

無限階擬微分作用素の表象理論

山崎 晋 (Susumu YAMAZAKI)*

序.

本稿では、解析的範疇に於ける無限階擬微分作用素 (*holomorphic microlocal operator*, 又は *pseudodifferential operator of infinite order*) 及びその表象理論 (*symbol theory*) について解説する. ここに言う無限階擬微分作用素とは、複素多様体 X の余接線型繊維束 (cotangent bundle) 上の層 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ の (局所) 切断の事であり、柏原・河合 [4] に於いて最初に導入された. その構成方法は整型函数 (holomorphic function) の層の超局所化に依るものであったが、その後、片岡、青木等に依って表象理論が確立された ([1] 参照). 本稿ではその表象理論の紹介を行い、併せて我々の著書 [2] の補いをする.

本書を通じて用いる記号を纏めておく:

位相空間 X に対して X の開集合の全体を $\mathcal{O}(X)$, 閉集合の全体を $\mathcal{A}(X)$ と書く. $S \subset X$ に対して内点集合を $\text{Int} S$, 閉包を $\text{Cl} S$ と書く. $K \Subset X$ は K が X 内で相対コンパクトを表す. 又, 連結開集合を領域 (domain) と呼ぶ.

通常の通り整数, 実数及び複素数の集合を各々 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{C}$ で表し

$$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 1\} \subset \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R}; r > 0\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} := \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\} = \{r \in \mathbb{R}; r \geq 0\},$$

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times := \{c \in \mathbb{C}; c \neq 0\}$ と置く. $V \subset \mathbb{R}^n$ について $\dot{V} := V \cap \mathbb{R}^n$ と置く. 又, $a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ ならば $]a, b[:= \{r \in \mathbb{R}; a < r < b\}$, $[a, b] := \{r \in \mathbb{R}; a \leq r \leq b\}$ 及び $[a, b[:= \{r \in \mathbb{R}; a \leq r < b\}$ 等と置く. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して (ユークリッド) ノルムを $|x| := \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$ とする. 又, $\mathbb{B}(x; r) := \{y \in \mathbb{R}^n; |x - y| < r\}$ 及び $\mathbb{B}(r) := \mathbb{B}(0; r)$ とする.

$K, L \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $K \pm L := \{x \pm y; x \in K, y \in L\}$ とし, 集合論的差集合は $K \setminus L$ とする. K の境界集合を ∂K と置く. K と L との距離 (distance) を次で定める:

$$\text{dis}(K, L) := \inf\{|x - y|; x \in K, y \in L\}.$$

2000 Mathematics Subject Classification(s): 35A27, 32W25

This research was partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540191, Japan Society for the Promotion of Science.

*日本大学理工学部一般教育数学系列.

特に $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\text{dis}(x, L) := \text{dis}(\{x\}, L)$ と置く.

$\mathbb{C}^n$ の点を $z = (z_1, \dots, z_n)$ と書く. 各変数を $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$ と分けて書き, $\text{Re} z := x = (x_1, \dots, x_n)$ 及び $\text{Im} z := y = (y_1, \dots, y_n)$ と置く (即ち $z = \text{Re} z + \sqrt{-1}\text{Im} z = x + \sqrt{-1}y$). $\mathbb{C}^n \ni z \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ の対応で $\mathbb{C}^n$ を位相空間として $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する (例えば $U \subset \mathbb{C}^n$ が開集合とは, $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ と考えて開集合を意味する). z の複素共軛 (complex conjugate) を $\bar{z} := x - \sqrt{-1}y$ で定める. $z, w \in \mathbb{C}^n$ に対して $\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$ と置く. 特に $\mathbb{C}^n$ 上のユークリッドノルムは $|z| = \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle}$. 又 $\|z\| := \max_{1 \leq j \leq n} \{|z_j|\}$ と置けば, これも $\mathbb{C}^n$ 上のノルムである. 偏微分記号は $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ 及び $\partial_{y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$ を用い, 1 変数の場合と同様

$$\begin{aligned} \partial_{z_j} &= \frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \partial_{\bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ dz_j &:= dx_j + \sqrt{-1} dy_j, \quad d\bar{z}_j := dx_j - \sqrt{-1} dy_j, \end{aligned}$$

と置く. 次に多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ に対し

$$\begin{aligned} z^\alpha &:= z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}, \quad \partial_z^\alpha := \partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{\alpha_n}, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad |\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j, \end{aligned}$$

と定める.

$$\#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n; |\alpha| = m\} = \binom{m+n-1}{m} \leq 2^{m+n-1}$$

が後に用いられる. 但し $\#$ は集合の元の数を表す. $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ に対して $\beta \leq \alpha$ とは各 j について $\beta_j \leq \alpha_j$ を表す. $\beta < \alpha$ は $\beta \leq \alpha$ 且つ $\beta \neq \alpha$ を意味する. 更に

$$\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}$$

と置く. 又, $\mathbf{1}_n := (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ と置く (例えば $z^{\mathbf{1}_n} = \prod_{j=1}^n z_j$). $p \in \mathbb{C}$ 及び $r > 0$ に対し $D(p; r) := \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta - p| < r\}$ と置き, $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0n}) \in \mathbb{C}^n$ 及び $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ に対し $D_n(z_0; \rho_1, \dots, \rho_n) := \prod_{j=1}^n D(z_{0j}; \rho_j)$ と定める. 特に $\rho > 0$ に対して $D_n(z_0; \rho) := D_n(z_0; \rho, \dots, \rho)$ と置く.

次に, 幾何学的設定について述べる. 以下, 多様体は全てパラコンパクト且つ C^∞ 級とする. M を多様体とする. M の接繊維束 (tangent bundle) 及び余接繊維束 (cotangent bundle) を各々 $\tau_M: TM \rightarrow M$ 及び $\pi_M: T^*M \rightarrow M$ と書く (混乱の恐れがなければ射影を単に τ, π と書く). 座標変換を考慮して $(x; v) \in TM$ を $x + \langle v, \partial_x \rangle$ と書く. 同様に $(x; \xi) \in T^*M$ を $(x; \langle \xi, dx \rangle)$ と

も書く. 多様体の間の C^∞ 級写像 $F: N \rightarrow M$ に対し, その微分を dF と書く. F は自然写像

$$F': TN \ni y + \langle v, \partial_y \rangle \mapsto (y, F(y) + \langle dF(y)v, \partial_x \rangle) \in N \times_M TM,$$

$$F_d: N \times_M T^*M \ni (y, F(y); \langle \xi, dx \rangle) \mapsto (y; \langle {}^t dF(y)\xi, dy \rangle) \in T^*N,$$

を誘導する. 但し $N \times_M TM$ 及び $N \times_M T^*M$ は繊維積 (fiber product), 即ち

$$N \times_M TM := \{(y, x + \langle v, \partial_x \rangle) \in N \times TM; F(y) = x\},$$

$$N \times_M T^*M := \{(y, x; \langle \xi, dx \rangle) \in N \times T^*M; F(y) = x\}.$$

又, t は行列の転置を表す.

$$T_N M := \text{Cok}(TN \xrightarrow{F'} N \times_M TM),$$

$$T_N^* M := \text{Ker}(N \times_M T^*M \xrightarrow{F_d} T^*N),$$

と定義し, 各々 N の M での法繊維束 (normal bundle) 及び余法繊維束 (conormal bundle) と呼ぶ. $T_N M$ と $T_N^* M$ とは互いに双対繊維束となる. 又, $T_M M \simeq M \simeq T_M^* M$ の同一視がある. τ_M 及び π_M の $\dot{T}M := TM \setminus M$ 及び $\dot{T}^*M := T^*M \setminus M$ への制限を各々 τ_M 及び π_M と書く. $N \subset \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^m$ ならばヤコビ行列を

$$\frac{\partial F}{\partial x} = dF(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

で表し, 更に $n = m$ ならばヤコビ行列式を $\det \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]$ と書く.

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathbb{R}_{>0} A := \{cx \in \mathbb{R}^n; x \in A, c > 0\} \subset A$$

と置く. A が錐 (cone) とは $\mathbb{R}_{>0} A \subset A$ となる事を謂う. 錐 $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ に対して $A \underset{\text{conic}}{\subseteq} B$ とは, $K \underset{\text{conic}}{\subseteq} B$ が存在して $A = \mathbb{R}_{>0} K$ となる事と定める. 錐 A に対して

$$A^\circ := \bigcap_{v \in A} \{\xi \in \mathbb{R}^n; \langle v, \xi \rangle \geq 0\}$$

と置く. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ が共に凸錐ならば $A^\circ \cap B^\circ = \gamma(A \cup B)^\circ$ となる. 但し $\gamma(\cdot)$ は凸包を表す. 又, 双極定理から $A^{\circ\circ} = \text{Cl } \gamma(A)$ が知られている. 任意の直線を含まない凸集合を固有凸 (properly convex) という. 以上を拡張して:

(1) $A \subset TM$ に対して

$$\mathbb{R}_{>0} A := \{(x; cv) \in TM; (x; v) \in A, c > 0\}$$

と置く. A が錐状 (conic) とは $\mathbb{R}_{>0} A \subset A$ となる事を謂う. 錐状集合 $A \subset B \subset TM$ に対して $A \underset{\text{conic}}{\subseteq} B$ とは, $K \underset{\text{conic}}{\subseteq} B$ が存在して $A = \mathbb{R}_{>0} K$ となる事と定める.

(2) $A \subset TM$ が錐状集合ならば $\tau(A) \subset M$ を A の基底 (basis) と呼ぶ. 更に A が凸, 固有的凸とは任意の $x \in \tau(A)$ に対して $A_x := A \cap \tau^{-1}(x)$ が各々対応する性質を持つ事を謂う. 又, $A^a := \{(x; -v) \in TM; (x; v) \in A\}$ 及び $\gamma(A) := \bigcup_{x \in \tau(A)} \gamma(A)_x \subset TM$ と置く.

(3) 錐状集合 $A \subset TM$ 対し, 双対錐 (dual cone) を $A^\circ := \bigcup_{x \in \tau(A)} A_x^\circ \subset T^*M$ で定める.

以上の記号は T^*M の部分集合についても同様の意味で用いる.

TM 上の層 $\mathcal{G}$ に対し, $\tau_*(\mathcal{G}|_{TM})$ を単に $\tau_*\mathcal{G}$ と書く. 同様に T^*M 上の層 $\mathcal{F}$ に対しても, $\pi_*(\mathcal{F}|_{T^*M})$ を単に $\pi_*\mathcal{F}$ と書く.

T^*M 上の層 $\mathcal{F}$ は, 任意の $(x; \langle \xi, dx \rangle) \in T^*M$ 及び $c > 0$ に対して

$$\mathcal{F}_{(x; \langle c\xi, dx \rangle)} = \mathcal{F}_{(x; \langle \xi, dx \rangle)}$$

ならば錐状 (conic) と呼ばれる. このとき $\gamma: T^*M \rightarrow S^*M := T^*M/\mathbb{R}_{>0}$ と定義すれば, $\mathcal{F}|_{T^*M}$ と $\gamma_*(\mathcal{F}|_{T^*M})$ とは同一視できる. TM 上の層に対しても同様に定める.

§ 1. 無限階擬微分作用素とその表象

本節では [1], [2] で述べた無限階擬微分作用素の表象について復習し, 併せて幾つかの注意を述べる.

複素多様体 X に対し, X 上の整型函数 (holomorphic function) の層を $\mathcal{O}_X$ と書く. Ω_X^1 を 1 次整型微分形式の層とし, 更に $\Omega_X^{(p)} := \bigwedge^p \Omega_X^1$ と定める. 特に $\Omega_X := \Omega_X^{(\dim X)}$ と置く.

以下, 複素多様体 X を座標を固定して $X = \mathbb{C}^n$ と看做し, $T^*X \simeq X \times \mathbb{C}^n = \{(z; \zeta)\}$ と同一視する. $\pi_X: T^*X \rightarrow X$ を射影とする. 錐状集合 $V \subset T^*X$ と定数 $d > 0$ とに対し,

$$V[d] := \{(z, \zeta) \in V; \|\zeta\| \geq d\}$$

と置く. 又, 錐状開集合 $\Omega \subset T^*X$ と $\varepsilon \geq 0$ とに対して

$$\Omega_\varepsilon := \text{Cl} \left[\bigcup_{(z, \zeta) \in \Omega} \{(z'; \zeta') \in \mathbb{C}^{2n}; \|z' - z\| \leq \varepsilon, \|\zeta' - \zeta\| \leq \varepsilon \|\zeta\|\} \right]$$

と置く. 特に $\Omega_0 = \text{Cl} \Omega$ である. 簡単の為 $\varepsilon \in [0, 1[$ 及び $d > 0$ に対して次の通りに置く.

$$d_\varepsilon := d(1 - \varepsilon).$$

最初に, 無限階擬微分作用素の (古典的形式) 表象の定義を思い出そう:

1.1. 定義. $\Omega \in T^*\mathbb{C}^n$ を錐状開集合とする.

(1) 以下の条件を満たす函数 $P(z, \zeta)$ を Ω 上の表象 (symbol) と呼ぶ:

(S) $r \in]0, 1[$ 及び $d > 0$ が存在して $P(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r]; \mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$, 且つ任意の $h > 0$ に対して $C > 0$ が存在して

$$|P(z, \zeta)| \leq C e^{h\|\zeta\|}, \quad ((z, \zeta) \in \Omega_r[d_r]).$$

Ω 上の表象の全体を $\mathcal{S}(\Omega)$ で表す.

