

射影群 PE_7 の K 群について

奈良教大 南 春男 (Haruo Minami)

1. 本稿ではコンパクト単連結例外リー群 E_7 の射影群 $PE_7 = E_7/Z(E_7)$ の K 群と KO 群の求め方について述べる. ここで, $Z(E_7)$ は E_7 の中心を表し, $Z(E_7) \cong Z_2$ である.

一般のコンパクト単連結リー群 G についてはつぎのような結果が知られている. $K^*(G)$ の環構造が *Hodgkin* [4] によって, また, $KO^*(G)$ の群構造が *Seymour* [7] によって決定されている. 射影群 PG については $Z(G) \cong Z_p$, (p 素数), のとき $K^*(PG)$ の環構造が *Hodgkin* [4] と *Held-Suter* [3] によって独立に決定されている. したがって, $K^*(PE_7)$ については既に分かっているわけであるが, ここでは [4] 及び [3] とは異なる方法でこれを決定し, 同様の方針で $KO^*(PE_7)$ を求めようとする. その際 $K^*(PE_7)$ の結果と途中結果の一部が必要である. さらに, その積構造を調べるため $KO^{-i}(X)$, (i 奇数), の元 x についてのつぎの平方公式を用いる:

$$x^2 = \eta_1 \lambda^2 x \quad (i \equiv 1 \pmod{8}), \quad 0 \quad (i \equiv 3 \pmod{4}) \quad \text{または} \quad \eta_1^2 \lambda_C^2 x \quad (i \equiv 5 \pmod{8})$$

([2], [5]). ここで, η_1 は $KO^{-1}(+) \cong Z_2$, ($+ = a \text{ point}$), の生成元を表し, $\lambda_C^2 x$ はつぎに述べる元を表す. $KO^{-5}(X) \cong KSp^{-1}(x)$ であるから x を $KSp^{-1}(x)$ の元とみなし, 複素数体上で外積 $x \wedge_C x$ をとるとこれは $KR^{-1}(x)$ ($\cong KO^{-1}(x)$) の元を定義することが分かる. これを $\lambda_C^2 x$ とかく. 上に述べたように KO 群については多少煩雑になるが K 群と同様の方法で求めることが出来るので, 以下では $K^*(PE_7)$ の求め方について紹介し,

$KO^*(PE_7)$ については結果のみを述べる (詳細は [6]).

2. この節では KO と K 群の決定に必要な基本的な事柄を準備する. 先ず E_7 の基本表現について述べる. E_7 の各単純ルートに対応してつぎのような既約複素表現 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_7$ が存在することが知られている [8]. ρ_1, ρ_3, ρ_7 は四元数表現の制限で $Z(E_7)$ 上で自明でない. 他のは実表現の複素化で $Z(E_7)$ 上で自明である. また, それらの複素数体上の次元はつぎの通りである:

$$\rho_1: 8 \cdot 7, \rho_2: 8 \cdot 3458, \rho_7: 8 \cdot 114; \quad \rho_3: 1539, \rho_4: 365750, \rho_5: 8645, \rho_6: 133$$

$R^p \times R^q$ 上に対合写像 $(u, v) \mapsto (-u, v)$ を与え, このような Z_2 作用をもったこの空間を $R^{p,q}$ で表す. また原点を中心とする $R^{p,q}$ における単位球, 単位球面をそれぞれ $B^{p,q}, S^{p,q}$ で表し, $\Sigma^{p,q} = B^{p,q}/S^{p,q}$ とおく. このときこれらはいずれも Z_2 空間となる. とくに最後のものは, つぶれた $S^{p,q}$ を基点としてもつものとする. ここで $G = Z_2$ とおくと, E_7 も部分群としての $Z(E_7)$ の作用で G 空間とみなすことが出来る.

補題 1. E_7 の部分群 S^3 で $Z(E_7)$ を含むものが存在する. つまり $S^{4,0} = S^3$ から E_7 への G 写像 $i: S^{4,0} \rightarrow E_7$ で準同型写像であるものが存在する.

