

Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles

福島 竜輝¹
京都大学数理解析研究所

Jian Ding (University of Pennsylvania), Rongfeng Sun (National University of Singapore), Changji Xu (University of Chicago) との共同研究

1 導入

格子 $\mathbb{Z}^d$ 上に Bernoulli 分布する障害物を避けながらランダムウォークする粒子を考える. 粒子と媒質の両方について平均をとると (annealed という²) 粒子は出発点を含む球状の領域に局在することが知られている. 本研究ではこの粒子の軌跡が局在している球を埋め尽くすことを示し, さらに軌跡の境界の大きさに関する評価を得たので報告する.

$(\omega, \mathbb{P})$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の独立同分布 Bernoulli($1-p$) 確率変数, $(\{S_n\}_{n \geq 0}, P_0)$ を原点を出発点とする d 次元ランダムウォークとする. $\omega = (\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ に対して *obstacles* を $\mathcal{O}(\omega) := \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega_x = 1\}$ で定め, ランダムウォークの到達時刻を $\tau_{\mathcal{O}}$ と書くことにする. 粒子の挙動を記述するのは条件付き確率

$$\mu_N(\cdot) := \mathbb{P} \otimes P_0(\cdot \mid \tau_{\mathcal{O}(\omega)} > N)$$

であり, *annealed path measure* と呼ばれる. 本稿ではとくにランダムウォークの軌跡

$$S_{[0, N]} := \{S_i : 0 \leq i \leq N\}$$

の $\mu_N = \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\cdot \mid \tau_{\mathcal{O}} > N)$ のもとでの挙動を論じる.

Remark. 軌跡は μ_N に関して “自然” な対象である. 実際,

$$\mathbb{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \mathbb{P}(S_{[0, N]} \cap \mathcal{O} = \emptyset) = p^{|S_{[0, N]}|},$$

に注意すると $\mathcal{O}$ に関する平均を先にとることができて, ランダムウォークの周辺分布は

$$\mu_N(S \in \cdot) = \frac{\mathbf{E}[p^{|S_{[0, N]}|} : S \in \cdot]}{\mathbf{E}[p^{|S_{[0, N]}|}]}$$

となる. これは *self-attractive polymer* のモデルと見なせる.

¹E-mail: ryoki@kurims.kyoto-u.ac.jp

²これに対して媒質は固定した場合を *quenched* という.

2 先行研究と主結果

以下 $d \geq 2$ とする. まず分配関数の漸近挙動に関する古典的な結果を述べる:

Theorem 1 (Donsker–Varadhan (1979)). $d \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) &= \exp \left\{ -c(d, p) N^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\}, \\ \text{ただし } c(d, p) &= \inf_U \{ |U| \log(1/p) + \lambda(U) \},\end{aligned}$$

ここで $\lambda(U)$ は $-\frac{1}{2d}\Delta$ の U における Dirichlet 最小固有値.

Remark. Faber–Krahn の不等式により上の下限はある $B(0; \varrho_1)$ で達成される.

この証明は以下のように進められる:

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) &= \sum_U \mathbb{P}(\mathcal{O} \cap U = \emptyset) \mathbf{P}(S_{[0, N]} = U) \\ &\approx \max_U p^{|U|} \exp \{ -N \lambda(U) \} \\ &= \exp \left\{ -N^{\frac{d}{d+2}} \inf_U \{ |U| \log(1/p) + \lambda(U) \} \right\}.\end{aligned}$$

二行目の $\approx$ は本質的に Laplace 原理であり, これを Donsker–Varadhan (1979) は大偏差原理を用いて証明した. この議論は「半径 $\varrho_N = \varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}$ の球に時刻 N まで留まる」という最適戦略が生存確率のほとんどを担っていることを示唆している.

これが冒頭に述べた局在現象であり, 以下のように条件付き確率の下での主張として厳密に示されている.