(2) 以下の条件を満たす $P(z, \zeta) \in \mathcal{S}(\Omega)$ を Ω 上の零表象 (null symbol) と呼ぶ:

(N) $P(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r]; \mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$ とする時, $C, h > 0$ が存在して

$$|P(z, \zeta)| \leq C e^{-h\|\zeta\|}, \quad ((z, \zeta) \in \Omega_r[d_r]).$$

Ω 上の零表象の全体を $\mathcal{N}(\Omega)$ で表す.

(3) $z^* \in T^*X$ に対し

$$\mathcal{S}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \mathcal{S}(\Omega) \supset \mathcal{N}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \mathcal{N}(\Omega)$$

と定める. 但し帰納極限は z^* の錐状近傍 $\Omega \in \underset{\text{conic}}{T^*X}$ 全体について取る.

1.2. 定義. $\Omega \in \underset{\text{conic}}{T^*X}$ を錐状開集合とする.

(1) t を不定元とする形式冪級数

$$P(t; z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z, \zeta)$$

は次の条件を満たせば, Ω 上の古典的形式表象 (classical formal symbol) と呼ばれる:

($\widehat{\text{Scl}}$) $r \in]0, 1[$ 及び $d > 0$ が存在して $P_j(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r]; \mathcal{O}_{T^*X})$, 且つ $B > 0$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対して $C > 0$ が存在して

$$|P_j(z, \zeta)| \leq \frac{CB^j j! e^{h\|\zeta\|}}{\|\zeta\|^j}, \quad ((z, \zeta) \in \Omega_r[d_r], j \in \mathbb{N}_0).$$

Ω 上の古典的形式表象の全体を $\widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ で表す.

(2) $P(t; z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z, \zeta) \in \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ は次の条件を満たせば, Ω 上の古典的形式零表象と呼ばれる:

($\widehat{\text{Ncl}}$) $P_j(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r]; \mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$ とするとき, 定数 $B > 0$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対して $C > 0$ が存在して

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} P_j(z, \zeta) \right| \leq \frac{CB^m m! e^{h\|\zeta\|}}{\|\zeta\|^m}, \quad ((z, \zeta) \in \Omega_r[d_r], m \in \mathbb{N}).$$

Ω 上の古典的形式零表象の全体を $\widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega)$ で表す.

(3) $z^* \in T^*\mathbb{C}^n$ に対して

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}, z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega) \supset \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}, z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega)$$

と定める. 但し帰納極限は z^* の錐状近傍 $\Omega \in \underset{\text{conic}}{T^*X}$ 全体について取る.

次の定理が成立つ:

1.3. 定理. $z^* = (z_0; \zeta_0) \in T^*X$ の錐状近傍 $\Omega_0 \in \underset{\text{conic}}{T^*X}$ が存在して, 任意の錐状近傍 $\Omega \subset \Omega_0$ に対して

$$\mathcal{S}(\Omega) / \mathcal{N}(\Omega) \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega) / \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega).$$

証明は [2, 定理 4.1.7] を参照.

次に複素座標変換を以下で定義する. $z = (z_1, \dots, z_n)$ と $w = (w_1, \dots, w_n)$ とを $\text{Cl}\pi_X(\Omega) \subset X$ の近傍の二つの複素座標系, 対応する $\text{Cl}\Omega$ の近傍の座標系を各々 $(z; \zeta), (w; \eta)$ と置く. この

時、複素座標変換 $z = \Phi(w)$ に対して $\Phi^{-1}(z') - \Phi^{-1}(z) = J_w(z', z)(z' - z)$ で $J_w(z', z)$ を定める. $J_w(z, z)\eta = d\Phi^{-1}(z)\eta = \zeta$ に注意する. $P(t; z, \zeta)$ が座標 (z, ζ) に関する古典的形式表象の時 $\Phi^*P(t; w, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \Phi^*P_j(w, \eta)$ を

$$\Phi^*P(t; w, \eta) := e^{t\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} P(t; z, \zeta' + J_w(z', z)\eta) \Big|_{\substack{z'=\Phi(w) \\ \zeta'=0}}.$$

と定める. 此処で $e^{t\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\zeta'}^\alpha \partial_{z'}^\alpha$ は形式的微分作用素である (以下, この種の作用素が幾度か現れる).

1.4. 定理. (1) $\Phi^*P(t; w, \eta)$ は $(w; \eta)$ に関する古典的形式表象, 且つ $P(t; z, \zeta)$ が古典的形式表象ならば, $\Phi^*P(t; w, \eta)$ も古典的形式表象となる.

(2) 1^* は恒等写像, 且つ二つの複素座標変換を $z = \Phi(w)$ 及び $w = \Psi(v)$ に対して $\Psi^*\Phi^* = (\Phi\Psi)^*$ となる.

詳細は [2, 定理 4.2.1] を参照.

1.5. 定義. T^*X 上の無限階擬微分作用素 (pseudodifferential operator of infinite order, 又は holomorphic microlocal operator) の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ を次で定義する: 最初に $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}|_X := \mathcal{D}_X^\infty$ (無限階微分作用素の層) とする. T^*X 上では前層

$$\mathcal{O}(T^*X) \ni V \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}_{>0}V) / \mathcal{N}(\mathbb{R}_{>0}V)$$

に附随する錐状層で定める. これは前層

$$\widehat{\mathcal{O}}(T^*X) \ni V \mapsto \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\mathbb{R}_{>0}V) / \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\mathbb{R}_{>0}V)$$

に附随する層といっても同じである. 更に座標変換則を定理 1.4 で与える. $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の切断を無限階擬微分作用素と呼び $P(z, \partial_z)$ 等で表す. 表象 $P(z, \zeta)$, 又は古典的形式表象 $P(t; z, \zeta)$ が定める無限階擬微分作用素を $:P(z, \zeta):$ 又は $:P(t; z, \zeta):$ 等で表す. 特に $\partial_z^\alpha := :\zeta^\alpha:$ と書く. 一般の複素多様体 X に対しても, 上の座標変換則で T^*X 上の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ が定義出来る事に注意しておく.

次に, 積を定める:

1.6. 定理. 形式表象 $P(t; z, \zeta), Q(t; z, \zeta)$ に対して

$$Q \circ P(t; z, \zeta) := e^{t\langle \partial_\zeta, \partial_w \rangle} Q(t; z, \zeta) P(t; w, \eta) \Big|_{\substack{w=z \\ \eta=\zeta}}$$

と定めれば, これにより $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ 上の結合的 (非可換) 積を

$$:Q(t; z, \zeta): :P(t; z, \zeta): := :Q \circ P(t; z, \zeta):$$

で定義する事が出来る.

詳細は [2, 定理 4.2.4] を参照.

1.7. 定理. $P(t; z, \zeta) \in \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ に対して

$$P^*(t; z, -\zeta) := e^{-t\langle \partial_\zeta, \partial_z \rangle} P(t; z, \zeta)$$

と置くと $P^*(t; z, -\zeta) \in \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}^*(\Omega^a)$ となる. これにより $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ 上の形式随伴を

$$(\cdot P(t; z, \zeta) \cdot)^* := \cdot P^*(t; z, -\zeta) \cdot$$

で定義する事が出来る.

詳細は [2, 定理 4.2.7] を参照.

実は之より, 座標変換及び形式随伴が両立する, 環の層の単型射

$$\pi_X^{-1} \mathcal{D}_X^\infty \hookrightarrow \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$$

が得られる事が判る ([2, 定義 6.1.9] の後の可換図式を参照).

次の命題により, 座標変換と積とは両立する事が判る:

1.8. 命題. (1) $\widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ に於いて

$$\Phi^*(Q \circ P)(t; w, \eta) = \Phi^*Q(t; w, \eta) \circ \Phi^*P(t; w, \eta).$$

証明. 各点で成り立つ事を示せば良いから, 定義域内の点 $(z_0; \zeta_0)$ を任意に固定して, その近傍で形式冪級数として等号が成立する事を示せば充分. $e^{F(z, \eta)} := e^{\langle \Phi^{-1}(z), \eta/t \rangle} e^{-\langle z, \zeta_0/t \rangle}$ と置けば, [2, 定理 4.2.1] の証明から

$$\begin{aligned} \Phi^*(t; w, \eta) &= e^{\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} P(t; z, \zeta') e^{\langle J_w(z+tz', z)z', \eta \rangle} e^{-\langle z', \zeta_0 \rangle} \Big|_{\substack{z'=0 \\ \zeta'=\zeta_0}} \\ &= e^{t\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} P(t; z, \zeta') e^{\langle \Phi^{-1}(z+z') - \Phi^{-1}(z), \eta/t \rangle} e^{-\langle z' + z, \zeta_0/t \rangle} e^{\langle z, \zeta_0/t \rangle} \Big|_{\substack{z'=0 \\ \zeta'=\zeta_0}} \\ &= e^{t\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} P(t; z, \zeta') e^{F(z+z', \eta) - F(z, \eta)} \Big|_{\substack{z'=0 \\ \zeta'=\zeta_0}}. \end{aligned}$$

ここで $t^{|\alpha|} \partial_{\eta_1}^\alpha e^{F(z_2, \eta_1) - F(z, \eta_1)} = e^{F(z_2, \eta) - F(z, \eta)} (\Phi^{-1}(z_2) - \Phi^{-1}(z))^\alpha$ だから, $z_j := \Phi(w_j)$ 等と置けば

$$\begin{aligned} &\Phi^*Q(t; w, \eta) \circ \Phi^*P(t; w, \eta) \\ &= e^{t\langle \partial_{\eta_1}, \partial_{w_3} \rangle} e^{t\langle \partial_{\zeta_1}, \partial_{z_2} \rangle} Q(t; z, \zeta_1) e^{F(z_2, \eta_1) - F(z, \eta_1)} e^{t\langle \partial_{\zeta}, \partial_{z_1} \rangle} P(t; z_3, \zeta) e^{F(z_3 + z_1, \eta) - F(z_3, \eta)} \Big|_{\substack{z_1=0, z_2=z_3=z \\ \zeta=\zeta_1=\zeta_0, \eta_1=\eta}} \\ &= \sum_{\alpha} e^{t\langle \partial_{\zeta_1}, \partial_{z_2} \rangle} Q(t; z, \zeta_2) e^{F(z_2, \eta) - F(z, \eta)} \frac{(w_2 - w)^\alpha}{\alpha!} \\ &\quad \cdot \partial_w^\alpha (e^{t\langle \partial_{\zeta}, \partial_{z_1} \rangle} P(t; \Phi(w), \zeta) e^{F(\Phi(w) + z_1, \eta) - F(\Phi(z), \eta)}) \Big|_{\substack{z_1=0, z_2=z \\ \zeta=\zeta_1=\zeta_0}} \\ &= e^{t\langle \partial_{\zeta}, \partial_{z_1} \rangle} e^{t\langle \partial_{\zeta_1}, \partial_{z_2} \rangle} Q(t; z, \zeta_1) P(t; z_2, \zeta) e^{F(z_1 + z_2, \eta) - F(z, \eta)} \Big|_{\substack{z_1=0, z_2=z \\ \zeta=\zeta_1=\zeta_0}} \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{t^{|\alpha+\beta+\gamma|}}{\alpha! \beta! \gamma!} \partial_\zeta^{\alpha+\beta} Q(t; z, \zeta) \partial_z^\alpha \partial_\zeta^\gamma P(t; z, \zeta) \partial_{z_1}^\gamma \partial_{z_2}^\beta e^{F(z_1 + z_2, \eta) - F(w, \eta)} \Big|_{\substack{z_1=0, z_2=z \\ \zeta=\zeta_0}} \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \frac{t^{|\beta+\gamma|}}{(\beta+\gamma)!} \partial_\zeta^{\beta+\gamma} (Q \circ P)(t; z, \zeta) \partial_{z_1}^{\beta+\gamma} e^{F(z + z_1, \eta) - F(z, \eta)} \Big|_{\substack{z_1=0 \\ \zeta=\zeta_0}} \\ &= e^{t\langle \partial_{\zeta}, \partial_{z_1} \rangle} (Q \circ P)(t; z, \zeta) e^{F(z + z_1, \eta) - F(z, \eta)} \Big|_{\substack{z_1=0 \\ \zeta=\zeta_0}} = \Phi^*(Q \circ P)(t; w, \eta). \end{aligned}$$

以上で示された.

□

次の命題により, 形式随伴は環の反同型を与える事が判る:

1.9. 命題. $\widehat{\mathcal{F}}_{cl}$ に於いて

$$(Q \circ P)^*(t; z, \zeta) = P^*(t; z, \zeta) \circ Q^*(t; z, \zeta).$$

証明. 形式冪級数として, 等号が成り立つ事を示せば良い. 定義域内の点 $(z_0; \zeta_0)$ を任意に取り, その近傍で考える. $a(z) \in \mathcal{O}_X$ に対して $a(z)^* = a(z)$ 且つ $((\zeta - \zeta_0)^\alpha)^* = (-\zeta - \zeta_0)^\alpha$ は定義から直ちに判る.

