

量子古典対応とノイズ -Wigner 関数の負度と古典化-

鎮目浩輔^a, S.Habib^b, H.Mabuchi^c, B.Sundaram^d, R.Ryne^b

a. 図書館情報大学、b. ロスアラモス研究所、c. マサチューセッツ工科大、d. ニューヨーク州立大

概要

Decoherenceにより量子的な dynamics と古典的な dynamics の対応がよくなることが知られているが、その直観的な理由として「Decoherenceにより量子干渉が消され、Wigner 関数が正定値になるため」ということが言われる。この「理由」の成否を調べるため量子と古典で dynamics が大きく異なることで知られる Kicked rotor 系で、弱い noise を加えた場合の Wigner 関数を計算した。その結果、量子と古典で dynamics に違いが残る場合でも Wigner 関数がほとんど正定値になることがあるという結果を得た。これより上記の「理由」は少なくとも Kicked Roter の場合は成り立たないことが分かった。

1 Introduction

量子力学は広く認められた物理法則であるが、もうひとつの広く認められた物理法則である古典力学をそこからどう導出するか、つまり量子古典対応はいまだに大きな問題である。よく知られた Ehrenfest の定理は波束がもつ位置 x の量子力学的期待値 $\langle x \rangle_q$ と Newton 方程式に従う粒子の軌道 x_c を比較し、波束の幅が potential の空間的な変化のスケールに比べて十分小さければ両者はよく合うことを示し、それをもって量子古典対応としている。しかしこれだけでは不十分である [1]。とくにカオス系では波束が指数関数的に速く広がるため Ehrenfest の定理の前提条件はすぐ破れ、 $\langle x \rangle_q$ と x_c はすぐ離れる。しかし古典力学の方でも一粒子の軌道の代わりにたくさんの粒子の分布を考え、それらの ensemble 平均 $\langle x \rangle_c$ を $\langle x \rangle_q$ と比較すれば両者は Ehrenfest の条件が破れたあとでも長い時間近い値をとり続ける場合がある。つまり、量子力学では分布が本質的である以上、古典力学でも一粒子の代わりに粒子の分布の運動を調べ、分布と分布を比較すべきであるといえる。しかしその場合の量子古典対応に関する一般論はまだ不明であり、とくにカオス系の場合についてはさまざまな議論があるのが現状である。いくつかの系では対応の大きな破れはない [1, 2] が、ここで扱う Kicked Rotor (KR) では quantum localization (QL) と呼ばれる効果により大きな破れが生じることが知られている [3]。

一方、量子系を「古典化」する機構として decoherence が精力的に研究されている [4]。decoherence は環境との量子的な entanglement のため量子的な干渉効果が dynamics により消される現象である。特に高温極限と呼ばれる極限では環境の効果は noise による dephasing として記述でき、その場合には初期条件として重ね合わせの状態をとっても、その干渉項は非常に速やかに消されることが知られている。KR を含むいくつかのカオス系においても、decoherence をいれると dynamics 自身の量子古典対応がよくなることが示されている [2, 3]。

ここで興味深い問題は、decoherence をいれるとなぜ dynamics の量子古典対応が良くなるかということである。線形の系でもともとあった重ね合わせが消える機構は Master 方程式の構造からすぐ理解できる。しかし、例えばカオスのような複雑な dynamics を持つ系で時間発展が量子と古典で似てくる理由を方程式の形だけから推測するのは難しい。それで直観的な理由として次のものがしばしば主張される：

「量子と古典で大きな違いは干渉であり、decoherence はその干渉を消す。従って dynamics の対応もよくなる。」

実際、いくつかのカオス系では decoherence が無いときには干渉のため正負いり混じって細かい構造を持っていた Wigner 関数が、decoherence を加えるとその構造を失ってほとんど正定値になり、さらに古典的な分布関数と定量的にもよく合うことが知られている [2]。このことが一般的に成り立つとすれば、

decoherence $\rightarrow$ 干渉が消える $\rightarrow$ Wigner 関数が正定値 $\rightarrow$ 量子古典対応が成立

という猫像が期待される。

そこで、本研究では上述の KR に noise による dephasing を加えながら Wigner 関数を計算し、量子古典対応との関係を調べる。特に Wigner 関数がどのくらい負であるかの目安(「負度」)を導入し、負でなくなることが dynamics の古典化に直接つながるかどうかを調べる。

2 計算

2.1 Quantum Kicked Rotor (QKR) の運動法則

ここで調べる QKR は Hamiltonian として次を持つ。

$$H = p^2/2 + \kappa \cos(x) \sum_n \delta(t - n) \quad (2.1)$$

つまり $t = 1, 2, \dots$ で $\kappa \cos x$ による kick を受け、それ以外では free。従って時間発展は古典の場合も量子の場合も単純な iteration で計算できる。以下に、noise なしとありの場合の古典、量子のそれぞれについて計算式をまとめる [3]。