証明. EVI 型の対称空間を考えると, E_7 は部分群 $K = (Spin(12) \times S^3)/C$ を含むことが分かる. ここで C の作用は対角作用で, $C = \{(g, -1) : 1 \neq g \in Z(Spin(12)), -1 \in Z(S^3)\}$. Clifford 加群の生成元を $e_1, e_2, \dots, e_{12}$ とすると $Z(Spin(12)) = Z_2 \cdot (-1) \oplus Z_2 \cdot (e_1 e_2 \cdots e_{12})$. また $Z(K) = Z(Spin(12))$ で $Z(E_7) (\cong Z_2)$ は $Z(K)$ に含まれるか

ら, $Z(E_7)$ の生成元は $-1, e_1 e_2 \cdots e_{12}, -e_1 e_2 \cdots e_{12}$ のいずれかであることが分かる. ところで E_7 は部分群として $Spin(12)$ を含み, $Spin(12)$ は $Spin(4) \cdot Spin(4) \cdot Spin(4)$ を含む. そこでこれの対角部分群としての $Spin(4)$ を考えると $Spin(4) \cong S^3 \times S^3$ であるから, $Z(E_7)$ の生成元が上に述べたどれであるかに応じて求める部分群 S^3 として対角部分群 $\Delta(S^3 \times S^3)$, $S^3 \times 1$ あるいは $1 \times S^3$ のどれかを選べばよいことが分かる.

註) この ι は $S^{5,0}$ 上の G 写像に拡張されない.

$S^{n+1,0}/G = P^n$, n 次元実射影空間, であるから, 対応 $(x, g) \mapsto ([x], \iota(x)g)$ は同相

$$(1) \quad (S^{4,0} \times E_7)/G \approx P^3 \times E_7$$

を導く. ここで $[x]$ は x の同値類を表す. $S^{4,0}$ の元を $(x_1, \dots, x_4, 0, \dots, 0)$ とかき, $S^{4,0}$ を $S^{8,0}$ の部分空間とみなす. このとき対応 $(x_1, \dots, x_8) \mapsto ((x_1, \dots, x_4), (x_5/\lambda, \dots, x_8/\lambda))$, $(\lambda^2 = x_5^2 + \dots + x_8^2, \lambda > 0)$, で G 同相

$$(2) \quad S^{8,0}/S^{4,0} \approx_G \Sigma^{4,0} \wedge S_+^{4,0}$$

をえる.

3. 空間の対 $(S^{8,0} \times E_7, S^{4,0} \times E_7)$ に対して K_G を適用すると, (2) より $S^{8,0} \times E_7/S^{4,0} \times E_7 \approx_G \Sigma^{4,0} \wedge (S^{4,0} \times E_7)_+$ であるから, 完全系列

$$\rightarrow K_G^*(S^{4,0} \times E_7) \xrightarrow{\delta} \widetilde{K}_G^*(\Sigma^{4,0} \wedge (S^{4,0} \times E_7)_+) \xrightarrow{j} K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \xrightarrow{i} K_G^*(S^{4,0} \times E_7) \rightarrow$$

をえる. ここで $i: S^{4,0} \times E_7 \rightarrow S^{8,0} \times E_7$ は包含写像を, j は射影 $S^{8,0} \times E_7 \rightarrow S^{8,0} \times E_7/S^{4,0} \times E_7$ と上の G 同相の合成を表す. ところで $K_G^*(S^{4,0} \times E_7) \cong K^*((S^{4,0} \times E_7)/G)$

であるから (1) を用いると $K_G^*(S^{4,0} \times E_7) \cong K^*(P^3 \times E_7)$ をえる. また *Thom* 同型定理から $\widetilde{K}_G^*(\Sigma^{4,0} \wedge (S^{4,0} \times E_7)_+) \cong K_G^*(S^{4,0} \times E_7)$ であるから, これも $K^*(P^3 \times E_7)$ に同型であることが分かる. したがって完全系列

$$(3) \quad \rightarrow K^*(P^3 \times E_7) \xrightarrow{\delta} K^*(P^3 \times E_7) \xrightarrow{J} K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \xrightarrow{I} K^*(P^3 \times E_7) \rightarrow$$