(1) $Q = a(z) \in \mathcal{O}_X$ の時,

$$(aP)^*(t; z, \zeta) = \sum_{\gamma, j} \frac{t^{|\gamma|+j}}{\gamma!} \partial_z^\gamma \partial_\zeta^\gamma (a(z) P_j(z, -\zeta)) = \sum_{\mu, \nu, j} \frac{t^{|\mu|+|\nu|+j}}{\mu! \nu!} \partial_z^\mu a(z) \cdot \partial_z^\nu \partial_\zeta^{\mu+\nu} P_j(z, -\zeta).$$

一方

$$P^*(t; z, \zeta) \circ a(z)^* = \sum_{\nu, j} \frac{t^{|\nu|+j}}{\nu!} \partial_z^\nu \partial_\zeta^\nu P_j(z, -\zeta) \circ a(z) = \sum_{\mu, \nu, j} \frac{t^{|\mu|+|\nu|+j}}{\mu! \nu!} \partial_z^\mu a(z) \cdot \partial_z^\nu \partial_\zeta^{\mu+\nu} P_j(z, -\zeta)$$

だから

$$(aP)^*(t; z, \zeta) = P^*(t; z, \zeta) \circ a(z)^*.$$

(2) $Q = (\zeta - \zeta_0)^\alpha$ の時, $Q^*(t; z, -\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^\alpha$ に注意する. この時

$$\begin{aligned} (QP)^*(t; z, -\zeta) &= e^{-t\langle \partial_\zeta, \partial_z \rangle} \sum_{\gamma, j} \frac{t^{|\gamma|+j}}{\gamma!} \partial_\zeta^\gamma (\zeta - \zeta_0)^\alpha \partial_z^\gamma P_j(z, \zeta) \\ &= \sum_{\mu, \nu, \gamma, j} \frac{(-1)^{|\mu|+|\nu|} t^{|\gamma|+|\mu|+|\nu|+j}}{\mu! \nu! \gamma!} \partial_\zeta^\nu \partial_z^{\mu+\nu+\gamma} P_j(z, \zeta) \partial_\zeta^{\mu+\gamma} (\zeta - \zeta_0)^\alpha \\ &= \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{(-1)^{|\beta|-|\gamma|} t^{|\beta|}}{\beta!} \binom{\beta}{\gamma} \partial_z^\beta P^*(t; z, -\zeta) \partial_\zeta^\beta (\zeta - \zeta_0)^\alpha \\ &= \sum_{\beta} \frac{t^{|\beta|}}{\beta!} \partial_z^\beta P^*(t; z, -\zeta) \partial_\zeta^\beta (\zeta - \zeta_0)^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (-1)^{|\beta|-|\gamma|} \\ &= P^*(t; z, -\zeta) (\zeta - \zeta_0)^\alpha + \sum_{|\beta| > 0} \frac{t^{|\beta|}}{\beta!} \partial_z^\beta P^*(t; z, -\zeta) \partial_\zeta^\beta (\zeta - \zeta_0)^\alpha (1-1)^{|\beta|} \\ &= P^*(t; z, -\zeta) (\zeta - \zeta_0)^\alpha = P^*(t; z, -\zeta) \circ Q^*(t; z, -\zeta). \end{aligned}$$

(3) 一般の場合,

$$Q(t; z, \zeta) = \sum t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0) (\zeta - \zeta_0)^\alpha,$$

と展開すると, (1), (2) に依って

$$\begin{aligned} (Q(t; z, \zeta) \circ P(t; z, \zeta))^* &= \sum_{\alpha, j} (t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0) (\zeta - \zeta_0)^\alpha \circ P(t; z, \zeta))^* \\ &= \sum_{\alpha, j} (t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0) \circ (\zeta - \zeta_0)^\alpha \circ P(t; z, \zeta))^* = \sum_{\alpha, j} ((\zeta - \zeta_0)^\alpha \circ P(t; z, \zeta))^* \circ (t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0))^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha, j} P^*(t; z, -\zeta) \circ ((\zeta - \zeta_0)^\alpha)^* \circ (t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0))^* \\
&= \sum_{\alpha, j} P^*(t; z, -\zeta) \circ (t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0) \circ (\zeta - \zeta_0)^\alpha)^* \\
&= \sum_{\alpha, j} P^*(t; z, -\zeta) \circ (t^j Q_j^{(\alpha)}(z, \zeta_0) (\zeta - \zeta_0)^\alpha)^* = P^*(t; z, -\zeta) \circ Q^*(t; z, -\zeta).
\end{aligned}$$

□

以下, 慣例通り $\otimes \pi_X^{-1} \Omega_X$ を単に $\otimes \Omega_X$ と書く. 次の意味で $P^*(t; z, \partial_z) dz = P^*(t; z, \partial_z) \otimes dz \in \mathcal{O}_X^R \otimes \Omega_X$ は座標不変である:

1.10. 命題. 座標変換 $\Phi(w) = z$ に対し $\widehat{\mathcal{S}}_{cl} \otimes \Omega_X$ に於いて

$$\Phi^*(P^*(t; z, \zeta) \otimes dz) = (\Phi^*(P(t; z, \zeta) \otimes dz))^*.$$

此処で, 微分形式の引き戻しも Φ^* と書いている. 即ち

$$\Phi^*(P^*(t; z, \zeta) \otimes dz) = \Phi^* P^* \otimes \Phi^* dz = \Phi^* P^* \otimes \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] dw = \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^* P^* \otimes dw$$

証明. $\Phi^*(P^*(t; z, \zeta) \otimes dz) = (\Phi^*(P(t; z, \zeta) \otimes dz))^*$ とは,

$$\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^*(P^*) = (\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^* P)^* = (\Phi^* P)^* \circ \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right]$$

に他ならない (以下の計算を参照). Q も条件を満たすとする

$$\begin{aligned}
\Phi^*((QP)^* \otimes dz) &= \Phi^*(P^* Q^* \otimes dz) = \Phi^*(P^*) \Phi^*(Q^*) \otimes \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] dw \\
&= \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^*(P^*) \Phi^*(Q^*) \otimes dw = (\Phi^* P)^* \circ \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^*(Q^*) \otimes dw \\
&= (\Phi^* P)^* \circ (\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^* Q)^* \otimes dw = (\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^* Q \circ \Phi^* P)^* \otimes dw \\
&= (\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^*(QP))^* \otimes dw = (\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \Phi^*(QP) \otimes dw)^* = (\Phi^*(QP \otimes dz))^*
\end{aligned}$$

だから QP も同じ条件を満たす. 従って $P = a(z)$ 又は ζ_j について示せば良い.

(1) $P = a(z)$ の時

$$\begin{array}{ccc}
a(z) dz & \xrightarrow{\Phi^*} & a(\Phi(w)) \otimes \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] dw \\
\downarrow * & & \downarrow * \\
a(z) dz & \xrightarrow{\Phi^*} & a(\Phi(w)) \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \otimes dw
\end{array}$$

なる可換図式を得るから良い.

(2) $P = \zeta_j$ の時, $\Phi^* \zeta_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \eta_i$ となる. よって $A = (A_{ij}) := \frac{\partial z}{\partial w}$ 及び $A^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} := (B_{ij})$ と置けば,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \eta_i \otimes \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] dw = \det A \sum_{i=1}^n B_{ij} \eta_i \otimes dw = \det^t A \sum_{i=1}^n B_{ij} \eta_i \otimes dw.$$

従って、この形式随伴を取れば、

$$-\sum_{i=1}^n \left((\det^t A) B_{ij} \eta_i + \frac{\partial \det^t A}{\partial w_i} B_{ij} + (\det^t A) \frac{\partial B_{ij}}{\partial w_i} \right) \otimes dw.$$

此処で $\det^t A = \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right]$ に注意する. 次の補題を用意する:

1.11. 補題. $A(z) \in GL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ に対して

$$\frac{\partial \det A}{\partial z_j} = (\det A) \operatorname{Tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial z_j} \right).$$

証明. $(\det A)A^{-1}$ は A の余因子行列だから, $(\det A)A^{-1}$ の (μ, ν) 成分を $\tilde{A}_{\mu, \nu}$ と置いた時, 余因子行列の定義から

$$\begin{aligned} (\det A) \operatorname{Tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial z_j} \right) &= \operatorname{Tr} \left((\det A) A^{-1} \frac{\partial A}{\partial z_j} \right) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \tilde{A}_{\mu, \nu} \frac{\partial A_{\nu, \mu}}{\partial z_j} \\ &= \sum_{\mu=1}^n \det \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdots a_{1,\mu-1} & \frac{\partial A_{1,\mu}}{\partial z_j} & a_{1,\mu+1} \cdots a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} \cdots A_{n,\mu-1} & \frac{\partial A_{n,\mu}}{\partial z_j} & A_{n,\mu+1} \cdots A_{n,n} \end{bmatrix} = \frac{\partial \det A}{\partial z_j}. \end{aligned}$$

□

$AA^{-1} = \mathbf{1}_n$ を微分すれば $\frac{\partial A}{\partial w_i} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial w_i} = 0$ だから

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial w_i} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial w_i} A^{-1}.$$

ここで, 補題 1.11 から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \det^t A}{\partial w_i} B_{ij} + (\det^t A) \frac{\partial B_{ij}}{\partial w_i} \right) &= \det^t A \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial w_i} \right) B_{ij} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial w_i} \right) \\ &= \det^t A \sum_{i, \mu, \nu=1}^n (B_{\nu\mu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial w_i} B_{ij} - B_{i\mu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial w_i} B_{\nu j}) \\ &= \det^t A \left(\sum_{i, \mu, \nu=1}^n B_{\nu\mu} \frac{\partial^2 z_\mu}{\partial w_\nu \partial w_i} B_{ij} - \sum_{i, \mu, \nu=1}^n B_{i\mu} \frac{\partial^2 z_\mu}{\partial w_i \partial w_\nu} B_{\nu j} \right) = 0. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{array}{ccc} \zeta_j \otimes dz & \xrightarrow{\Phi^*} & \det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \eta_i \otimes dw \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ -\zeta_j \otimes dz & \xrightarrow{\Phi^*} & -\det \left[\frac{\partial z}{\partial w} \right] \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \eta_i \otimes dw \end{array}$$

なる可換図式を得るから良い.

□

次に, 標準的な $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ の芽の表示を紹介する. 最初に記号を準備する:

1.12. 定義. $\varepsilon > 0$ に対して

$$W_\varepsilon := \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p < \varepsilon |\operatorname{Im} p|\},$$

と置く. 更に $z^* \in T^*\mathbb{C}^n$ に対して

$$\mathcal{T}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega, \varepsilon} \{f(z, \zeta, p) \in \Gamma(\Omega \times W_\varepsilon; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}}); (\zeta, p) \text{ につき } -n \text{ 次斉次}\}$$

と定める. 但し $\Omega \in \mathcal{D}(T^*\mathbb{C}^n)$ は z^* の錐状近傍全体を取る. 更に $\mathcal{A}_{z^*} \subset \mathcal{T}_{z^*}$ を $p=0$ まで整型なものの成す部分集合とする.

1.13. 定理. 任意の $z^* = (z_0; \zeta_0) \in T^*\mathbb{C}^n$ に対して次の同型が存在する:

$$\mathcal{S}_{z^*} / \mathcal{N}_{z^*} \simeq \mathcal{T}_{z^*} / \mathcal{A}_{z^*}.$$

$P(z, \zeta) \in \mathcal{S}_{z^*}$ に対して, 適当な複素 1 次斉次な整型函数 $s(\zeta)$ を取って

$$\mathcal{R}P(z, \zeta, p) := \int_{1/s(\zeta)}^{\infty} P(z, \tau\zeta) e^{\tau p} \tau^{n-1} d\tau$$

と定義する. 逆に $f(z, \zeta, p) \in \mathcal{T}_{z^*}$ に対しては複素 1 次斉次整型函数 $s_0(\zeta)$ 及び $s_1(\zeta)$ を, 充分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$0 < \operatorname{Re} s_0(\zeta) < -\varepsilon |\operatorname{Im} s_0(\zeta)|, \quad 0 < \operatorname{Re} s_1(\zeta) < \varepsilon |\operatorname{Im} s_1(\zeta)|,$$

を満たすように選び, $\gamma(\zeta)$ を $s_0(\zeta)$ から $s_1(\zeta)$ 迄原点を反時計回りに回る積分路として次の通りに置く:

$$\mathcal{L}f(z, \zeta) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma(\zeta)} f(z, \zeta, p) e^{-p} dp.$$

此れ等 $\mathcal{R}, \mathcal{L}$ が同型を与える. 応用上は, 次の形式表象が有用である:

1.14. 定義. $\Omega \in T^*X$ とする.

(1) t を不定元とする形式冪級数

$$P(t; z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z, \zeta)$$

は次の条件を満たす時, Ω 上の形式表象 (formal symbol) と呼ばれる:

($\widehat{S}$) 定数 $r \in]0, r[$ 及び $d > 0$ が存在して

$$P_j(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[(j+1)d_r]; \mathcal{O}_{T^*X}),$$

且つ $A \in]0, 1[$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対し定数 $C_h > 0$ が存在して

$$|P_j(z, \zeta)| \leq C_h A^j e^{h\|\zeta\|}, \quad ((z, \zeta) \in \Omega_r[(j+1)d_r]; j \in \mathbb{N}_0).$$

Ω 上の形式表象の全体を $\widehat{\mathcal{S}}(\Omega)$ と書く.