2.1.1 pure な時間発展 (noise なし)

noise 無しの時間発展では系の状態は古典力学では座標 (x, p) 、量子力学では波動関数 $\psi(x)$ で記述される。その発展は：

- 古典力学では

$$n < t < n + 1 \text{ では自由発展なので } x_{n+1} = x_n + p_n \quad (2.2)$$

$$t = n + 1 \text{ の kick により } p_{n+1} = p_n + \kappa \sin(x_{n+1}) \quad (2.3)$$

$\kappa > 1$ で chaotic になる [3]。本論文では $\kappa = 10$ とするので位相空間のほとんど全域でカオスになる場合を扱う。運動量分布の運動 $f(p)$ は近似的に Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = D_\kappa \frac{\partial^2 f(p)}{\partial p^2} \quad (2.4)$$

に従う。 D_κ は κ で決まる拡散定数。特に運動量の分散は時間に比例 ($\langle p^2 \rangle = D_\kappa t$) し、分布形は Gaussian になる。

- 量子力学では

$$n < t < n + 1 \text{ では自由粒子の Schrodinger 方程式: } i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

$$t = n \text{ の kick により } \psi_{t=n+0}(x) = \exp(-i\kappa \cos(x)) \psi_{t=n-0}(x) \quad (2.6)$$

運動の量子力学的な特徴は運動量の分布の時間変化に現れる。diffusive time と呼ばれる時刻 $\tau \sim D_\kappa/\hbar^2$ までは古典とほとんど同じ。しかしそれ以降は Quantum Localization により運動量の分散 $\langle p^2 \rangle$ の増加は止まる。そして運動量分布の形は指数関数形 $\exp(-\alpha|p|)$ (α は定数) になっていく。

2.1.2 noise を加えた場合の運動

noise を加えた場合は、古典力学では系の記述に位相空間での分布関数 $f_t^cl(x, p)$ を使い、量子力学では Wigner 関数 $W_t(x, p)$ を用いる。

- 古典力学では

$n < t < n+1$ では自由拡散なので Fokker – Planck 方程式

$$\frac{\partial f_t^{cl}(x, p)}{\partial t} = -p \frac{\partial f_t^{cl}(x, p)}{\partial x} + D_b \frac{\partial^2 f_t^{cl}(p)}{\partial p^2} \quad (D_b \text{ は noise による Brown 運動の拡散定数}) \quad (2.7)$$

$t = n$ では kick により

$$f_{n+0}^{cl}(x, p) = f_{n-0}^t(x, p - \kappa \sin(x)) = \exp(-\kappa \sin x \partial / \partial p) f_{n-0}^{cl}(x, p) \quad (2.8)$$

- 量子力学では

$$n < t < n+1 \text{ では量子 Brown 運動で } \frac{\partial W_t(x, p)}{\partial t} = -p \frac{\partial W_t(x, p)}{\partial x} + D_b \frac{\partial^2 W_t(p)}{\partial p^2} \quad (2.9)$$

$$t = n \text{ の kick により } W_{n+0}(x, p) = \exp\left(-\frac{\kappa \sin x}{\hbar} F_{\hbar/2}\right) W_{n-0}(x, p) \quad (2.10)$$

$$\text{ただし、} F_z W(x, p) \equiv W(x, p+z) - W(x, p-z) \quad (2.11)$$

これは Schrodinger 方程式を Wigner 関数の運動方程式に置き換えたもの。

2.2 調べる量

上記の運動方程式に従って古典力学における古典分布関数の時間発展、量子力学での Wigner 関数の時間発展をそれぞれ noise なし、ありの場合について計算する。そして量子古典対応を示す量として運動量の分散 $\langle p^2 \rangle$ を比較する。同時に量子力学の Wigner 関数がどのくらい負になっているかを調べ、量子古典対応との関係を調べる。この、Wigner 関数の「負度」の目安としては、その負の部分の積分、すなわち次の量を用いる。

$$W_- \equiv \frac{1}{2} \int dx dp (W(x, p) - |W(x, p)|) \quad (2.12)$$

なお計算結果として、古典力学の場合 noise ありとなしでほとんど結果が変わらなかったのも、古典力学の方では noise ありの結果のみを示す。

3 結果

パラメータとして $\kappa = 10$, (この時 $D_\kappa = 31$), $\hbar = 5$, $D_b = 0.1$ をとった。初期条件として、幅 2.5 の minimum gaussian wave packet を用いた。この場合 Wigner 関数は正定値の gaussian 関数になる。古典力学でもその gaussian 関数を初期分布として用いる。