Theorem 2 (Confinement property: Sznitman [5], Bolthausen [2], Povel [4]). 任意の $d \geq 2$, $p \in (0, 1)$ に対して $x_N(\omega) \in \mathbb{Z}^d$ が存在して, 任意の $\epsilon > 0$ に対して次が成り立つ:

$$\mu_N(S_{[0, N]} \subset B(x_N; (1 + \epsilon)\varrho_N)) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty. \quad (\text{confinement})$$

2次元に限ってはさらに詳しいことが知られていた:

Proposition 3 (Ball clearing: Sznitman [5]). 任意の $d = 2$ と $\epsilon \in (0, 1)$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1 - \epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1.$$

Proposition 4 (Ball covering: Bolthausen [2]). 任意の $d = 2$ と $\epsilon \in (0, 1)$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(B(x_N; (1 - \epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0, N]}) = 1.$$

Bolthausen はこの結果を confinement property の証明において本質的に使い, $d \geq 3$ でも同じことが成り立つことを予想として残した. 今回報告する一つ目の結果はこの予想が正しいことを示すものである.

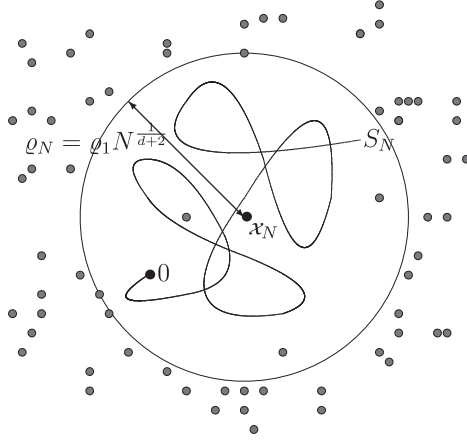


Figure 1: Confinement property の描像. この図はやや不正確であり, 実際には球の内部のほとんどの点は $N/N^{d/(d+2)} = N^{2/(d+2)}$ 回くらい訪問されている.

Theorem 5 (Ball covering: Ding, Fukushima, Sun, Xu [3]). 任意の $d \geq 2$ と $\epsilon \in (0, 1)$ について, *confinement property* と同じ x_N に対して,

$$\mu_N \left(S_{[0, N]} \supset B(x_N; (\varrho_1 - \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}}) \right) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty. \quad (\text{covering})$$

Remark. この定理に関しては最近 Berestycki–Cerf [1] が同じ結果を発表した. ただしそこでの問題の定式化は上記の polymer model の解釈によるもので, 従って証明の方法も異なっている. 例えば我々の議論は (confinement) を (おそらく必要ないものの現時点では) 仮定しているが, 彼らは (covering) を独立に示す. 実は Bolthausen の論文 [2] は, (covering) から (confinement) を導く構成になっており, [1] はその方針を $d \geq 3$ でも完遂しようとしている.

上の (confinement) と (covering) によりランダムウォークの軌跡は漸近的に (中身の詰まった) 球であることが分かる. 二つ目の結果は軌跡の表面積が $\log N$ の冪の因子を除いて $B(x_N; \varrho_N)$ の表面積と一致することを示すものである.

Theorem 6 (Boundary size: Ding, Fukushima, Sun, Xu [3]). 任意の $d \geq 2$ について, ある $a > 0$ が存在して

$$\mu_N \left(|\partial S_{[0, N]}| \leq N^{\frac{d-1}{d+2}} (\log N)^a \right) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

界面の揺らぎの問題として見るならば, 表面積より $\partial S_{[0, N]}$ と $\partial B(x_N, \varrho_N)$ の Hausdorff 距離などを考察する方が自然であるが, それはずっと難しい問題のように思われる.

本稿の残りの節では上の二つの定理の証明のアイデアを説明する. このモデルの研究は 1990 年代に Sznitman が「障害物の拡大」と呼ばれる多重スケール解析によってランダム作用素の固有値を評価する方法でかなり進展させた. この方法は実際の適用に際して確率論的な考察を伴うことが多いものの, 原理的には解析的なものである. 一方で今回の結果を導くために用いた手法はその本質において組合せ論的であり, この種の問題の研究としては目新しいところがあると思われる.