をえる. さらに空間対に対する積に関して

$$\delta(xI(y)) = \delta(x)y$$

が成り立つ. 写像 $f: X \rightarrow GL(n, C)$ が与えられたとき, f と $GL(n, C)$ の $GL(\infty, C)$ への包含写像との合成のホモトピー類 $\beta(f)$ は $K^{-1}(X)$ の元を定義する. このとき, つぎのことが知られている [4]:

$$K^*(E_7) = \bigwedge (\beta(\rho_1), \dots, \beta(\rho_7))$$

したがって $K^*(E_7)$ は自由加群であるから, $K^*(P^3 \times E_7) \cong K^*(P^3) \otimes K^*(E_7)$ が成り立つ. 以下でこれらを同一視する. また,

$$\widetilde{K}(P^3) = \mathbb{Z} \cdot \gamma_3, \quad K^{-1}(P^3) = \mathbb{Z} \cdot \nu_3$$

で関係式 $\gamma_3^2 + 2\gamma_3 = 0$, $\gamma_3\nu_3 = 0$, $\nu_3^2 = 0$ が成り立つ [1]. ここで γ_3 は 1 次元複素ベクトルバンドル $(S^{4,0} \times C^{1,0})/G \rightarrow P^3$ の簡約ベクトルバンドルを表す. $C^{1,0}$ は $R^{1,0}$ の複素化である. 一般的に $Spin(n)$ は, その元 (-1) が線形的かつ自由に作用する球面 S^{n-1} を含むことが知られている. つまり $S^{n,0}$ を含む. そこで $Spin(4)$ の半スピン表現 $\Delta_4^+: Spin(4) \rightarrow GL(2, C)$ の $S^{4,0}$ 上への制限を考えると, これは $f([x]) = \Delta_4^+(x)^2$ で写像 $f: P^3 \rightarrow GL(2, C)$ を定義する. このとき, $\nu_3 = \beta(f)$.

これらの情報の下に (3) を用いて $K_G^*(S^{8,0} \times E_7)$ を決定する. そのため, 先ずこの群の

生成元の候補を挙げる.

ρ_i , ($i = 2, 4, 5, 6$), は $Z(E_7)$ 上で自明であるので PE_7 の表現とみなすことが出来る. そこで $\beta(\rho_i)$ を $K^{-1}(PE_7) = K_G^{-1}(E_7)$ の元と考える. また, $K^*(P^7) = K_G^*(S^{8,0})$ は P^3 と同様の構造

$$\widetilde{K}(P^7) = Z_8 \cdot \gamma_8, K^{-1}(P^7) = Z \cdot \nu_8; \gamma_7^2 + 2\gamma_7 = 0, \gamma_7\nu_7 = 0$$

をもつことが知られている [1]. 2つの射影 $S^{8,0} \times E_7 \rightarrow S^{8,0}$, $S^{8,0} \times E_7 \rightarrow E_7$ でこれらの元 γ_7 , ν_7 , $\beta(\rho_i)$ を引き戻してえられる $K_G^*(S^{8,0} \times E_7)$ の元をそれぞれ ξ , ν , $\beta(\rho_i)$ で表す. つぎに ρ_j , ($j = 1, 3, 7$), を用いて $K_G^{-1}(S^{8,0} \times E_7)$ の元 β_j を構成する. $S^{8,0}$ を上に述べた $Spin(8)$ の球面と考える. また ρ_j の次元を $8\ell_j$ とかくとき, $Spin(8)$ の半スピン表現 Δ_8^+ が 8 次元であることから写像 $f_j: S^{8,0} \times E_7 \rightarrow GL(8\ell_j, C)$ を $f_j(x, g) = (\Delta_8^+(x) \otimes I_{\ell_j})\rho_j(g)$ で定義することが出来る. これは $f_j(-x, -g) = f_j(x, g)$ をみたすので $K_G^{-1}(S^{8,0} \times E_7)$ の元を与えることが分かる. これを β_j とかく. このときつぎの結果をえる.