(2) $P(t; z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z, \zeta) \in \widehat{\mathcal{S}}(\Omega)$ は次の条件を満たす時, Ω 上の形式零表象 (null-formal symbol) と呼ばれる:

($\widehat{N}$) 各 j について $P_j(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[(j+1)d_r]; \mathcal{O}_{T^*X})$ の時, 定数 $A \in]0, 1[$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対し定数 $C_h > 0$ が存在して

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} P_j(z, \zeta) \right| \leq C_h A^m e^{h\|\zeta\|}, \quad ((z, \zeta) \in \Omega_r[md_r]; m \in \mathbb{N}).$$

Ω 上の零形式表象の全体を $\widehat{\mathcal{N}}(\Omega)$ と書く.

(3) $z^* \in T^*X$ に対して

$$\widehat{\mathcal{S}}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathcal{S}}(\Omega) \supset \widehat{\mathcal{N}}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathcal{N}}(\Omega)$$

と置く. 但し帰納極限は z^* の錐状近傍 $\Omega \in T^*X$ 全体について取る.

conic

この時,

1.15. 定理. 任意に $z^* \in T^*X$ を取ると $\mathcal{S}_{z^*} \subset \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}, z^*} \subset \widehat{\mathcal{S}}_{z^*}$, $\mathcal{N}_{z^*} \subset \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}, z^*} \subset \widehat{\mathcal{N}}_{z^*}$, 且つ座標変換, 積, 形式随伴を含めて

$$\mathcal{S}_{z^*} / \mathcal{N}_{z^*} \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}, z^*} / \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}, z^*} \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{z^*} / \widehat{\mathcal{N}}_{z^*}.$$

$M = \mathbb{R}^n$ (又は実解析的多様体), X を M の複素化とし, $T_M^*X = \sqrt{-1}T^*M$ 上の佐藤の超局所函数 (microfunction) の層を, 通常通り $\mathcal{C}_M$ とする.

1.16. 注意. 任意の $x^* = (x_0; \sqrt{-1}\xi) \in T_M^*X$ を取る. この時 $P(z, \zeta) \in \mathcal{S}_{x^*}$ に対して $\mathcal{C}_{M \times M}$

$$K_P(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \text{sp} \left[\mathcal{R}P(x, \sqrt{-1}\eta, \sqrt{-1}(\langle x-y, \eta \rangle + \sqrt{-1}0)) \right] \omega(\eta) \in \mathcal{C}_{M \times M}$$

が定義出来て

$$\text{supp } K_P \subset \{(x, x; \sqrt{-1}(\xi, -\xi))\}.$$

従って $K_P(x, y) dy$ は超局所作用素 (microlocal operator) を定め, $\mathcal{C}_M$ に作用する. 実は之に依つて $\mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}|_{T_M^*X} \mapsto \mathcal{L}_M$ (環単型射) となる事が知られている.

§ 2. 核函数と超局所作用

先に述べた通り, $\mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}$ は整型函数の超局所化として定義される. 以下ではその関係を述べる. 以下, $z^* = (z_0, \zeta_0) = (0; \lambda, 0, \dots, 0) \in T^*X$ ($\lambda \in \mathbb{C}^\times$) で考える. $r, \varepsilon > 0$ に対して

$$W_{\lambda, \varepsilon} := \{c \in \mathbb{C}; -\text{Re}(\lambda c) < \varepsilon |\text{Im}(\lambda c)|\},$$

$$U_r := \{(z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; \|z\|, \|z - \tilde{z}\| < r\},$$

$$V_{r, \varepsilon}^{(1)} := \{(z, \tilde{z}) \in U_r; \tilde{z}_1 - z_1 \in W_{\lambda, \varepsilon}\},$$

$$V_{r, \varepsilon}^{(j)} := \{(z, \tilde{z}) \in U_r; |\tilde{z}_1 - z_1| < \varepsilon |\tilde{z}_j - z_j|\} \quad (2 \leq j \leq n),$$

$$V_{r, \varepsilon} := \bigcap_{j=1}^n V_{r, \varepsilon}^{(j)}, \quad \widehat{V}_{r, \varepsilon}^{(j)} := \bigcap_{k \neq j} V_{r, \varepsilon}^{(k)} \quad (1 \leq j \leq n),$$

と定める. この時,

$$\mathcal{K}_{z^*} := \varinjlim_{r, \varepsilon} \Gamma(V_{r, \varepsilon}; \mathcal{C}_{X \times X}^{(0, n)}) \supset \mathcal{N}_{z^*} := \varinjlim_{r, \varepsilon} \sum_{j=1}^n \Gamma(\widehat{V}_{r, \varepsilon}^{(j)}; \mathcal{C}_{X \times X}^{(0, n)})$$

と定め,

$$\mathfrak{E}_{z^*} := \mathcal{K}_{z^*} / \mathcal{N}_{z^*}$$

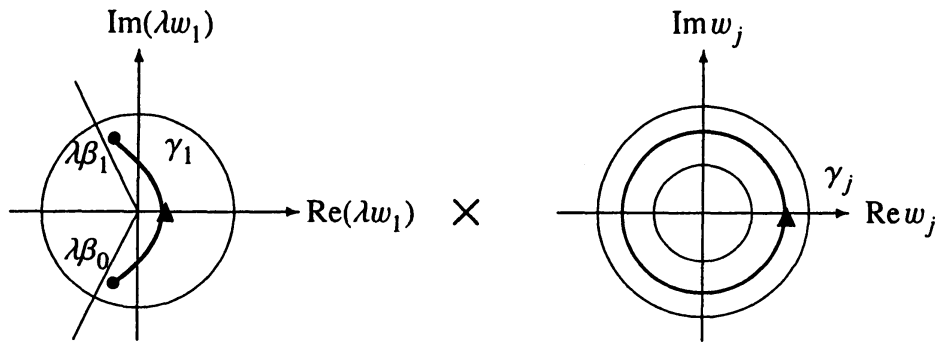


図 1. 積分路

を考える. 但し $\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}$ は $\psi(z, w) dw = \psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z}$ という形の整型函数係数の微分形式の成す層である. $\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}$ の $\mathfrak{E}_{z^*}$ での同値類を

$$P = K(z, \tilde{z}) d\tilde{z} = [\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z}]$$

等と書く. 周知の通り, $H^n \mu hom(\mathbb{C}_A, \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})_{z^*} = \mathfrak{E}_{z^*}$, 即ち, これが本来の定義に依る $\mathcal{E}_{X, z^*}^R$ の表示である ([6], [7] を参照).

次に $\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \Gamma(V_{r, \varepsilon}; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})$ に対して

$$\hat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z, \zeta) := \int \psi(z, \tilde{z}) e^{\langle \tilde{z} - z, \zeta \rangle} d\tilde{z} = \int_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \cdots \oint_{\gamma_n} \psi(z, z + w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw$$

と置く. 但し β_0, β_1 及び $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ は以下の通りに選ぶ: β_0, β_1 を $|\beta_0|, |\beta_1| < r$ 且つ

$$0 > \operatorname{Re}(\lambda \beta_0) > \varepsilon \operatorname{Im}(\lambda \beta_0), \quad 0 > \operatorname{Re}(\lambda \beta_1) > -\varepsilon \operatorname{Im}(\lambda \beta_1),$$

と取る. γ_1 を, β_0 を始点とし, 原点を反時計回りに回って β_1 を終点とする路とする. 次に $2 \leq j \leq n$ を任意に固定する. $w_1 \in \gamma_1$ ならば $|w_1| < \varepsilon r$ となるように $|\beta_0|, |\beta_1|$ を充分小さく取り, $\delta > 0$ を

$$\gamma_j := \left\{ w_j \in \mathbb{C}; |w_j| = \frac{|w_1|}{\varepsilon} + \delta \right\} \subset \{w_j \in \mathbb{C}; |w_1| < \varepsilon |w_j|\}$$

となる様に充分小さく取っておく (図 1 を参照). これで $\psi(z, z + w)$ の整型域 $\{(z, w) \in \mathbb{C}^{2n}; (z, w) \in V_{r, \varepsilon}\}$ 内の路が定まる. この時:

2.1. 命題. (1) $\hat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z, \zeta) \in \mathcal{S}_{z^*}$.

(2) $[\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z}] = 0 \in \mathfrak{E}_{z^*}$ ならば $\hat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z, \zeta) \in \mathcal{N}_{z^*}$.

(3) (β_0, β_1) と同じ条件を満たす (β'_0, β'_1) に取り替えると, $\hat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z, \zeta) - \hat{\psi}_{\beta'_0}^{\beta'_1}(z, \zeta) \in \mathcal{N}_{z^*}$.

命題 2.1 によって次の定義をする:

2.2. 定義. $P = [\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z}] \in \mathfrak{E}_{z^*}$ に対してその表象を

$$\sigma(P) := \int_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \cdots \oint_{\gamma_n} \psi(z, w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw \in \mathcal{S}_{z^*} / \mathcal{N}_{z^*}$$

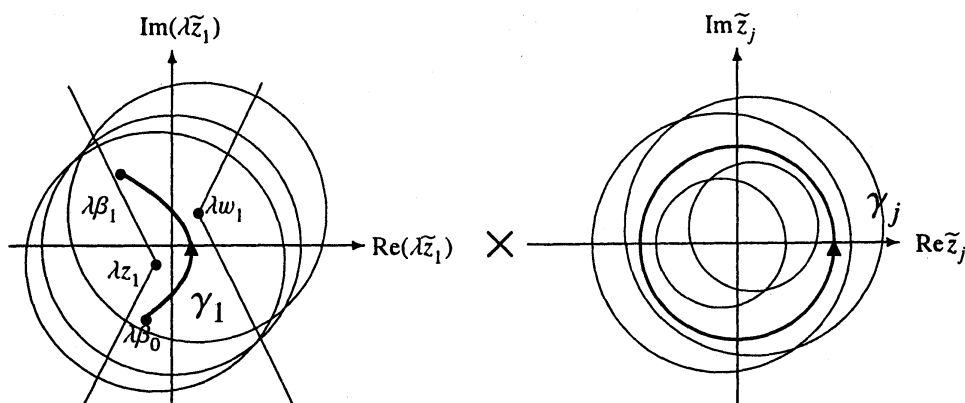


図 2. 積分路

で定義する. これは P のみに依存し定義函数 $\psi(z, \tilde{z})d\tilde{z}$ 及び積分路 γ の取り方に依存しない. これから表象写像

$$\sigma: \mathfrak{E}_z^* \ni P \mapsto \sigma(P) \in \mathcal{S}_z^* / \mathcal{N}_z^*$$

が定義される. これは明らかに線型である. 場合によっては積分

$$P(z, \zeta) := \int \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \psi(z, z+w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw \in \mathcal{S}_z^*$$

を P の表象と呼ぶこともあり $P(z, \zeta) = \sigma(\psi)(z, \zeta)$ とも書く.

次の定理が表象理論の基本である:

2.3. 定理. 表象写像 σ は次の線型同型を与える:

$$\mathfrak{E}_z^* \simeq \mathcal{S}_z^* / \mathcal{N}_z^*.$$

$\sigma: \mathfrak{E}_z^* \simeq \mathcal{S}_z^* / \mathcal{N}_z^*$ の逆を $\varpi: \mathcal{S}_z^* / \mathcal{N}_z^* \simeq \mathfrak{E}_z^*$ と書く.

さて, 柏原・河合 [4], [5] に依る, 定義函数を用いた $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}|_{T_M^*X}$ の $\mathcal{C}_M$ への作用の積分表示に従い, $\psi_1(z, \tilde{z})d\tilde{z}, \psi_2(z, \tilde{z})d\tilde{z} \in \mathcal{K}_z^*$ に対して

$$\psi_2 * \psi_1(z, w) := \int \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \psi_2(z, \tilde{z}) \psi_1(\tilde{z}, w) d\tilde{z} = \int \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \psi_2(z, \tilde{z}) \psi_1(\tilde{z}, w) d\tilde{z}$$

を考える. 但し積分路は次の通りである: $\psi_2(z, \tilde{z})$ 及び $\psi_1(\tilde{z}, w)$ は各々 $(z, \tilde{z}), (\tilde{z}, w) \in V_{r, \varepsilon}$ で整型である. $B_r := \{c \in \mathbb{C}; |c| < r\}$ とする. 充分小さい $0 < \delta' \ll \delta \ll 1$ に対して $z_1 \in B_{\delta'}$ 及び $w_1 \in \mathbb{C}$ を $w_1 - z_1 \in B_{\delta'} \cap W_{\lambda, \varepsilon}$ と取り

$$D_{\lambda, \varepsilon, \delta}^1(z_1, w_1) := \{\tilde{z}_1 \in B_r; \tilde{z}_1 - z_1, w_1 - \tilde{z}_1 \in B_r \cap W_{\lambda, \varepsilon}\}$$

とすればこの集合は単連結である. $\beta_0, \beta_1 \in D_{\lambda, \varepsilon, \delta}^1(z_1, w_1)$ を

$$\begin{cases} 0 > \operatorname{Re}(\lambda(\beta_0 - z_1)) > \varepsilon \operatorname{Im}(\lambda(\beta_0 - z_1)), \\ 0 > \operatorname{Re}(\lambda(\beta_1 - z_1)) > -\varepsilon \operatorname{Im}(\lambda(\beta_1 - z_1)), \end{cases}$$

と取る. γ_1 を β_0 から β_1 に到る $D_{\lambda, \varepsilon, \delta}^1(z_1, w_1)$ 内の道とする. 次に $2 \leq j \leq n$ を任意に固定する.

$$\begin{cases} \{\tilde{z}_j \in \mathbb{C}; |\tilde{z}_1 - z_1| < \varepsilon |\tilde{z}_j - z_j|, \tilde{z}_j - z_j \in B_r\}, \\ \{\tilde{z}_j \in \mathbb{C}; |w_1 - \tilde{z}_1| < \varepsilon |w_j - \tilde{z}_j|, w_j - \tilde{z}_j \in B_r\}, \end{cases}$$

という二つの円環領域が共通部分を持つように $\tilde{z}_1 \in \gamma_1$, $D_{\lambda, \varepsilon, \delta}^1(z_1, w_1)$ 及び $z_j, w_j \in B_\delta$ を十分小さく取り, γ_j を $\{z_j \in \mathbb{C}; |z_1 - \tilde{z}_1| \geq \varepsilon |\tilde{z}_j - z_j|, |w_j - \tilde{z}_1| \geq \varepsilon |w_j - \tilde{z}_j|\}$ を反時計回りに一周する $\{\tilde{z}_j \in \mathbb{C}; \tilde{z}_j - z_j \in B_r, w_j - \tilde{z}_j \in B_r\}$ 内の単純閉曲線とする (図 2 を参照). この積分路を取れば, $z^* = x^* \in T_M^* X$ 且つ $\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{x^*}$ の時, 任意の $u(x) \in \mathcal{C}_{M, x^*}$ に対し, $u(x)$ の定義関数 $f(z)$ をうまく取れば, $\psi(z, \tilde{z}) d\tilde{z}$ が定める作用素を P とすると,

$$\psi * f(z) = \int \varphi(z, \tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

の境界値が $Pu(x) \in \mathcal{C}_{M, x^*}$ を表す. ところがこれでは $\psi_2 * \psi_1(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}$ とは限らない (神本・片岡 [3] 参照). 神本・片岡 [3] では, 新たな定義関数族を導入し, この問題を解決した. 此処では, [3] の結果を用いた別の方法を紹介する.