3.1 運動量の分布

まず既に知られている結果を再現していることを示すため、運動量の分散と分布自身を示す。まず $\langle p^2 \rangle$ を次の図 1 に示す。

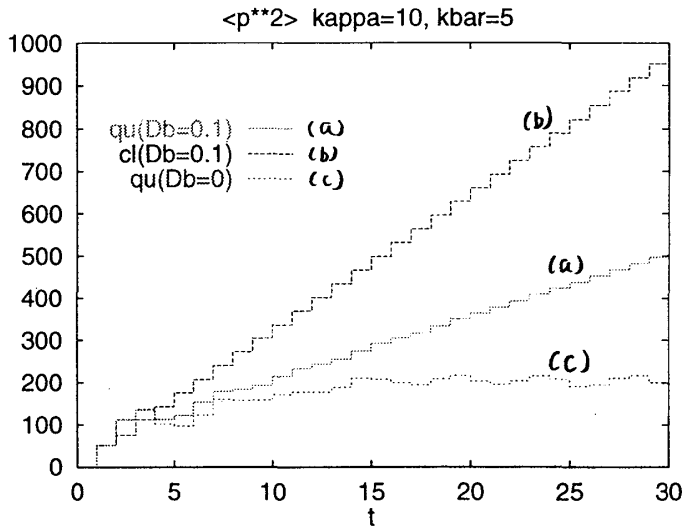


図1. $\langle p^2 \rangle$. (a) 量子 noise 付、(b) 古典 noise 付 (c) 量子 noise なし。

(c) の量子 noise なしでは確かに QL を起こしている。(a) から $D_b = 0.1$ の noise は QL を壊すものの、時間発展はなお古典 (b) とは異なることがわかる。実際、 $t = 30$ における運動量の分布を図2に示すと

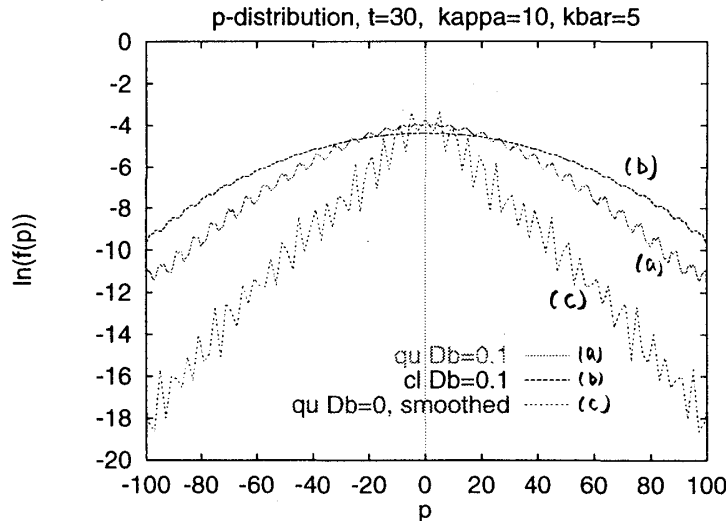


図2. $t = 30$ における運動量分布 $f(p)$ の対数 $\ln(f(p))$ 。(a) 量子 noise 付、(b) 古典 noise 付、(c) 量子 noise なし。ただし (c) では見やすくするため p 軸の幅2の区間ごとに平均をとって均している。

図2から、量子 noise なし (c) では確かに指数分布 (対数が直線に近い) であることが分かる。古典 (b) では gauss 分布 (対数が2次曲線)。そして量子 noise 付 (a) はこれらの中にある。 $p=0$ の周辺では2次曲線に近いが、 p が大きくなるにつれ曲線、つまり指数分布に近付いており、その意味で (a) は古典と量子の間といえる。

3.2 dynamics の違いと Wigner 関数の負度

これらの dynamics の違いをはっきりさせるために、各 kick による $\langle p^2 \rangle$ の増加分、つまり $\Delta \langle p^2 \rangle \equiv \langle p^2 \rangle_{t=n+0} - \langle p^2 \rangle_{t=n-0}$ と Wigner 関数の負度を示す。