補題 2.

$$K_G^*(S^{8,0} \times E_7) = \bigwedge(\nu, \beta(\rho_i), \beta_j \mid i = 2, 4, 5, 6; j = 1, 3, 7) \otimes (Z \cdot 1 \oplus Z_8 \cdot \xi) / I$$

ここで, $I = (\xi^2 + 2\xi, \xi\nu)$.

略証. 系列 (3) の写像 δ , I , J を対応する群の生成元および生成元の候補の上で決定すれば (3) の完全性から結論が導かれる. 定義を考察することから先づつぎの基本的な等式をえる:

$$\delta(\nu_3 \times 1) = (\gamma_3 + 2) \times 1,$$

$$I(\xi) = \gamma_3 \times 1, \text{ したがって } \delta(\gamma_3 \times 1) = 0,$$

$$I(\beta(\rho_i)) = 1 \times \beta(\rho_i), \text{ したがって } \delta(1 \times \beta(\rho_i)) = 0, (i = 2, 4, 5, 6).$$

さらに, $\rho_j, (j = 1, 3, 7)$, の次元を $8\ell_j$ とおくと,

$$\beta(\rho_j) = (2k_j + 4\ell_j)\mu^2$$

とかくことが出来る. ここで, $K^{-1}(S^3) = \mathbb{Z} \cdot \mu^2$, (μ は *Bott* 類). この k_j を用いて

$$I(\beta_j) = 1 \times \beta(\rho_j) - (k_j + 2\ell_j)\nu_3 \times 1, (j = 1, 3, 7), \text{ したがって}$$

$$\delta(1 \times \beta(\rho_j)) = (k_j\gamma_3 + 2k_j + 4\ell_j) \times 1.$$

これらの式から (3) の下に述べた等式 $\delta(xI(y)) = \delta(x)y$ を用いることによって δ が完全に決定され, それから $\text{Ker}\delta$ と $\text{Coker}\delta$ を求めることが出来る. つぎに J について同様の議論を行う. 定義の考察から

$$J(\nu_3 \times 1) = \nu$$

をえる. また定義と上の等式より J を $\text{Coker}\delta$ 上で決定することが出来, これらの結果から補題が導かれる.

4. つぎに空間対 $(B^{8,0} \times E_7, S^{8,0} \times E_7)$ に対する同変 K 群の完全系列

$$\rightarrow K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \rightarrow \widetilde{K}_G^*(\Sigma^{8,0} \wedge E_{7+}) \rightarrow K_G^*(B^{8,0} \times E_7) \rightarrow K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \rightarrow$$

を考える. このとき, $K_G^*(B^{8,0} \times E_7) \cong K^*(PE_7)$, また *Thom* 同型定理を用いると $\widetilde{K}_G^*(\Sigma^{8,0} \wedge E_{7+}) \cong K^*(PE_7)$ であるから, 上の完全系列は

$$\rightarrow K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \xrightarrow{\delta} K^*(PE_7) \xrightarrow{J} K^*(PE_7) \xrightarrow{I} K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \rightarrow$$

とかき直すことが出来る．ところで $\widetilde{K}_G^0(\Sigma^{8,0})$ の *Thom* 類は射影 $B^{8,0} \rightarrow \Sigma^{8,0}$ で $K_G^*(B^{8,0}) = R(G)$ の元 $8(1 - C^{1,0})$ に引き戻されるので， ξ を一次元複素ベクトル・バンドル $(E_7 \times C^{1,0})/G \rightarrow PE_7$ の簡約ベクトル・バンドルとすると，

$$J(1) = -8\xi$$

が成り立つ．ここで表現 ρ_1, ρ_7 の次元をみると $8\xi = 0$ であることが分かる．これは J が零写像であることを示す．そこで上の完全系列は短くなり，

$$(4) \quad 0 \rightarrow K^*(PE_7) \xrightarrow{I} K_G^*(S^{8,0} \times E_7) \xrightarrow{\delta} K^*(PE_7) \rightarrow 0$$