2.4. 注意. $\psi(z, w) \in \Gamma(V_{r, \varepsilon}; \mathcal{O}_{X \times X})$ とすると, $\frac{w_1}{w'} = (\frac{w_1}{w_2}, \dots, \frac{w_1}{w_n})$ に関し

$$\psi(z, z+w) = \sum_{\alpha' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \frac{\psi_{\alpha'}(z, w_1)}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha' + 1_{n-1}}$$

と Laurent 展開出来る. 或る $2 \leq j \leq n$ について $\alpha_j + 1 \leq 0$ となる項は $w_j = 0$ まで整型なので $\mathfrak{E}_{z^*}$ で零. よって始めから展開は $\alpha_j + 1 \geq 1$, 即ち

$$\sum_{\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}} \frac{\psi_{\alpha'}(z, w_1)}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha' + 1_{n-1}}$$

として構わない. そこで

$$\begin{aligned} U'_r &:= \{(z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; |z|, |z_1 - \tilde{z}_1| < r\}, \\ V_{r, \varepsilon}^{(1)} &:= \{(z, \tilde{z}) \in U'_r; \tilde{z}_1 - z_1 \in W_{\lambda, \varepsilon}\}, \\ V_{r, \varepsilon}^{(j)} &:= \{(z, \tilde{z}) \in U'_r; |\tilde{z}_1 - z_1| < \varepsilon |\tilde{z}_j - z_j|\} \quad (2 \leq j \leq n), \\ V'_{r, \varepsilon} &:= \bigcap_{j=1}^n V_{r, \varepsilon}^{(j)}, \quad \widehat{V}'_{r, \varepsilon}^{(j)} := \bigcap_{k \neq j} V_{r, \varepsilon}^{(k)} \quad (1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

と定め,

$$\mathcal{K}'_{z^*} := \varinjlim_{r, \varepsilon} \Gamma(V'_{r, \varepsilon}; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}) \supset \mathcal{N}'_{z^*} := \varinjlim_{r, \varepsilon} \sum_{j=1}^n \Gamma(\widehat{V}'_{r, \varepsilon}^{(j)}; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)})$$

と置けば

$$\mathfrak{E}_{z^*} = \mathcal{K}'_{z^*} / \mathcal{N}'_{z^*}$$

となる事に注意する.

さて

$$V''_{r, \varepsilon, B} := \bigcap_{2 \leq j \leq n} \{(z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^{2n}; \|z\|, |z_1 - \tilde{z}_1| < r, B < |z_j - \tilde{z}_j|\}$$

と置く. $\varphi(z, \tilde{z}) \in \Gamma(V''_{r, \varepsilon, B}; \mathcal{O}_{X \times X})$ とすると

$$\varphi(z, z+w) = \sum_{\alpha' \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \frac{\varphi_{\alpha'}(z, w_1)}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \left(\frac{1}{w'}\right)^{\alpha' + 1_{n-1}}$$

と展開出来て, $\varphi_{\alpha}(z, w_1)$ は $|z|, |w_1| < r$ で整型, 且つ Cauchy の不等式に依って, $B > B'$ を取った時, 任意の $K \Subset U'_r$ に対して $C > 0$ が存在して $\sup_K |\varphi_{\alpha'}(z, w_1)| \leq CB^{|\alpha|+n-1}$ という評価を持つ. そこで

$$\sigma(\varphi)(z, \zeta) = \int_{\gamma'} \varphi(z, z+w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw$$

を考える. 但し γ' は $\gamma'_n = \gamma_n$ 且つ $\gamma'_j := \{w_j \in \mathbb{C}; |w_j| = R\}$ ($2 \leq j \leq n, R > B$). この時 $\varphi(z, w) \in \Gamma(U'_{r, \varepsilon}; \mathcal{O}_{X \times X})$ ならば Cauchy の積分定理から

$$\int_{\gamma'} \varphi(z, z+w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw = \int_{\gamma} \varphi(z, z+w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw$$

だから先の表象 σ と一致する. 次に,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi(z, z+w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw &= \int_{\gamma_1} dw_1 \varphi_{\alpha}(z, w_1) e^{w_1 \zeta_1} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \oint_{\gamma'_2 \times \cdots \times \gamma'_n} \frac{e^{\langle w', \zeta' \rangle}}{(2\pi\sqrt{-1})^n (w')^{\alpha + 1_{n-1}}} dw' \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_1} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \varphi_{\alpha}(z, w_1) e^{w_1 \zeta_1} \frac{(\zeta')^{\alpha}}{\alpha!} dw_1 \end{aligned}$$

に於いて, γ_n を変更する事で, 或る $h > 0$ に対して積分路上で $|e^{w_1 \zeta_1}| \leq e^{-2h|\zeta_1|}$ と出来る. ここで $|\zeta_j| < \frac{h|\zeta_1|}{(n-1)B}$ とすれば

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \varphi_{\alpha}(z, w_1) e^{w_1 \zeta_1} \frac{(\zeta')^{\alpha}}{\alpha!} dw_1 \right| &\leq |\gamma_1| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \frac{C e^{-2h|\zeta_1|}}{\alpha!} \prod_{j=2}^n (B|\zeta_j|)^{\alpha_j} \\ &= |\gamma_1| C e^{-2h|\zeta_1|} e^{B(|\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n|)} < |\gamma_1| C e^{-h|\zeta_1|} = |\gamma_1| C e^{-h\|\zeta_1\|} \end{aligned}$$

だから $\int_{\gamma'} \varphi(z, z+w) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw \in \mathcal{N}_{z^*}$. そこで

$$\mathcal{K}_{z^*}^{\circ} := \varinjlim_{r, \varepsilon, B} \Gamma(V''_{r, \varepsilon, B}; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)})$$

と定めれば, 以下を示す事が出来る:

- (1) $\sigma: \mathcal{K}_{z^*}^{\circ} \rightarrow \mathcal{N}_{z^*}$.
- (2) $\varphi(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}^{\circ}$ に対して $\varpi \circ \sigma(\varphi) \in \mathcal{N}_{z^*}$ 且つ $\varpi \circ \sigma(\varphi)(z, \tilde{z}) d\tilde{z} - \varphi(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}^{\circ}$.
- (3) $z^* = x^* \in \dot{T}_M^* X$ 且つ $\varphi(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{x^*}^{\circ}$ の時, 任意の $u(x) \in \mathcal{C}_{M, x^*}$ に対し, $u(x)$ の定義関数 $f(z)$ をうまく取れば

$$\varphi * f(z) = \int \varphi(z, \tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

の境界値は $\mathcal{C}_{M, x^*}$ に於いて 0 となる.

$P(z, \zeta), Q(z, \zeta) \in \mathcal{S}_{z^*}^*$ に対して核函数を $\varpi(P) = \psi_1, \varpi(Q) = \psi_2$ とする. 神本・片岡 [3] に依れば,

$$\psi_2 * \psi_1(z, \tilde{z}) = \psi^1(z, \tilde{z}) + \psi^2(z, \tilde{z}),$$

但し $\psi^1(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}$ 且つ $\psi^2(z, \tilde{z}) d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}^\circ$ となる. 従って $\sigma(\psi_2 * \psi_1) \in \mathcal{S}_{z^*}^*$ が定まる.

2.5. 定理. $Q \circ P(z, \zeta) = \sigma(\psi_2 * \psi_1)$ が成立つ. 特に $\sigma(\psi_2 * \psi_1) = \sigma(\psi_2) \circ \sigma(\psi_1)$.

証明は [2] と同様である.

従って $\psi_2 \circ \psi_1(z, \tilde{z}) d\tilde{z} := \varpi \sigma(\psi_2 * \psi_1)(z, \tilde{z}) d\tilde{z}$ と定めれば, $\psi_2 \circ \psi_1(z, \tilde{z}) d\tilde{z}$ が積を与える事が判る. 此処で

$$\begin{aligned} \psi_3 \circ (\psi_2 \circ \psi_1)(z, \tilde{z}) &= \varpi \sigma(\psi_2 * \varpi \sigma(\psi_2 * \psi_1)) = \varpi(\sigma(\psi_3) \circ \sigma \varpi \sigma(\psi_2 * \psi_1)) \\ &= \varpi(\sigma(\psi_3) \circ \sigma(\psi_2 * \psi_1)) = \varpi(\sigma(\psi_3) \circ \sigma(\psi_2) \circ \sigma(\psi_1)) = (\psi_3 * \psi_2) \circ \psi_1(z, \tilde{z}) \end{aligned}$$

に注意する. 更に $z^* = x^* \in T_M^* X$ 且つ $u(x) \in \mathcal{C}_{M, x^*}$ に対し, $u(x)$ の定義函数 $f(z)$ をうまく取れば $QPu(x)$ の定義函数は

$$\int \psi_2 * \psi_1(z, \tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z} = \int \psi^1(z, \tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

となる. これは $Q(Pu)(x) = (QP)u(x)$ と両立する.

§ 3. 実整型超局所函数

本節では [2] で触れる事の出来なかった実整型超局所函数について, 表象理論の立場から解説を行う (本節の構成に関しては Schapira [8] に負う所が多い). 余次元 d の閉部分複素多様体 $Y \subset X$ は, 局所的には

$$(3.1) \quad X = \{z = (z', z'')\} \supset Y = \{(z', 0)\}$$

と書ける. 但し $z' := (z'_1, \dots, z'_{n-d}), z'' := (z''_1, \dots, z''_d)$. 座標 (3.1) を固定して

$$T_Y^* X \simeq Y \times \mathbb{C}^d = \{(z'; \zeta'')\}$$

と同一視する. さて, この座標下で $\mathcal{I}_{Y, z}^{\mathbb{R}} := \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} z'' + \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \partial_{z'}$ と置く. 但し $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} z'' := \sum_{j=1}^d \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} z''_j$ 等を表す. $U \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-d})$ に対して z と w とを $\text{Cl } U$ の $\mathbb{C}^n$ に於ける近傍の二つの複素座標系で, Y が $\{z'' = 0\}$ 及び $\{w'' = 0\}$ で表されていると仮定する. 対応する $T_Y^* \mathbb{C}^n$ の近傍の座標系を各々 $(z'; \zeta''), (w'; \eta'')$ と置く. 複素座標変換は $z = \Phi(w) = (\Phi_1(w), \Phi_2(w))$ と書け $\Phi_2(w', 0) = 0$, 且つ $w'' = 0$ と $z'' = 0$ とは同値. 以下, この様な座標変換を Y を保つと呼ぶ. 簡単の為

$$\Phi^{-1}(z) = (w'(z), w''(z))$$

と書く. この時

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial z'}(z) & \frac{\partial w'}{\partial z''}(z) \\ \frac{\partial w''}{\partial z'}(z) & \frac{\partial w''}{\partial z''}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z'}{\partial w'}(w) & \frac{\partial z'}{\partial w''}(w) \\ \frac{\partial z''}{\partial w'}(w) & \frac{\partial z''}{\partial w''}(w) \end{bmatrix} = \mathbb{1}_n \quad (n \text{ 次単位行列})$$

に於いて $\frac{\partial w''}{\partial z'}(z', 0) = \frac{\partial z''}{\partial w'}(w', 0) = 0$ だから, 特に

$$\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \frac{\partial z''}{\partial w''}(w', 0) = \mathbb{1}_d$$

に注意する.

