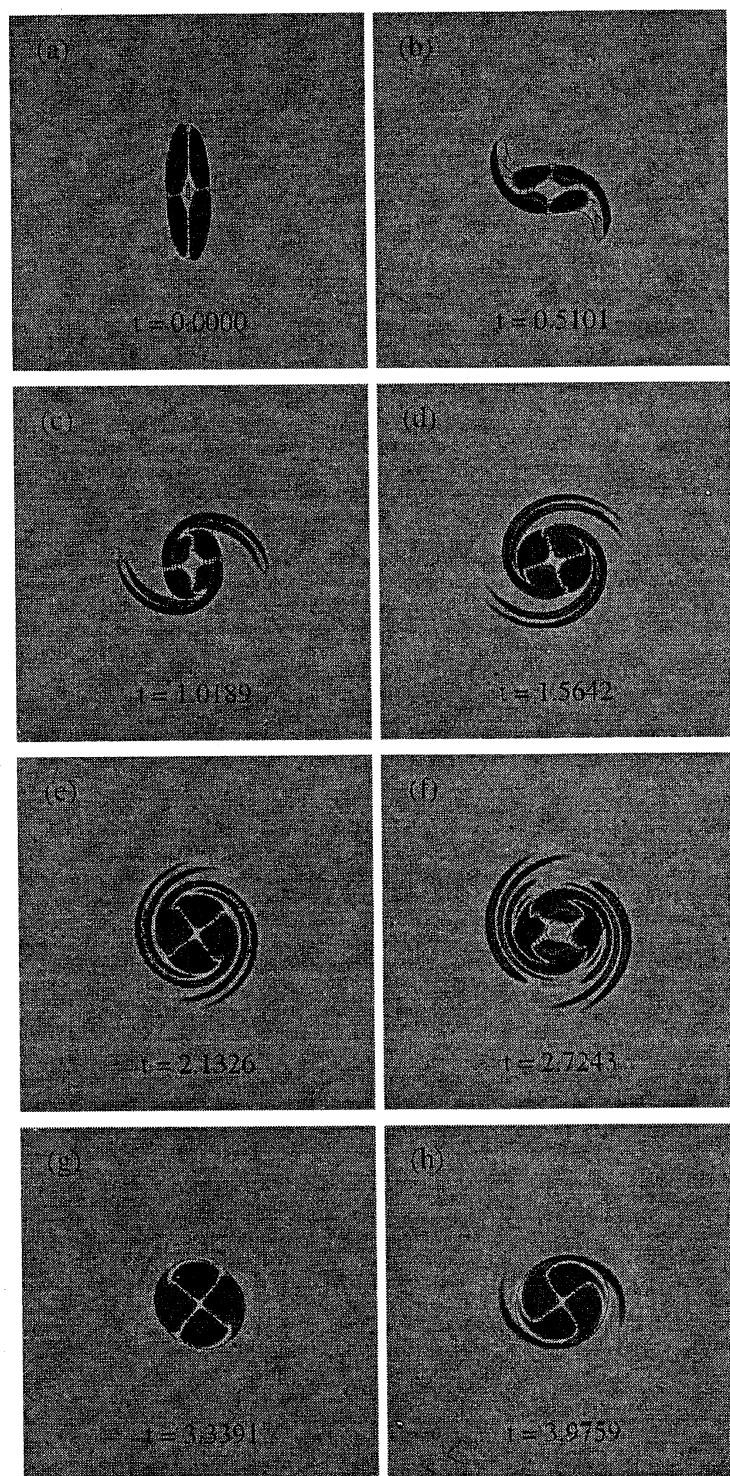


図 1: 図 1 : 等渦度線をパリンストロフィ生成の値で色付けしたもの。
 $t = 0$ は楕円渦 (8) に対応。第 2、第 4 象限：正、第 1、第 3 象限：負