3 Ball Covering の証明のアイデア

主結果の証明には異なる事象の確率を比較する議論を頻繁に使う。以下の lemma は単純だが分かりやすい例である。

Lemma 1 (Clearing implies covering). $\mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1 - o(\varrho_N^{-d})$ を仮定すると, $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}) = 1$ が従う。

Proof. $\mu_N(\exists x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]}) \geq c > 0$ を仮定する。このときある x に対して

$$\mu_N(x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]}) \geq c\varrho_N^{-d}.$$

しかしランダムウォークが x を通らないならばそこには障害物があってもなくても良いことに注意すると、この左辺は

$$\frac{1}{1-p} \mu_N(x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]} \text{ and } x \in \mathcal{O})$$

で押さえられるので矛盾。 □

Remark. 実はこれは厳密には証明になっていない。その理由と修正の方法を考えることは読者への演習問題とする。

この lemma により問題は本質的に clearing, つまり

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1$$

示すことに帰着される。

そこで $x \in \mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N)$ を仮定する。以下の二つの状況に分けて考える：

1. $B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ で $\mathcal{O}$ は高密度,
2. $B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ で $\mathcal{O}$ は低密度.

この1の場合はランダムウォークの生存確率を大きく下げするため、起きないことが容易にわかる。一方2はより難しく、さらに二通りに分ける。

2.1 ランダムウォークは x の近傍に頻繁に戻ってくる。

2.2 ランダムウォークは x の近傍にはあまり戻ってこない。

この2.1, 2.2をそれぞれ他の事象との比較によって処理する。

Case 2.1: $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は低密度であり、ランダムウォークは x の近傍に頻繁に戻ってくる。

- このとき $B(x; \epsilon \varrho_N/2)$ にある obstacle をすべて除去する. この操作は $\mathbb{P}$ -probability を小さくするが (cost), $\mathbb{P}$ -probability を大きくする (gain). 結果的には gain が cost よりはるかに大きいことが分かり,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\text{Case 2.1}) \ll \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N, \mathcal{O} \cap B(x; \epsilon \varrho_N/2) = \emptyset),$$

よってとくに $\mu_N(\text{Case 2.1}) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) が従う.

ただし技術的にはここには一つの困難がある. それは cost は $|\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon \varrho_N/2)|$ に比例して増大するが, gain は $|\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon \varrho_N/2)|$ に比例して増大しないことである. 実際 $\mathcal{O}$ が x の近傍でクラスターをなしているとき, ランダムウォークの生存確率に影響するのはその境界にある obstacle だけである. クラスターから互いに離れた点をできるだけたくさん抜き出して, それだけを使って生存確率への影響を評価することが必要になる. $B(x; \epsilon \varrho_N/2)$ で $\mathcal{O}$ が低密度であることが cost を抑え, ランダムウォークが頻繁に戻ってくることが点の数を減らしても gain を確保することに役立つのであるが, 詳細はそれなりに delicate である.

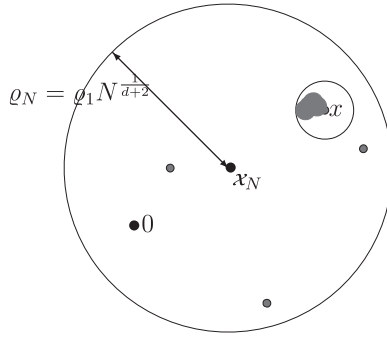


Figure 2: $\mathcal{O}$ が x の近傍でクラスターをなしているとき, ランダムウォークの生存確率に影響するのはその境界にある obstacle だけである. 実際にはその影響は表面積ではなくより小さな Newton capacity に依存することも知られている.

Case 2.2: $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon \varrho_N/2)$ は低密度であり, ランダムウォークは x の近傍には稀にしか戻ってこない.

- このときまず $B(x; \epsilon \varrho_N/2) \setminus B(x; \epsilon \varrho_N/4)$ にある obstacle をすべて除去し, ランダムウォークは $B(x; \epsilon \varrho_N/4)$ を避けるようにする. それから $B(x; \epsilon \varrho_N/4)$ の中の obstacle の配置を自由に変える. この操作は $\mathbf{P}$ -probability を小さくするが (cost), $\mathbb{P}$ -probability を大きくする (gain).