3.1. 定理. 以上の記号下で

$$\Phi^*(\mathcal{I}_{Y,z}^\infty \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right]) = \mathcal{I}_{Y,w}^\infty.$$

証明. $\det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] \neq 0$ だから, 逆行列を考えて

$$\Phi^*(\mathcal{I}_{Y,z}^\infty \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right]) \subset \mathcal{I}_{Y,w}^\infty$$

を示せば充分. $(z', 0)$ の近傍で可逆な d 次正方行列 $A(z)$ が存在して $w'' = A(z)z''$ と書ける. よって $z'' = A(z)^{-1}w''$ 且つ $\det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] = \det A(z', 0)$. 従って

$$\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} z'' \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] = \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} (\det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] A(z)^{-1} w'') = \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} w''.$$

次に

$$\begin{bmatrix} \partial_{z'} \\ \partial_{z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w'}{\partial z'} \right] & \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w''}{\partial z'} \right] \\ \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w'}{\partial z''} \right] & \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w''}{\partial z''} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{w'} \\ \partial_{w''} \end{bmatrix}$$

だから

$$\partial_{z'} = \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w'}{\partial z'} \right] \partial_{w'} + \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w''}{\partial z'} \right] \partial_{w''} = \mathfrak{t} \left[\frac{\partial w'}{\partial z'} \right] \partial_{w'} + \mathfrak{t} z'' \mathfrak{t} \left[\frac{\partial A}{\partial z'} \right] \partial_{w''}$$

即ち

$$\partial_{z'_j} = \sum_{k=1}^{n-d} \frac{\partial w'_k}{\partial z'_j} \partial_{w'_k} + \sum_{\mu, \nu=1}^d z''_\nu \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial z'_j} \partial_{w''_\mu} = \sum_{k=1}^{n-d} \frac{\partial w'_k}{\partial z'_j} \partial_{w'_k} + \sum_{\mu, \nu=1}^d (A^{-1} w'')_\nu \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial z'_j} \partial_{w''_\mu}.$$

$A^{-1} = B = (B_{ij})$ と置く. $z'' = 0$ と $w'' = 0$ とが同値に注意して, 補題 1.11 から

$$\begin{aligned} \partial_{z'_j} \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] &\equiv \partial_{z'_j} \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z) \right] \mod \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} w'' \\ &= \partial_{z'_j} \circ \det A = (\det A) \partial_{z'_j} + \frac{\partial \det A}{\partial z'_j} \\ &= \det A \sum_{k=1}^{n-d} \frac{\partial w'_k}{\partial z'_j} \partial_{w'_k} + \det A \sum_{\mu, \nu, k=1}^d B_{\nu k} w''_k \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial z'_j} \partial_{w''_\mu} + \frac{\partial \det A}{\partial z'_j} \\ &\equiv \det A \sum_{\mu, \nu, k=1}^d \mathfrak{t} B_{k\nu} \frac{\partial \mathfrak{t} A_{\nu\mu}}{\partial z'_j} (\partial_{w''_\mu} \circ w''_k - \delta_{\mu k}) + \frac{\partial \det A}{\partial z'_j} \mod \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} \partial_{w'} \\ &\equiv -\det A \sum_{\mu, \nu=1}^d \mathfrak{t} B_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{t} A_{\nu\mu}}{\partial z'_j} + \frac{\partial \det A}{\partial z'_j} \mod \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} w'' \\ &= -(\det \mathfrak{t} A) \text{Tr}(\mathfrak{t} A^{-1} \frac{\partial \mathfrak{t} A}{\partial z'_j}) + \frac{\partial \det \mathfrak{t} A}{\partial z'_j} = 0. \end{aligned}$$

以上で示された. □

定理 3.1 から次が判る:

3.2. 定理. $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ 加群同型

$$\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [:P(t; z, \zeta):] \mapsto [:\Phi^* P(t; w, \eta) \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] :] \in \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,w}^{\mathbb{R}}$$

が存在する. 特に $\delta(z'') := [1] \in \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$ と置くと,

$$\delta(z'') = \delta(w'') \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right].$$

3.3. 定義. Y に沿った実整型超局所函数 (real holomorphic microfunction) の層 $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ を

$$\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} := \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} \delta(z'') = \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$$

及び定理 3.1 の変換で定義する. $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ の切断を実整型超局所函数と呼び $f(z), :f(t; z', \zeta''):$ 等で表す. この時, 複素多様体 X 及び閉部分複素多様体 $Y \subset X$ に対して, 座標不変性から層 $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ が定義出来る.

3.4. 注意. (1) $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ が錐状層故, $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ も錐状層. $T^*X \setminus T_Y^*X$ では, 或る z_j'' 又は ζ_i' が零でないので可逆. 即ち $\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}} = \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ だから, 任意の $f(z) \in \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ に対して, $\text{supp } f \subset T_Y^*X$. よって $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ は T_Y^*X 上の錐状層と看做される.

(2) $\mathcal{B}_{Y|X}^{\infty} := \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}|_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{D}_X^{\infty} \delta(z'')$ と定め, Y に台を持つ整型超函数 (holomorphic hyperfunction) の層と呼ぶ.

$\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$ に於ける同値類の計算規則を述べておく. $\text{mod } \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} z''$ で

$$\begin{aligned} z''^{\gamma} \zeta''^{\nu} &= (z''^{\gamma} \zeta''^{\nu})^{**} = (-1)^{|\nu|} \sum_{\alpha} \alpha! \binom{\nu}{\alpha} \binom{\gamma}{\alpha} (-\zeta'')^{\nu-\alpha} \circ z''^{\gamma-\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \alpha! \binom{\nu}{\alpha} \binom{\gamma}{\alpha} \zeta''^{\nu-\alpha} \circ z''^{\gamma-\alpha} \equiv \begin{cases} \frac{(-1)^{|\gamma|} \nu!}{(\nu-\gamma)!} \zeta''^{\nu-\gamma} & (\nu \geq \gamma), \\ 0 & (\nu \not\geq \gamma). \end{cases} \end{aligned}$$

に注意する. この時

$$e^{-\langle \partial_{\zeta''}, \partial_{z''} \rangle} (z''^{\gamma} \zeta''^{\nu})|_{z''=0} = \sum_{\alpha} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{z''}^{\alpha} z''^{\gamma} \partial_{\zeta''}^{\alpha} \zeta''^{\nu}|_{z''=0} = \begin{cases} \frac{(-1)^{|\gamma|} \nu!}{(\nu-\gamma)!} \zeta''^{\nu-\gamma} & (\nu \geq \gamma), \\ 0 & (\nu \not\geq \gamma). \end{cases}$$

だから, 次が判る:

3.5. 補題. $:P(t; z, \zeta): \in \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ に対して,

$$[:P(t; z, \zeta):] = :e^{-t\langle \partial_{\zeta''}, \partial_{z''} \rangle} P(t; z, \zeta)|_{\substack{z''=0 \\ \zeta'=0}} : \in \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}.$$

この補題と $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ の座標変換とを組み合わせれば, $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ の座標変換が以下の通りに求められる. Y を保つ複素座標変換 $\Phi(w) = z$ に対して

$$\Phi^{-1}(\tilde{z}) - \Phi^{-1}(z) = J_w(\tilde{z}, z)(\tilde{z} - z) = \begin{bmatrix} J'_{w'}(\tilde{z}, z) & J''_{w'}(\tilde{z}, z) \\ J'_{w''}(\tilde{z}, z) & J''_{w''}(\tilde{z}, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}' - z' \\ \tilde{z}'' - z'' \end{bmatrix}$$

と書いておく. 特に

$$\Phi^{-1}(z + (0, z_1'')) - \Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} J'_{w'}(z + (0, z_1''), z) & J''_{w'}(z + (0, z_1''), z) \\ J'_{w''}(z + (0, z_1''), z) & J''_{w''}(z + (0, z_1''), z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z_1'' \end{bmatrix}$$

となる. $J''_{w''}(z, z) = \frac{\partial w''}{\partial z''}(z)$ だから, T_Y^*X の点 $(z'; \zeta'')$ 及び $(w'; \eta'')$ の変換則 ${}^t \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] \eta'' = \zeta''$ と比較すれば

$${}^t J''_{w''}(z, z) \eta''|_{z''=0} = {}^t \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] \eta'' = \zeta''.$$

この時,

$$\begin{aligned} \Phi^* f(t; w, \eta) &= e^{i \langle \partial_{\zeta_1}, \partial_{z_1} \rangle} f(t; z', \zeta_1'' + {}^t J_{w''}(z_1, z) \eta) \Big|_{\substack{z_1 = z_1 = \Phi(w) \\ \zeta_1 = 0}} \\ &= e^{i \langle \partial_{\zeta_1''), \partial_{z_1'} \rangle} f(t; z', \zeta_1'' + {}^t J''_{w'}(z + (0, z_1''), z) \eta' + {}^t J''_{w''}(z + (0, z_1''), z) \eta'') \Big|_{\substack{z_1''=0 \\ \zeta_1''=0}} \end{aligned}$$

となる.

3.6. 定理. 以上の記号下で

$$\Phi_Y^* f(t; w', \eta'') := e^{-i \langle \partial_{\eta''}, \partial_{w''} \rangle} \Phi^* f(t; w, \eta) \Big|_{\substack{w''=0 \\ \eta''=0}} \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right]$$

に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \ni :P(t; z, \zeta): & \xrightarrow{\Phi^*} & : \Phi^* P(t; w, \eta) \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] : \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} / \mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [:P(t; z, \zeta):] & \xrightarrow{\Phi^*} & [: \Phi^* P(t; w, \eta) \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] :] \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} / \mathcal{I}_{Y,w}^{\mathbb{R}} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \ni :f(t; z', \zeta'') : & \xrightarrow{\Phi_Y^*} & : \Phi_Y^* f(t; w', \eta'') : \in \mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \end{array}$$

は可換. 特に $\mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ 上の座標変換は Φ_Y^* で与えられる.

Ω_X の双対層を $\Omega_X^{\otimes -1}$ (即ち $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1} = \mathcal{O}_X$) とし, 整型写像 $f: Y \rightarrow X$ に対して

$$\Omega_{Y/X} := \Omega_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X^{\otimes -1}, \quad \Omega_{Y/X}^{\otimes -1} := f^{-1}\Omega_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \Omega_Y^{\otimes -1},$$

と置く. この時 $\delta_Y := \delta(z'') dz'' \in \mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1}$ が座標不変に定まる. 実際

$$\delta(z'') dz'' = \delta(w'') \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] dz'' = \delta(w'') dw''.$$

3.7. 定理. (1) (3.1) の座標下で,

$$[P(t; z, \zeta)] \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} / \mathcal{I}_{Y,z}^{\infty} \ni [:P(t; z, \zeta):] \mapsto :P(t; z, \zeta): \delta_Y \in \mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1}$$

が矛盾無く定まり $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群同型を与える.

(2) $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群同型

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [P(t; z, \zeta)] \mapsto [\det \left[\frac{\partial z''}{\partial w''}(w) \right] \circ \Phi^*(P)(t; w, \eta) \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z) \right]] \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,w}^{\mathbb{R}}$$

が存在する.

(3) 座標変換 $z = \Phi(w)$ に対し $w'' = J_{w''}(z)z''$ と書ける. そこで $:f(t; z', \zeta'') := [P(t; z, \zeta)] \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$ に対して

$$\tilde{\Phi}_Y^* f(t; w', \eta'') := e^{i\langle \partial_{z''}, \partial_{z''} \rangle} f(t; z', \zeta'' + {}^t J_{w''}(z) \eta'') \Big|_{\substack{z''=0 \\ \zeta''=0}}$$

と置く. この時,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [P(t; z, \zeta)] & \longmapsto & [\det \left[\frac{\partial z''}{\partial w''}(w) \right] \circ \Phi^*(P)(t; w, \eta) \circ \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z) \right]] \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathcal{I}_{Y,w}^{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1} \ni [P(t; z, \zeta)] \delta_Y = :f(t; z', \zeta'') : dz'' & \longmapsto & : \tilde{\Phi}_Y^* f(t; w', \eta'') : dw'' \in \mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1} \end{array}$$

は可換, 且つ $\mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1}$ 上の座標変換は

$$:f(t; z', \zeta'') : dz'' \mapsto : \tilde{\Phi}_Y^* f(t; w', \eta'') : dw''$$

で与えられる. 特に

$$: \tilde{\Phi}_Y^* f(t; w', \eta'') : = : \Phi^* f(t; w, \eta) \Big|_{\substack{w''=0 \\ \eta''=0}} : = : \Phi^* f(t; w, \eta) : \mod w'' \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} + \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \partial_{w''}.$$

之より

$$\mathcal{E}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1} = \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} / (z'' \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} + \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \partial_{z''}).$$

整型写像 $f: Y \rightarrow X$ に対して

$$f_d(w, f(w), \zeta) := (w; {}^t df(w) \zeta), \quad f_\pi(w, f(w), \zeta) := (f(w); \zeta)$$

で, 規準的写像 $T^*Y \xleftarrow{f_d} Y \times T^*X \xrightarrow{f_\pi} T^*X$ が定義出来る. f を

$$Y \ni w \xrightarrow{i} (w, f(w)) \in Y \times X \ni (w, z) \xrightarrow{p} z \in X$$

と分解し, $Y \simeq i(Y) \subset Y \times X$ (閉部分多様体) と看做す. この時,

$$\begin{aligned} T_Y^*(Y \times X) &\simeq \{(w, f(w); -{}^t df(w) \zeta, \zeta) \in T^*(Y \times X)\} \\ (3.2) \quad &\simeq \{(w, f(w); \zeta) \in Y \times T^*X\} = Y \times_Y T^*X \end{aligned}$$