まず $\langle p^2 \rangle$ の増加分 $\Delta \langle p^2 \rangle$ は、次の図3のとおり

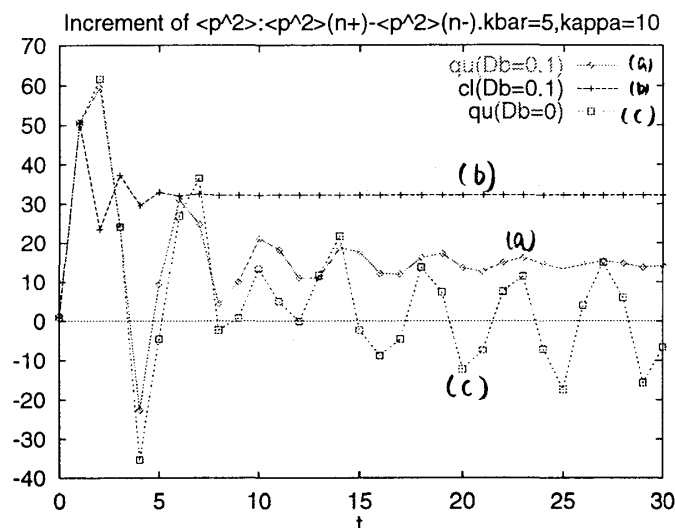


図3. $\Delta \langle p^2 \rangle$ (a) 量子 noise 付、(b) 古典 noise 付、(c) 量子 noise なし。

図3よりはっきり分かるように、量子 noise 付 (a) の dynamics は古典 (b) とともに量子 noise 無し (c) と異なる。実際、古典では増加分は約30に落ち着くのに対し、量子 noise なしでは0の周辺で振動する。そして、量子 noise 付きでは約15という、量子とも古典とも異なる値に落ち着いていく様に見える。

そして、求める量である Wigner 関数の負度 (2.12) として次の図4の結果を得た：

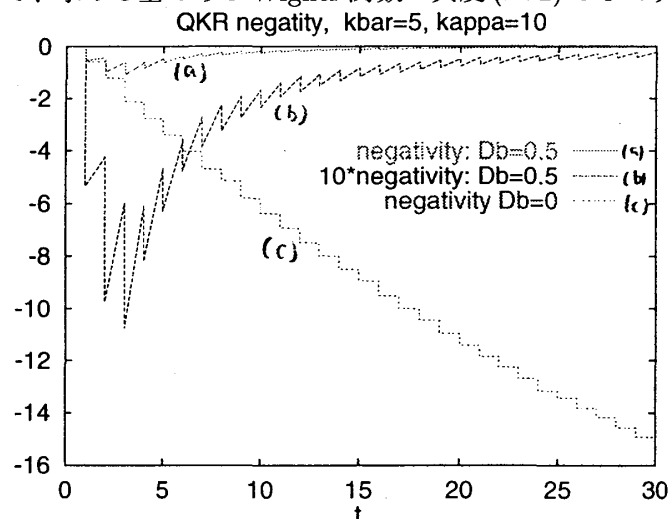


図4 Wigner 関数の負度。(a) noise 付、(b) 見やすくするため (a) の値を10倍したもの。(c) noise なし

図4で、(c)の量子 noise なしでは時間とともに単調に減少（絶対値は増加）していく。量子 noise 付き (a, b) の場合、4つめの kick あたりから0に向け収束していき、 $t=30$ では-0.02程度と非常に小さくなっている。一方図3で示した通り dynamics は非古典的な振舞いに落ち着いていく。

つまり、dynamics は非古典的な振舞いに落ち着く一方で、Wigner 関数はほとんど正定値になっていく。

この結果から、この系では、Wigner 関数がほとんど正定値になっても量子的な dynamics と古典的なものが互いに異なることになる。従って、Wigner 関数が正定値になることと dynamics の古典化はすくなくともこの系では結びつかないということがわかった。

4 まとめと課題

Quantum Kicked Rotor で Wigner 関数の「負度」と量子-古典の dynamics の違いを比較し、noise により Wigner 関数が正定値に近付いても dynamics は古典とは異ったままになりうるという結果を得た。したがって、Wigner 関数の正定値化と dynamics の古典化は必ずしも結びつかないことになる。

しかし、上記のようにそれらが結びついているように見える Chaos 系もある。これらの相違は、QL 特有の事情であるのか、あるいはより一般的なもののなのかという視点から量子古典対応の破れとその修復が起きるメカニズムを調べることは興味深い。

なお、ここでの計算には Los Alamos 研究所 Advanced Computer Laboratory の Origin 2000 system を用いた。

参考文献

- [1] “Quantum Mechanics -A Modern Development-” L.E.Ballentine , World Scientific (1998)
L.E.Ballentine *et al.* Phys.Rev. A50(1994)2854-2859
- [2] S.Habib *et al.* Physical Review Letters: Vol.80(1998) pp.4361-4365
- [3] たとえば “Chaos in Atomic Physics”, R.Blumel and W.P.Reinhardt, Cambridge 1997
G. Casati, Chaos **6**, 3 (1996) pp.391-398
- [4] “Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory”
D.Giulini *et al.* Springer (1996), この本には多数の関連論文のリストもあり。