結果的には gain が cost よりはるかに大きいことがわかり,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\text{Case 2.2}) \ll \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O} \cup B(x; \epsilon \varrho_N/4)} > N, \mathcal{O} \cap B(x; \epsilon \varrho_N/4) \text{ is typical}),$$

よってとくに $\mu_N(\text{Case 2.2}) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) が従う.

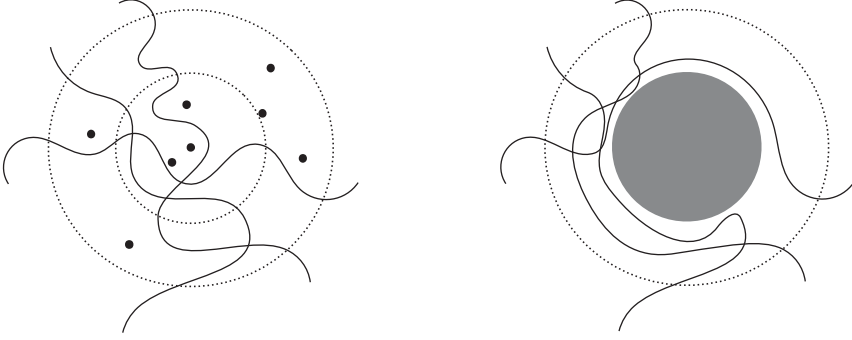


Figure 3: Case 2.2 の“操作”を行う前（左）と後（右）の描像. 円環領域の obstacles を除去するのもランダムウォークの路を変形するのも cost がかかるが, どちらも数が少ないので大きくはない. 一方で中心付近を典型的な配置にすると (元が「低密度=大偏差」だったから) 非常に大きな gain を得る.

Remark. Case 2.2 の議論は非常に無駄が多いように見える. 実際最後の式の右辺の確率は Case 1 にあたるので, それ自身が $o(\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N))$ であることを既に知っている. しかし本稿で多用している比較に基づく議論では, うまく比べる相手を設定することが重要であり, このようにやや直観に反するような状況に遭遇することも少なくない.

4 Boundary size の証明のアイデア

この結果の証明でも基本的なアイデアは前節とよく似ているが, 技術的にはかなり複雑になるので簡単な概略だけ説明する. とくに少し弱い主張 $\mu_N(|\partial\mathcal{T}| \leq \varrho_N^{d-1+o(1)}) \rightarrow 1 \ (N \rightarrow \infty)$ に限って述べる.

もっとも重要なアイデアはランダムウォークの軌跡 $S_{[0,N]}$ を, $\mathcal{O}$ から定まる “truly”-open sites $\mathcal{T}$ で近似することである. これは前節のように“操作”に基づいた確率の比較の議論をする際に, ランダムウォークの路を変形するより障害物の配置を変える方が容易いという事情による.

Definition 1 (“Truly”-open sites). $x \in \mathbb{Z}^d$ は以下を満たすとき “truly”-open という:

$$\mathbf{P}_x(\tau_{\mathcal{O}} > (\log N)^5) \geq \exp\{-(\log N)^2\}.$$

また $\mathcal{T}$ を $B(x_N; \varrho_N + \varrho_N^{\frac{1}{d}})$ 内の “truly”-open site の原点を含む連結成分とする.

Remark. “Truly”-open site は稀にある安全な場所である. 典型的な点に対しては上の生存確率は $\exp\{-(\log N)^{5+o(1)}\}$ である. また x が “truly”-open かどうかは $B(x; (\log N)^5)$ 内の局所的な情報で決まる.

次の lemma が $\partial S_{[0,N]}$ を “truly”-open site の境界 $\partial\mathcal{T}$ で近似できることを保証する.