となる．また前と同様の意味で $\delta(xI(y)) = \delta(x)y$ が成り立つ．表現 ρ_j , ($j = 1, 3, 7$)，が定義する $K^{-1}(PE_7)$ の元を考える．対応 $[g] \mapsto \rho_j(g)^2$, ($j = 1, 3, 7$)，の β 構成を $\beta(\rho_j^2)$ とかく．ここで， $[g]$ は E_7 の元 g が与える PE_7 の元を表す． ρ_j の次元をみると対応 $[g] \mapsto (114\rho_1(g))(7\rho_7(g))^{-1}$, $[g] \mapsto (494\rho_1(g))\rho_3(g)^{-1}$, $[g] \mapsto (57\rho_3)(g)(1729\rho_7(g))^{-1}$ が定義されることが分かる．これらの β 構成を $\beta(114\rho_1 - 7\rho_7)$, $\beta(494\rho_1 - \rho_3)$, $\beta(57\rho_3 - 1729\rho_7)$ とかく．このとき，明らかに

$$\beta(57\rho_3 - 1729\rho_7) = 247\beta(114\rho_1 - 7\rho_7) - 57\beta(494\rho_1 - \rho_3)$$

が成り立つ．これらの元について，定義からつぎの等式が成り立つことが分かる．

$$I(\xi) = \xi, \quad I(\beta(\rho_i)) = \beta(\rho_i), \quad (i = 2, 4, 5, 6),$$

$$I(\beta(114\rho_1 - 7\rho_7)) = (\xi + 1)(114\beta_1 - 7\beta_7),$$

$$I(\beta(494\rho_1 - \rho_3)) = (\xi + 1)(494\beta_1 - \beta_3),$$

$$I(\beta(\rho_j^2)) = (\xi + 1)\beta_j - \ell_j\nu, \quad (j = 1, 3, 7).$$

さらに、

$$\delta(\beta_j) = \ell_j(\xi + 1), \quad (j = 1, 3, 7), \quad \delta(\nu) = \xi + 2.$$

この 2 式から

$$\delta((\xi + 1)(49\beta_1 - 3\beta_7) - \nu) = 0$$

をえる。そこで (4) の完全性から

$$I(\tau) = (\xi + 2)(49\beta_1 - 3\beta_7) - \nu$$

をみたす $K^{-1}(PE_7)$ の元 τ が存在することが分かる。これは $I(\xi\tau) = 0$ をみたす。また、

I は単射であるから

$$\xi\tau = 0$$

が成り立つ。

定理 3.

$$K^*(PE_7) = \bigwedge(\beta(\rho_i), \beta(114\rho_1 - 7\rho_7), \beta(494\rho_1 - \rho_3), \tau \mid i = 2, 4, 5, 6) \otimes (Z \cdot 1 \oplus Z \cdot \xi) / I$$

ここで、 $I = (\xi^2 + 2\xi, \xi\tau)$.

証明. 補題 2 と上に述べたことから等式の右辺が $K^*(PE_7)$ の部分環であることが分かる。つぎの等式と上に述べた情報および関係式 $\delta(xI(y)) = \delta(x)y$ を用いて、 δ の像を求めると、 δ が全射であることから両辺の環が等しいことが分かる：

$$\beta(\rho_1^2) = 7\tau - 3(\xi + 2)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7),$$

$$\beta(\rho_7^2) = 114\tau - 49(\xi + 2)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7),$$

$$\beta(\rho_3^2) = 3458\tau - 1482(\xi + 2)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7) - (\xi + 2)\beta(494\rho_1 - \rho_3),$$

