

Caloric morphisms on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ with respect to radial metrics

茨城大学・理学部 下村 勝孝 (Katsunori Shimomura)
Faculty of Science
Ibaraki University

ここでは, $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($n \geq 2$) 上に radial な Riemann 計量を入れた多様体上で caloric morphism を考える.

ρ を $(0, \infty)$ 上の正値 C^∞ -関数とする. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の各点 x に対して, $ds^2 = \rho(|x|)(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ を radial な Riemann 計量とする. $\mathbb{R} \times M$ 内のある領域上での Riemann 計量に関する熱方程式

$$Hu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_\rho u = 0$$

を満たす関数 u を caloric function と呼ぶ. 但しここで Δ_ρ は M のラプラシアン

$$\begin{aligned} \Delta_\rho u &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho(|x|)^{n/2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho(|x|)^{n/2-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{\rho(|x|)} \Delta_x u + \frac{n-2}{2} \frac{\rho'(|x|)}{\rho(|x|)^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{aligned}$$

である.

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし,

$$f(t, x) = (f_0(t, x_1, \dots, x_n), f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))$$

を D から $\mathbb{R} \times M$ への C^∞ -写像, φ を D 上の正値 C^∞ -関数とする.

$f(D)$ 上の任意の caloric function $u(\tau, y)$ に対して, $\varphi(t, x)(u \circ f)(t, x)$ が D 上の caloric function になるとき, (f, φ) を caloric morphism と呼ぶ.

M は Riemann 多様体であるから, [5] の特徴付けにより, (f, φ) が caloric morphism であるための必要十分条件は, 以下の (E-1) – (E-4) で与えられる.

$$(E-1) \quad H\varphi = 0,$$

$$(E-2) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \Delta_\rho f_i + 2g(\nabla_\rho \log \varphi, \nabla_\rho f_i) - \frac{df_0}{dt}(t)[(\Delta_\rho x_i) \circ f],$$

$$(E-3) \quad \nabla_\rho f_0 = 0,$$

$$(E-4) \quad g(\nabla_\rho f_i, \nabla_\rho f_j) = \delta_{ij} \frac{df_0}{dt}(t) \left(\frac{1}{\rho} \circ f \right),$$

但しここで ∇_ρ は M の gradient

$$\nabla_\rho u = \frac{1}{\rho(|x|)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$i, j = 1, \dots, n$ である.

この特徴付けを用い, 以下では, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の Appell 変換

$$f(t, x) = \left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right), \quad \varphi(t, x) = \frac{1}{|t|^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

の直接の拡張として, f が原点を固定, または原点を無限遠点に写す変換

$$f(t, x) = (f_0(t), \nu(t)R(t)x), \quad \text{または} \quad f(t, x) = (f_0(t), \nu(t)R(t)\frac{x}{|x|^2}),$$

($\nu(t) > 0$, $R(t)$ は直交行列) になっている caloric morphism と, その場合の ρ の形を調べる.

Riemann 計量が radial であるから, $\mathbb{R}^n$ の回転及び $\mathbb{R}$ の平行移動

$$f(t, x) = (t + a, Rx), \quad \varphi(t, x) = C$$

($a \in \mathbb{R}$, R は直交行列, $C > 0$) は caloric morphism になる.

それ以外に, 言わば自明でないものには以下のものがある. 何れも metric ρ に強い制限が付く.

1. (Appell transformation) $p > 0$, $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq -2$), $\rho(r) = pr^k$ とする. その時

$$f(t, x) = \left(\frac{at + b}{ct + d}, \frac{R}{|ct + d|^{2/(k+2)}} x\right),$$

$$\varphi(t, x) = \frac{C \exp\left[\frac{-p|x|^{k+2}}{(k+2)^2|ct + d|}\right]}{|ct + d|^{n/2}}$$

(但し $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ s.t. $ad - bc = 1$, $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$k = -2$ の場合は, この形の変換は存在しない. 一方, $k = -2$ の場合には Euclidean metric の場合には無かった型の変換が存在する.

2. (Kelvin transformation) $\nu > 0$, $\rho(r)$ は $\rho(\frac{\nu^2}{r}) = \frac{r^4}{\nu^2}\rho(r)$ を満たす (例えば $\rho(r) = \frac{\nu^2}{r^2}$) 正値 C^∞ -関数とする. その時

$$f(t, x) = (t + a, \nu R \frac{x}{|x|^2}), \quad \varphi(t, x) = C$$

(但し $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

3. (The dilation) $\nu > 0$, $\rho(r)$ は $\rho(\nu r) = \nu^k \rho(r)$ を満たす (例えば $\rho(r) = r^k$) 正値 C^∞ -関数とする. その時

$$f(t, x) = (\nu^{k+2}t + a, \nu R x), \quad \varphi(t, x) = C$$

(但し $a \in \mathbb{R}$, $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$k = -2$ の場合は t の係数が 1 になってしまう.

4. $p > 0$, $\rho(r) = pr^{-2}$ とする. その時

$$f(t, x) = (t + a, e^{\alpha t + \beta} R x), \quad \varphi(t, x) = C|x|^{\alpha p/2} e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t},$$

$$f(t, x) = (t + a, e^{\alpha t + \beta} \frac{R x}{|x|^2}), \quad \varphi(t, x) = C \frac{1}{|x|^{\alpha p/2}} e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t}$$

(但し $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq 0$), $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$n = 2$ の場合は特別で, $R(t)$ が定数でない, つまり t につれて f が回転する型の変換が存在する.

5. $n = 2$, $p > 0$, $\rho(r) = pr^{-2}$ とする. その時

$$f(t, x) = (t + a, \nu e^{\alpha t} R(bt + c)x), \quad \varphi(t, r, \theta) = C r^{\alpha p/2} e^{\frac{1}{2}b\theta} e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t},$$

$$f(t, x) = (t + a, \nu e^{\alpha t} R(bt + c) \frac{x}{|x|^2}), \quad \varphi(t, r, \theta) = C \frac{1}{r^{\alpha p/2}} e^{\frac{1}{2}b\theta} e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t}$$

(但し $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq 0$), $\nu, C > 0$, $R(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$,

(r, θ) は $\mathbb{R}^2$ の極座標) は caloric morphism.

REFERENCES

- [1] B. Fuglede, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28** (1978), 107–144.
- [2] T. Ishihara, *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 215–229.
- [3] H. Leutwiler, *On the Appell Transformation*, Potential Theory (J.Král, J.Lukeš, I.Netuka, J.Veselý, eds.), Plenum, New York, 1988, pp. 215–222.
- [4] K. Shimomura, *The determination of caloric morphisms on Euclidean domains*, Nagoya Math J. **158** (2000), 133–166.
- [5] M. Nishio, K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds*, to appear in Ann. Acad. Sci. Fenn Math..