という同一視をする. 又, $T_Y^*(Y \times X) \subset T^*(Y \times X)$ とも看做す. この時, 同型 (3.2) は, 同型

$$\Omega_{Y \times X/Y} \simeq \mathcal{O}_{Y \times X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X$$

を与える. $f(w) = (f_1(w), \dots, f_n(w))$ と表した時, $T_Y^*(Y \times X)$ 上の切断 $d(z_j - f_j(w))$ は $Y \times_Y T^*X$ 上の切断 dz_j に写るから, 同型 (3.2) の下で

$$\delta(z - f(w)) d(z_1 - f_1(w)) \wedge \dots \wedge d(z_n - f_n(w)) = \delta(z - f(w)) dz.$$

ここで $X \ni z \mapsto (z, z) \in X \times X$ に依って $X \simeq \Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ を $X \times X$ の閉部分多様体と考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/X \times X}^{\otimes -1} &= \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}} \Omega_{X \times X} = \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}} (\mathcal{O}_{X \times X} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_X \boxtimes \Omega_X)) \\ &= \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} ((\Omega_X^{\otimes -1} \otimes \Omega_X) \boxtimes \Omega_X) = \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega_X) = \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X \end{aligned}$$

に注意しておく。この時、定理 3.7 (3) より:

3.8. 命題. $X \times X$ の座標を $(z, \tilde{z})$ と置く。この時 $1 \leftrightarrow \delta(\tilde{z} - z) d\tilde{z}$ の対応で

$$(3.3) \quad \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} = \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \Omega_X.$$

3.9. 定義. $f: Y \rightarrow X$ を整型写像とする時

$$\mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} := \mathcal{O}_{Y|Y \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X, \quad \mathcal{O}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}} := \mathcal{O}_{Y|Y \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y,$$

で定義し、 $T_Y^*(Y \times X) \simeq Y \times T^*X$ 上の層と看做す。 $\mathcal{O}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}} = \mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}$ に注意する。

$$\mathbb{1}_{Y \rightarrow X} := \delta(z' - f(w)) dz' \in \mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$$

と書く。任意の $\mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ の切断は、 $P \in \mathcal{O}_{Y \times X}^{\mathbb{R}}$ が存在して

$$P \mathbb{1}_{Y \rightarrow X} = P \delta(z' - f(w)) dz'$$

と書け、 $(Q, R) \in (f_d^{-1} \mathcal{O}_Y^{\mathbb{R}}, f_\pi^{-1} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}})$ に対して

$$\begin{aligned} Q(P \mathbb{1}_{Y \rightarrow X}) R &:= Q(w, \partial_w) R^*(z', \partial_{z'}) P \delta(z' - f(w)) dz' \\ &= R^*(z', \partial_{z'}) Q(w, \partial_w) P \delta(z' - f(w)) dz' \end{aligned}$$

が座標不変に定まる。従って $\mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ は $(f_d^{-1} \mathcal{O}_Y^{\mathbb{R}}, f_\pi^{-1} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}})$ 加群となる。同様に任意の $\mathcal{O}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$ の切断は

$$P \delta(z' - f(w)) dw$$

$(P \in \mathcal{O}_{Y \times X}^{\mathbb{R}})$ と書け、 $(R, Q) \in (f_\pi^{-1} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}, f_d^{-1} \mathcal{O}_Y^{\mathbb{R}})$ に対して

$$\begin{aligned} R(P \delta(z' - f(w)) dw) Q &:= Q^*(w, \partial_w) R(z', \partial_{z'}) P \delta(z' - f(w)) dw \\ &= R(z', \partial_{z'}) Q^*(w, \partial_w) P \delta(z' - f(w)) dw \end{aligned}$$

が矛盾無く定まる。従って $\mathcal{O}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$ は $(f_\pi^{-1} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}, f_d^{-1} \mathcal{O}_Y^{\mathbb{R}})$ 加群となる。

3.10. 例. 特別な f について $\mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$ を考える。

(1) f が射影 $Y \times X = \mathbb{C}^{m+n} \ni (w, z) \mapsto z \in \mathbb{C}^n = X$ の時、

$$\mathcal{O}_{Y \times X \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{O}_{Y \times X}^{\mathbb{R}} / \mathcal{O}_{Y \times X}^{\mathbb{R}} \partial_w, \quad \mathcal{O}_{X \leftarrow Y \times X}^{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{O}_{Y \times X}^{\mathbb{R}} / \partial_w \mathcal{O}_{Y \times X}^{\mathbb{R}}.$$

(2) f が埋込み $Y = \mathbb{C}^n \ni z \mapsto (z, 0) \in X = \mathbb{C}^{n+m} = \{(z, w)\}$ の時、

$$\mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} / w \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}, \quad \mathcal{O}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} / \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} w.$$

一般に, $\mathcal{F}$ が $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群の層, $\mathcal{G}$ が $\mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}}$ 加群の層の時,

$$\mathcal{F} \boxtimes_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}} \mathcal{G} := \mathcal{E}_{X \times Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}}} (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

と定める.

3.11. 定理 (テンサー積). $Y_j \subset X_j$ ($j = 1, 2$) を閉部分複素多様体とし, 更に $T_{Y_1 \times Y_2}^*(X_1 \times X_2)$ を $T_{Y_1}^*X_1 \times T_{Y_2}^*X_2$ と同一視する.

(1) 自然な双線型層型射

$$\mathcal{E}_{Y_1|X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{E}_{Y_2|X_2}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_1 \times Y_2|X_1 \times X_2}^{\mathbb{R}}$$

が存在する.

(2) (1) の型射は

$$\mathcal{E}_{Y_1|X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{E}_{Y_2|X_2}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_{Y_1 \times Y_2|X_1 \times X_2}^{\mathbb{R}}$$

を誘導する.

3.12. 注意. 定理 3.11 (1) に於いて $X_j = \{(z'_j, z''_j)\} \supset Y_j = \{(z'_j, 0)\}$ という局所座標系を取ると, 型射は

$$\mathcal{E}_{Y_1|X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{E}_{Y_2|X_2}^{\mathbb{R}} \ni P\delta(z''_1) \boxtimes Q\delta(z''_2) \mapsto (P \boxtimes Q)\delta(z''_1, z''_2) \in \mathcal{E}_{Y_1 \times Y_2|X_1 \times X_2}^{\mathbb{R}}$$

で与えられる. $d_j := \text{codim}_{X_j} Y_j$ と置く. この時 $X_1 \times X_2 \ni (z_1, z_2) \mapsto (w_1, w_2) := (z_2, z_1) \in X_2 \times X_1$ とすると

$$\det \left[\frac{\partial(w'_1, w'_2)}{\partial(z''_1, z''_2)}(z'_1, 0, z'_2, 0) \right] = (-1)^{d_1 \cdot d_2}$$

が判るので

$$u_2(z_2) \otimes u_1(z_1) = (-1)^{d_1 \cdot d_2} u_1(z_1) \otimes u_2(z_2).$$

整型写像 $f_j: Y_j \rightarrow X_j$ ($j = 1, 2$) に対して, 定理 3.11 から

$$\mathcal{E}_{Y_1 \rightarrow X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{E}_{Y_2 \rightarrow X_2}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2}^{\mathbb{R}}$$

が得られる. これから, 整型写像 $g: Z \rightarrow Y$ 及び $f: Y \rightarrow X$ に対して,

$$\varphi: Z \times X \ni (\tau, z) \mapsto (g(\tau), z) \in Y \times X$$

と置けば, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi_\pi & & \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ Z \times_Y T^*Y \times_X T^*X & \xrightarrow{\varphi_d} & Z \times_X T^*X & \xrightarrow{g_\pi} & Y \times_X T^*X \\ & \searrow f_d & \downarrow & & \downarrow f_d \\ & & Z \times_Y T^*Y & \xrightarrow{g_\pi} & T^*Y \end{array}$$

この時

$$(3.4) \quad f_d^{-1} \mathcal{E}_{Z \rightarrow Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{f_d^{-1} g_\pi^{-1} \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}}} g_\pi^{-1} \mathcal{E}_{Y|Y \times X}^{\mathbb{R}} \rightarrow \varphi_{d*} (\mathcal{E}_{Z \times X \rightarrow Y \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\varphi_\pi^{-1} \mathcal{E}_{Y \times X}^{\mathbb{R}}} \varphi_\pi^{-1} \mathcal{E}_{Y|Y \times X}^{\mathbb{R}})$$

が得られる.

3.13. 定理 (逆像). 整型写像 $f: Y \rightarrow X$ 及び複素閉部分多様体 $Z \subset X$ 及び $S \subset Y$ が

$$Y \times_{T_Z^* X} T_Y^* X \cap T_Y^* X = \emptyset, \quad S \simeq Z \times_X Y,$$

を満たすと仮定する時, $\mathcal{C}_Y^{\mathbb{R}}$ 加群として

$$f_{d*}(\mathcal{C}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \otimes_{f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}}) \simeq \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R}}.$$

3.14. 注意. 特に $1_{Y \rightarrow X} \in \mathcal{C}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ を用いれば, 座標変換の一般化として代入 (substitution)

$$f_{d*} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R}}$$

が定義出来る.

(1) f が閉埋込みの時, X の局所座標 (z, w, τ) を

$$\begin{array}{ccc} S = \{(z, 0)\} & \hookrightarrow & Y = \{(z, w, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z = \{(z, 0, \tau)\} & \hookrightarrow & X = \{(z, w, \tau)\} \end{array}$$

及び $T^*X = \{(z, w, \tau; z^*, w^*, \tau^*)\}$ と取ると, 同型は

$$\begin{array}{c} :P(t; z, w, z^*, w^*, \tau^*): \otimes :f(t; z, \tau, w^*): \in f_{d*}(\mathcal{C}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \otimes_{f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}}) \\ \updownarrow \\ [:e^{-t\langle \partial_{w^*}, \partial_w \rangle} (P(t; z, w, z^*, w^*, \tau^*) \circ f(t; z, \tau, w^*))|_{\substack{w=0, \tau=0 \\ z^*=0}}:] \in \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R}} \end{array}$$

で与えられ, 代入は

$$f_{d*} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \ni :f(t; z, \tau, w^*): \mapsto :f(t; z, 0, w^*): \in \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R}}$$

となる.

(2) f が射影の時, Y の局所座標 (z, w, τ) を

$$\begin{array}{ccc} S = \{(z, 0, \tau)\} & \hookrightarrow & Y = \{(z, w, \tau)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z = \{(z, 0)\} & \hookrightarrow & X = \{(z, w)\} \end{array}$$

及び $T^*Y = \{(z, w, \tau; z^*, w^*, \tau^*)\}$ と取ると, 同型は

$$\begin{array}{c} :P(t; z, w, \tau, z^*, w^*): \otimes :f(t; z, w^*): \in f_{d*}(\mathcal{C}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \otimes_{f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}}) \\ \updownarrow \\ :e^{-t\langle \partial_{w^*}, \partial_w \rangle} (P(t; z, w, \tau, z^*, w^*) \circ f(t; z, w^*))|_{\substack{w=0 \\ z^*=0}}:] \in \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R}} \end{array}$$

で与えられ, 代入は

$$f_{d*} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \ni :f(t; z, \eta): \mapsto :f(t; z, \eta): \in \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R}},$$

となる.

$Y_1, Y_2 \subset X$ を複素部分多様体, $\delta: X \rightarrow X \times X$ を対角埋込みとする. この時,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y_1 \cap Y_2 & \xrightarrow{\delta} & Y_1 \times Y_2 \end{array}$$

から

$$T_{Y_1 \cap Y_2}^* X \xleftarrow{\delta_d} X \times_{X \times X} T_{Y_1 \times Y_2}^* (X \times X) \xrightarrow{\delta_\pi} T_{Y_1 \times Y_2}^* (X \times X) \simeq T_{Y_1}^* X \times T_{Y_2}^* X$$

が得られる. この時, テンサー積と代入とを用いて, 次が得られる:

3.15. 定理 (積). $Y_1, Y_2 \subset X$ が横断的複素部分多様体ならば, 次の型射が存在する:

$$\delta_{d*} \delta_\pi^{-1} (\mathcal{C}_{Y_1|X}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{C}_{Y_2|X}^{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathcal{C}_{Y_1 \cap Y_2|X}^{\mathbb{R}}.$$

3.16. 注意. 局所座標系を

$$Y_1 = \{(z, w_1, w_2) \in X; w_2 = 0\}, \quad Y_2 = \{(z, w_1, w_2) \in X; w_1 = 0\},$$

と取る. この時 $T^*X = \{(z, w_1, w_2; z^*, w_1^*, w_2^*)\}$ と置けば,

$$\begin{aligned} & :f(t; z, w_1, w_2^*) : \otimes :g(t; z, w_2, w_1^*) : \in \delta_{d*} \delta_\pi^{-1} (\mathcal{C}_{Y_1|X}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathcal{C}_{Y_2|X}^{\mathbb{R}}) \\ & \quad \downarrow \\ & :e^{-t\langle \partial_{w_1^*}, \partial_{w_1} \rangle - t\langle \partial_{w_2^*}, \partial_{w_2} \rangle} f(t; z, w_1, w_2^*) g(t; z, w_2, w_1^*) \big|_{\substack{w_1=0 \\ w_2=0}} : \in \mathcal{C}_{Y_1 \cap Y_2|X}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

で与えられる.