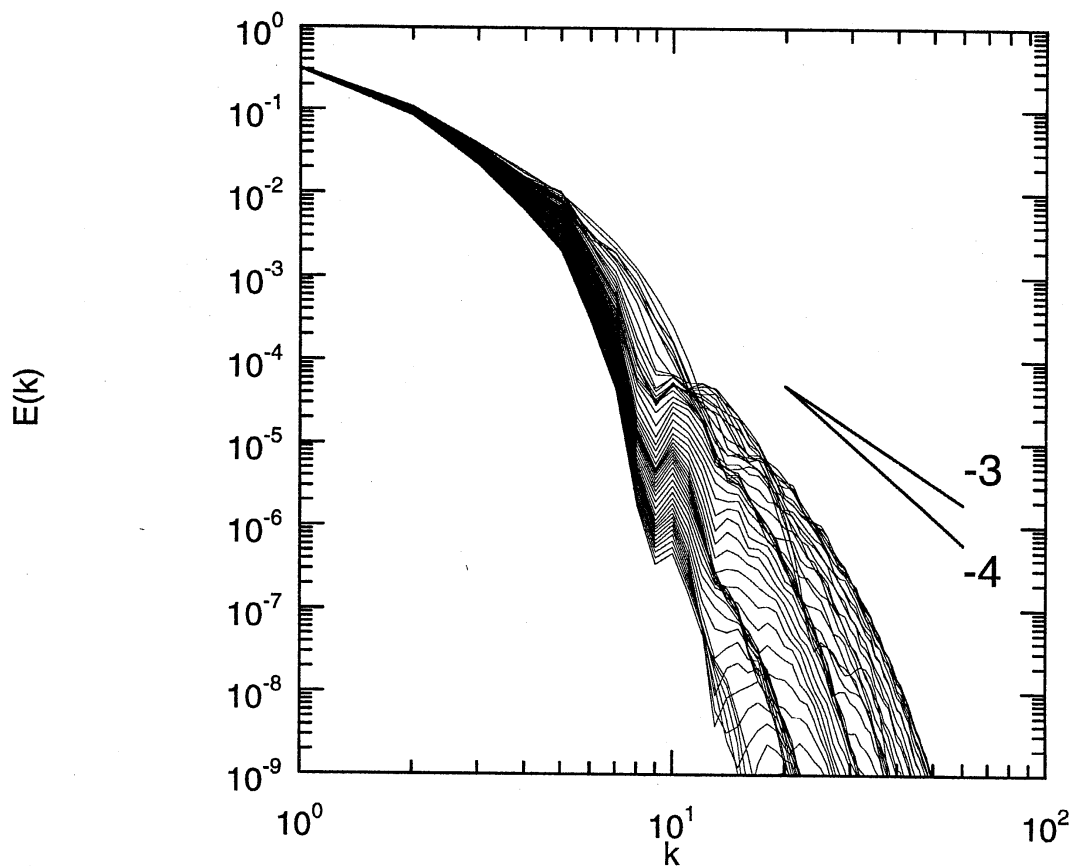


図 2: 図 2 : エネルギースペクトル : $t=0.0$ から $t=5.87$ までのものを重ねたもの。実線は k^{-3} と k^{-4} に対応するもの。

て何らかの役割を担っていることが予想される。さらに時間がたつと周辺部の渦は粘性の影響で減衰し、正 P_s 領域はフィラメントの放出を再開する。放出されたフィラメントはコア周辺の雲の渦度を強めそれがフィラメント放出をまた抑制するように観える。

楕円渦からのフィラメント放出、或は軸対称化プロセスには上に述べた様な時間的周期性、或は間欠性が備わっていると言える。この予想は図 2 のエネルギースペクトルの時間発展の重ね合わせを解析することによってある程度正当化されるであろう。図 2 の小さいスケールにおいては明ら

かに2種類のスペクトル、すなわち勾配の緩いものときついもの、が観察される。前者はスパイラル構造によるもの (Gilbert 1988; Moffatt 1990)、そして後者は散逸によるものと理解される。前者に対しては比較のために Kraichnan (1967), Batchelor (1969) らのエンストロフィカスケード理論から予想される k^{-3} と Saffman (1971) の渦領域の理論から予想される k^{-4} の二つの傾きを図に付け加えた。

4 考察

図3は Gaussian ランダムな初期条件のもとで数値シミュレーションを行なった渦度場に P_θ の値について図1と同様の処理を施したものである。(図は全計算領域の中心部分 1/8 に対応している。)

図のなかにいくつかの楕円渦に近い構造がみえるがそれらは全節で考察した単一の楕円渦と同様の P_θ の構造を持っており、このことはこれまでの考察が乱流を含む多様な流れ場の解析に対して有効であることを示唆するものである。

ランダムな場合が単一の場合と大きく異なる点は放出された渦フィラメントが他の渦、或はバックグラウンドの流れとの非線形相互作用によって強いパリンストロフィ生成力を維持しうる点であろう。

全節の結果は(渦度正の)楕円渦の第2、第4象限は軸対称化のプロセスにおいて重要な意味を持っており、それは正のパリンストロフィ生成という物理量で特徴付けられることを示している。1節で述べたようにもし軸対称化を2次元乱流特有のエネルギー逆カスケードの一つの表現であると解釈するなら、逆カスケードの源泉は楕円渦という極めて単



図 3: ランダムな初期条件の元で擬スペクトル法を用いて得られた渦度場。濃淡はパリンストロフィ生成の大きさに対応。

純な構造のなかにすでに内在していることになる。2次元乱流の素過程（の少なくとも一つ）は明らかに楕円渦における軸対称化プロセスにあると言ってもよいであろう。

参考文献

- [1] BATCHELOR G. K. 1969 Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence *Phys. Fluids supplement II* pp.233-239.
- [2] GILBERT, A.D. 1988 Spiral structures and spectra in two-dimensional turbulence *J. Fluid Mech.* **193**, 475-497.
- [3] KRAICHNAN, R.H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence *Phys. Fluids* **10**, 1417-1423.
- [4] LOVE, A.E.H. 1893 On the stability of certain vortex motions *Proc. London Math. Soc.* **25**, 18-42.
- [5] MELANDER, M. V., MCWILLIAMS, J. C. & ZABUSKY, N.J. 1987 Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation *J. Fluid Mech.* **178**, 137-159.
- [6] MOFFATT, H. K. 1990 Spiral structures in turbulent flows Preprint of the lecture at IMA Conference on 'Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms: New Developments and New Applications', Cambridge, UK. 17-18 December.
- [7] MOORE, D.W. & SAFFMAN, P.G. 1971 Structure of a line vortex in an imposed strain *Aircraft wake turbulence* eds. Olsen, Goldburg, Rogers 339-54, Plenum.
- [8] SAFFMAN, P.G. 1971 On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number *Stud. Appl. Maths.* **50**, 377.
- [9] TSINOBER, A., SHTILMAN, L. & VAISBURD, H. 1997 A study of properties of vortex stretching and enstrophy generation in numerical and laboratory turbulence *Fluid Dynamics Research* **21**, 477-494.