$$\delta(\beta_1\beta_3) = -7(\xi + 1)\beta(494\rho_1 - \rho_3),$$

$$\delta(\beta_1\beta_7) = -(\xi + 1)\beta(114\rho_1 - 7\rho_7),$$

$$\delta(\beta_3\beta_7) = -2(\xi + 1)\beta(57\rho_3 - 1729\rho_7), \dots,$$

$$\delta(\nu\beta_j) = \beta(\rho_j^2), (j = 1, 3, 7), \dots$$

5. 最後に $KO^*(PE_7)$ について結果を述べておく.

定理 4. $KO^*(PE_7) = \Lambda_{KO^*(+)}(\beta(\rho_i), \bar{\beta}(114\rho_1 - 7\rho_7), \bar{\beta}(494\rho_1 - \rho_3), \bar{\beta}(\rho_1^2))$

$$\otimes (Z \cdot 1 \oplus Z_{16} \cdot \xi \oplus Z_2 \cdot \alpha \oplus Z_2 \cdot \beta) / I$$

ここで, $\bar{\beta}(\)$ は (-5) 次元, α, β は (-6) 次元の元である. また, I はつぎの元で生成されるイデアルを表す:

$$\xi^2 + 2\xi, 4\eta_4\xi, \beta - \xi\alpha, \alpha^2, \eta_4\alpha, \eta_1^2\alpha, \alpha\bar{\beta}(\rho_1^2) - \eta_1^2\xi\beta(\rho_2), \bar{\beta}(\rho_1^2)^2 - \xi\bar{\beta}(\rho_1^2),$$

$$\beta(\rho_i)^2 - \eta_1(\beta(\lambda^2\rho_i) + d_i\beta(\rho_i)), (d_i = \dim\rho_i, i = 2, 4, 5, 6), \bar{\beta}(114\rho_1 - 7\rho_7)^2 - \eta_1\beta(\lambda_C^2\rho_3),$$

(η_4 は $KO^{-4}(+)$ の生成元).

註) 定理において $\beta(\lambda^2\rho_i)$, $\beta(\lambda_C^2\rho_3)$, $\beta(\lambda_C^2\rho_7)$ の具体的な表現は与えられていないが, $\lambda^2\rho_i$, $\lambda_C^2\rho_3$, $\lambda_C^2\rho_7$ は PE_7 の実表現として $\rho_j \otimes_C \rho_k$, ($j, k = 1, 3, 7$), と ρ_i , ($i =$

2, 4, 5, 6), の多項式として記述出来るので, この具体的な形が分かれば,

$$\beta(\rho_j \otimes_C \rho_k) = \eta_k(a_j \bar{\beta}(\rho_j^2) + \bar{\beta}(a_j \rho_k - a_k \rho_j)),$$

$(a_j = \dim_{\mathbf{H}} \rho_j)$, であることを用いてこれらを求めることが出来る.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah : *K - theory*, Benjamin Inc., 1967.
- [2] M. C. Crabb : *$\mathbf{Z}_2$ - homotopy theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series 44 (1980).
- [3] R. P. Held und U. Suter : *On the unitary K - theory of compact Lie groups with finite fundamental group*, Quart. J. Math. Oxford 24 (1973), 343 - 356.
- [4] L. Hodgkin : *On the K - theory of Lie groups*, Topology 6 (1967), 1 - 36.
- [5] H. Minami : *The real K - groups of $SO(n)$ for $n \equiv 3, 4$ and $5 \pmod{8}$* , Osaka J. Math. 25(1988), 185 - 211.
- [6] H. Minami : *On the K - theory of PE_7* , to appear in Osaka J. Math..
- [7] R. M. Seymour : *The Real K - theory of Lie groups and homogeneous spaces*, Quart. J. Math. Oxford 24 (1973), 7 - 30.
- [8] J. Tits : *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, Springer Lecture Notes in Math. 40 (1967).