Lemma 2. 次が成立する：

$$\mu_N(S_{[0,N]} \subset \mathcal{T}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1, \quad (1)$$

$$\mu_N(S_{[0,N]} \supset \{x \in \mathcal{T} : \text{dist}(x, \partial\mathcal{T}) \geq (\log N)^3\}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1. \quad (2)$$

従ってとくに

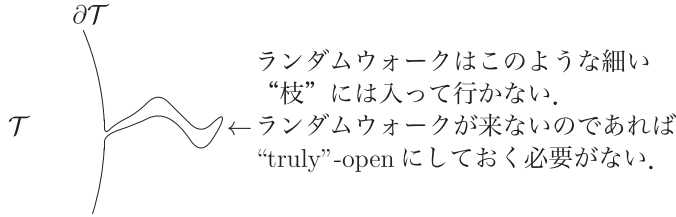
$$\mu_N\left(\partial S_{[0,N]} \subset \bigcup_{x \in \partial\mathcal{T}} B(x; (\log N)^3)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

この内 (1) は non-“truly”-open site を訪問すると生存しにくくなるという事実から自然である．一方 (2) は本質的に ball covering に類似の証明を $(\log N)^3$ のスケールで繰り返すことで示される．

あとは $\partial S_{[0,N]}$ の代わりに $\partial\mathcal{T}$ に対して以下を示せばよい：

$$\mu_N(|\partial\mathcal{T}| \leq \varrho_N^{d-1} (\log N)^c) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

直観的には $\partial\mathcal{T}$ は以下の理由により “滑らか” であることが期待される．



この議論は内側向きの枝の存在を排除しないように見えるが，以下ではもっと抽象化した議論を行うので，枝の向きのような概念は現れない．

実際の証明では枝ではなく “bad point” を

$$x \in \partial\mathcal{T} \text{ and } P_0(\tau_{B(x; (\log N)^5)} < \tau_{\mathcal{O}}) < \varrho_N^{1-d-\epsilon}$$

を満たす点 (=ランダムウォークが訪れにくい点) として定義する．このような点 $x \in \partial\mathcal{T}$ が存在したとして，次のような操作を考える．ランダムウォークが bad point の近傍を訪れたら，変形して避けるようにする．その後， x の近傍の障害物の配置を通常のものに変えて $x \notin \partial\mathcal{T}$ にする．前者の変形は $\mathbf{P}$ -probability を小さくするが，もともと訪問しにくい点だったから cost は大きくない．一方で後者は “truly”-open site が稀な点だったから大きな gain を生む．これにより前節と同様の比較の議論で，実は bad point が $(\mu_N$ のもと高確率で) 存在しないことが分かる．つまり

$$\forall x \in \partial\mathcal{T}, P_0(\tau_{B(x; (\log N)^5)} < \tau_{\mathcal{O}}) \geq \varrho_N^{1-d-\epsilon}.$$

一方で $\partial\mathcal{T}$ に到達したランダムウォークは (安全地帯の境界にいるわけだから) 一定の確率で障害物に衝突するという直観にもとづいて

$$\sum_{x \in \partial\mathcal{T}} P_0(\tau_{B(x; (\log N)^5)} < \tau_{\mathcal{O}}) \leq (\log N)^C$$

を示すことができる．これらを組み合わせると $|\partial\mathcal{T}| \leq \varrho_N^{d-1+2\epsilon}$ が従うのである．

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP16K05200 の助成を受けたものである。また共同研究者を通じて NSF grant DMS-1757479, Alfred Sloan fellowship および NUS Tier 1 grant R-146-000-253-114 の助成を受けている。

References

- [1] N. Berestycki and R. Cerf. The random walk penalised by its range in dimensions $d \geq 3$. arXiv:1811.04700.
- [2] E. Bolthausen. Localization of a two-dimensional random walk with an attractive path interaction. *Ann. Probab.* 22, 875–918, 1994.
- [3] J. Ding, R. Fukushima, R. Sun and C. Xu. Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles. arXiv:1806.08319
- [4] T. Povel. Confinement of Brownian motion among Poissonian obstacles in $\mathbb{R}^d, d \geq 3$. *Probab. Theory Related Fields* 114, 177–205, 1999.
- [5] A.-S. Sznitman. On the confinement property of two-dimensional Brownian motion among Poissonian obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 1137–1170, 1991.