さて, (3.4) 及び定理 3.13 から

$$(3.5) \quad f_d^{-1} \mathcal{C}_{Z \rightarrow Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{f_d^{-1} g_\pi^{-1} \mathcal{C}_Y^{\mathbb{R}}} g_\pi^{-1} \mathcal{C}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{C}_{Z \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$$

が定義される. 同様に

$$(3.6) \quad g_\pi^{-1} \mathcal{C}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{f_d^{-1} g_\pi^{-1} \mathcal{C}_Y^{\mathbb{R}}} f_d^{-1} \mathcal{C}_{Y \leftarrow Z}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{C}_{X \leftarrow Z}^{\mathbb{R}}$$

が得られる.

3.17. 命題. $g: Z \rightarrow Y$ 及び $f: Y \rightarrow X$ を整型写像とする. この時

(1) $f: Y \rightarrow X$ が整型沈め込み,

(2) $g: Z \rightarrow Y$ が閉埋込,

の何れかが成り立てば (3.5) 及び (3.6) は同型.

3.18. 注意. 一般に $\mathcal{F}$ が $\mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}$ 加群の時, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}_X} \Omega_X$ は右 $\mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}$ 加群の構造を持つ. 作用は

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}_X} \Omega_X \times \mathcal{C}_X^{\mathbb{R}} \ni (v \otimes dz, P) \mapsto P^* v \otimes dz \in \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{C}_X} \Omega_X.$$

之が矛盾無く定義されるのは命題 1.10 に依る. 特に

$$P\delta(z'') \otimes dz = \delta(z'') \otimes dz \cdot P^* \in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{C}_X} \Omega_X$$

と書けている. 之より $\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_X \simeq (z'' \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} + \partial_{z'} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}) \setminus \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$. 又, $:f(t; z', \zeta'') : dz \in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_X$ 及び $:P(t; z, \zeta) : \in \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ に対して $:f(t; z', \zeta'') : dz \cdot :P(t; z, \zeta) :$ は

(i) $P^*(t; z, \zeta) \circ f(t; z', \zeta'') \bmod \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} z'' + \partial_{z'} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$, 即ち $e^{-t \langle \partial_{z''}, \partial_{\zeta''} \rangle} (P^*(t; z, \zeta) \circ f(t; z', \zeta''))|_{\substack{z''=0 \\ \zeta''=0}}$ を

求める;

(ii) $f^*(t; z', \zeta'') \circ P(t; z, \zeta) \bmod z'' \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} + \partial_{z'} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$, 即ち $e^{-t \langle \partial_{z'}, \partial_{\zeta'} \rangle} (f^*(t; z', \zeta'') \circ P(t; z, \zeta))|_{\substack{z''=0 \\ \zeta''=0}}$ を

求める;

の何れかで計算出来る. この時

$$\begin{aligned} :f(t; z', \zeta'') : dz \cdot :P(t; z, \zeta) : &= :e^{-t \langle \partial_{z''}, \partial_{\zeta''} \rangle} (P^*(t; z, \zeta) \circ f(t; z', \zeta''))|_{\substack{z''=0 \\ \zeta''=0}} : dz \\ &= : (e^{-t \langle \partial_{z'}, \partial_{\zeta'} \rangle} (f^*(t; z', \zeta'') \circ P(t; z, \zeta))|_{\substack{z''=0 \\ \zeta''=0}})^* : dz. \end{aligned}$$

3.19. 定理 (順像). $f: Y \rightarrow X$ を整型写像, 閉部分複素多様体 $Z \subset Y$ が, $f' = f \circ i: Z \rightarrow X$ によって X の閉部分多様体と看做されると仮定する ($i: Z \rightarrow Y$ は規準的埋込み). 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & & T^*X & \\ & & \nearrow f_\pi & \uparrow f_\pi & \\ & Z \times T^*X & \xrightarrow{i_\pi} & Y \times T^*X & \\ & \searrow f_d & \downarrow f_d & \downarrow f_d & \\ T^*Z & \xleftarrow{i_d} & Z \times T^*Y & \xrightarrow{i_\pi} & T^*Y \end{array}$$

を考える. この時,

$$f_{\pi*} (f_d^{-1} (\mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_Y) \otimes_{f_d^{-1} i_\pi^{-1} \mathcal{O}_Y^{\mathbb{R}}} i_\pi^{-1} \mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}) \simeq \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_X.$$

3.20. 注意. $vdw \in \mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_Y$ に対して $vdw \otimes \mathbb{1}_{Y \rightarrow X} = vdw \otimes \delta(z - f(w)) dz$ の像を

$$\left(\int v \otimes \delta(z - f(w)) dw \right) dz \in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_X$$

と表し, 積分と呼ぶ.

(1) f が閉埋込みの時, X の局所座標 (z, w, τ) を

$$\begin{array}{ccc} Z = \{(z, 0, 0)\} & \hookrightarrow & Y = \{(z, w, 0)\} \\ \parallel & & \downarrow \\ Z = \{(z, 0, 0)\} & \hookrightarrow & X = \{(z, w, \tau)\} \end{array}$$

及び $T^*X = \{(z, w, \tau; z^*, w^*, \tau^*)\}$ と取ると, 同型は

$$\begin{aligned} :f(t; z, w^*) : dz dw \otimes :P(t; z, w, z^*, w^*, \tau^*) : &\in f_{\pi*} (f_d^{-1} (\mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_Y) \otimes_{f_d^{-1} i_\pi^{-1} \mathcal{O}_Y^{\mathbb{R}}} i_\pi^{-1} \mathcal{O}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}) \\ &\updownarrow \\ [(e^{-t \langle \partial_w, \partial_{w^*} \rangle} (f^*(t; z, w^*) \circ P(t; z, w, z^*, w^*, \tau^*)))|_{\substack{z^*=0 \\ w=0}}]^* dz dw d\tau &\in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes \Omega_X \end{aligned}$$

で与えられ、積分は

$$\mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y \ni :f(t; z, w^*) : dz dw \mapsto :f(t; z, w^*) : dz dw d\tau \in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X$$

となる.

(2) f が射影の時, Y の局所座標 (z, w, τ) を

$$\begin{array}{ccc} Z = \{(z, 0, 0)\} & \hookrightarrow & Y = \{(z, w, \tau)\} \\ \parallel & & \downarrow \\ Z = \{(z, 0)\} & \hookrightarrow & X = \{(z, w)\} \end{array}$$

及び $T^*Y = \{(z, w, \tau; z^*, w^*, \tau^*)\}$ と取ると, 同型は

$$\begin{array}{c} :f(t; z, w^*, \tau^*) : dz dw d\tau \otimes :P(t; z, w, \tau, z^*, w^*) : \in f_{\pi*}(f_d^{-1}(\mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y) \otimes_{f_d^{-1}i_{\pi}^{-1}\mathcal{O}_Y} i_{\pi}^{-1}\mathcal{C}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}) \\ \updownarrow \\ :e^{-i(\partial_w, \partial_{w^*}) - i(\partial_{\tau}, \partial_{\tau^*})}(P^*(t; z, w, \tau, z^*, w^*) \circ f(t; z, w^*, \tau^*))|_{\substack{\tau=\tau^*=0 \\ z^*=0, w=0}} : dz dw \in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X \end{array}$$

で与えられ、積分は

$$f_{d*} f_{\pi}^{-1} \mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X \ni :f(t; z, w^*, \tau^*) : dz dw d\tau \mapsto :f(t; z, w^*, 0) : dz dw \in \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X$$

となる.

M を実解析的多様体, X をその複素化とする. 更に, $N \subset M$ を実解析的部分多様体, $Y \subset X$ を N の複素化とする.

3.21. 定理 (実化). 以上の記号下で, 層単型射

$$b_{\mathbb{R}} : \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{O}_{N/M} |_{\sqrt{-1}T_N^*M} \rightarrow \Gamma_{\sqrt{-1}T_N^*M}(\mathcal{C}_M)$$

が存在する.

3.22. 注意. 局所座標を (3.1) 及び $N = \{(x', x'') \in M; x'' = 0\} \subset M$ とする. この時, 大雑把に言えば, $b_{\mathbb{R}}$ は複素領域での $\delta(z'')$ を, 実領域の δ 関数 $\delta(x'')$ に写す型射である. 相対向き付け層 $\mathcal{O}_{N/M}$ が出てくるのは, 以下の通り, 複素領域での $\delta(z'')$ は微分形式に対応するのに対し, 実領域の $\delta(x'')$ が体積要素に対応する事に依る: N を保つ実座標変換 $M \ni u \mapsto \Phi(u) = x \in M$ に対し, その複素化も同じ記号で $\Phi(w) = z$ と書く ($\text{Re} z = x, \text{Re} w = u$). この時, 実領域に於いては [2, 命題 2.6.2] と同様の証明で

$$\delta(x'') = \left| \det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] \right| \delta(u'').$$

$\det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] > 0$ ならば $\mathcal{O}_{N/M}$ の生成元 $\mathbb{1}_{N/M}$ の符号は変わらないから

$$\begin{array}{ccc} \delta(z'') & \xrightarrow{\Phi_Y^* \otimes \mathbb{1}_{N/M}} & \det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] \delta(w'') \\ \downarrow b_{\mathbb{R}} & & \downarrow b_{\mathbb{R}} \\ \delta(x'') & \xrightarrow{\Phi^*} & \left| \det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] \right| \delta(u'') = \det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] \delta(u''). \end{array}$$

$\det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] < 0$ ならば $\mathcal{O}_{N/M}$ の生成元 $\mathbb{1}_{N/M}$ の符号が変わるので

$$\begin{array}{ccc} \delta(z'') & \xrightarrow{-\Phi_Y^* \otimes \mathbb{1}_{N/M}} & -\det \left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z', 0) \right] \delta(w'') \\ \downarrow b_{\mathbb{R}} & & \downarrow b_{\mathbb{R}} \\ \delta(x'') & \xrightarrow{\Phi^*} & \left| \det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] \right| \delta(u'') = -\det \left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x', 0) \right] \delta(u''). \end{array}$$

3.23. 注意. 本稿では [8] の構成に示唆され、最初に $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ を定め、それから $\mathcal{O}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ を定義したが、最初に $\mathcal{O}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ を (形式) 表象を用いて定義し、(3.3) で $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ を定めるという、本来の佐藤、河合、柏原 [7] の順番で理論を組み立てる事も可能である。その場合、例えば $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ の積は次の様に解釈出来る。
 $:P(t; z, \zeta):, :Q(t; z, \zeta): \in \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ に対して、定理 3.11 からテンサー積 $:Q(t; z_1, \zeta_1): \otimes :P(t; z_2, \zeta_2): \in \mathcal{O}_{X \times X|X \times X \times X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}} \Omega_{X \times X}$ が定まる。次に

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X \simeq \{(z_1, z_2, z_2, z_4)\} & \hookrightarrow & X \times X \times X \times X = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \simeq \{(z_1, z_1, z_1, z_1)\} & \hookrightarrow & X \times X \simeq \{(z_1, z_1, z_2, z_2)\} \end{array}$$

を考えると、制限

$$\begin{aligned} :e^{-t(\partial_w, \partial_\eta)}(Q(t; z, \zeta + \eta) P(t; z - w, \zeta))|_{w=0}: &= :e^{t(\partial_w, \partial_\eta)}(P(t; z, \zeta + \eta) Q(t; w, \zeta))|_{w=z}: \\ &\in \mathcal{O}_{X|X \times X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}} \Omega_{X \times X} \end{aligned}$$

が定まる。最後に

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X = \{(z_1, z_2, z_3)\} & \rightarrow & X \times X \simeq \{(z_1, 0, z_3)\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \simeq \{(z_1, z_1, z_1)\} & \xlongequal{\quad} & X \simeq \{(z_1, 0, z_1)\} \end{array}$$

を考えると、積分に依って

$$:e^{t(\partial_w, \partial_\eta)}(P(t; z, \zeta + \eta) Q(t; w, \zeta))|_{\substack{w=z \\ \eta=0}}: = :Q(t; z, \zeta) \circ P(t; z, \zeta): \in \mathcal{O}_{X|X \times X}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X = \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$$

が定まる。

参考文献

- [1] Aoki, T., Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo 1982 (Okamoto, K., ed.), *Adv. Stud. Pure Math.* **4**, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1984, pp. 181–208.
- [2] 青木貴史, 片岡清臣, 山崎晋, 超関数・FBI変換・無限階擬微分作用素, 共立出版, 2004.
- [3] Kamimoto, S. and Kataoka, K., On the composition of kernel functions of pseudo-differential operators $\mathcal{S}^R$ and the compatibility with Leibniz rule, in preparation.
- [4] Kashiwara, M. and Kawai, T., Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 359–404.
- [5] ———, On holonomic systems of microdifferential equations. III. Systems with regular singularities, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **17** (1981), 813–979.
- [6] Kashiwara, M. and Schapira, P., Sheaves on Manifolds, *Grundlehren Math. Wiss.* **292**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1990.
- [7] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Proceedings Katata 1971 (Komatsu, H., ed.), *Lecture Notes in Math.* **287**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1973, pp. 265–529.
- [8] Schapira, P., Microdifferential Systems in the Complex Domain, *Grundlehren Math. Wiss.* **269**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1985.