

p 進体上の交代行列の空間における球関数

立教大理 佐藤文広 (Fumihito Sato)

信州大理 広中由美子 (Yumiko Hironaka)

§ 0. p 進体 k_p 上の reductive 代数群 G , G の good maximal compact subgroup K に対して, Hecke 環 $\mathcal{H}(G, K)$ を考える。 G の等質空間 X が与えられたとき, $\mathcal{H}(G, K)$ は X 上の K -不変な関数からなる関数空間に自然に作用する。このようにして得られる Hecke 環 module の構造を調べることは, 興味深い問題である。実際, $G = G_1 \times G_1$, $K = K_1 \times K_1$, $X = G_1$ とし, G の X への作用が, $g \cdot x = (g_1, g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1}$ で与えられる場合には, この問題は, G の帯球関数の理論に他ならない。

そこで, 我々は, 本稿において,

$$G = GL(2n, k_p)$$

$$K = GL(2n, \mathcal{O}_p) \quad \mathcal{O}_p = \mathcal{O}_{k_p}$$

$$X = \{x \in M(2n, k_p) \mid x^t = -x, \det x \neq 0\} \cong \frac{GL(2n, k_p)}{Sp(n, k_p)}$$

の場合に調べる。球関数、球 Fourier 変換の理論を構成する (§ 1, Th. A, B, C).

又、 X 上の "球関数" は、(合同式の解の密度として定義される) いわゆる "local density" と密接な関係がある (§ 1, Th D). この関係を利用して、交代行列の "local density" の explicit formulae を求めることが出来る (§ 1, Th E).

以下の議論は、 $GL(m, k_f)$ の球関数についてこの詳しい情報 ([1], [2]) に基づいている。

§ 1.

1° $k = k_f$: f -進体, $\sigma = \sigma_f$, $f = \pi \sigma$, $q = \# \sigma/f$

$$G := GL(2n, k) \quad , \quad K = GL(2n, \sigma)$$

$$X := \{x \in G \mid {}^t x = -x\}, \quad J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_n := \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1 \end{pmatrix}$$

とすると、 G は X 上に、 $g \cdot x = g x {}^t g$ ($g \in G, x \in X$) により作用する。 $x \in X$ に対し、 $Pf_i(x)$ で x の初めの $2i$ 次小行列の pfaffian を表す。 $x \in X$ と、複素変数 $S = (s_1, \dots, s_n)$ について

$$\zeta_f(x; S) := \int \prod_{i=1}^n |Pf_i(k \cdot x)|_f^{s_i} dk,$$

ただし、 dk は K 上の Haar measure で $\int_K dk = 1$ 、積分領域は、 $\{k \in K \mid \prod_{i=1}^n Pf_i(k \cdot x) \neq 0\}$ とする、

と定める。積分 $\zeta_f(x; S)$ は、 $\operatorname{Re} s_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) において絶

対収束し、 Δ の関数として $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続されることとなる。(実は、 $q^{-s_1}, \dots, q^{-s_n}$ の有理関数となる。) 又、 π の積分は、群の帯球関数の積分表示 (Harish-Chandra, Satake) の類似である。変数変換

$$s_i = z_{i+1} - z_i - 2 \quad (1 \leq i \leq n) \quad z_{n+1} = n+1$$

をしたとき、 $\zeta_F(x; z)$ と表わし、

$$\bar{\zeta}_z(x) := \frac{\zeta_F(x; z)}{\zeta_F(J_n; z)}, \quad F \in \mathbb{Z} \quad J_n = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \in X$$

と定義し、これを、 X 上の球関数と呼ぶ。この意味は、 Th A, B で明らかになる。

$$2^\circ \quad \mathcal{A}(G, K) := \left\{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(kgh) = f(g) \quad \forall k, h \in K, \forall g \in G \right\} \\ \text{Supp } f: \text{compact}$$

$$C^\infty(K \backslash X) := \{ \varphi: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(k \cdot x) = \varphi(x) \quad \forall k \in K \quad \forall x \in X \}$$

$$\mathcal{S}(K \backslash X) := \{ \varphi \in C^\infty(K \backslash X) \mid \text{Supp } f: \text{compact} \}$$

と置く。 $\mathcal{A}(G, K)$ は、和と convolution $*$ により、可換 $\mathbb{C}$ -algebra をなす。こゝで、 $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(G, K)$ により、

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) dh \quad \text{for } \forall g \in G.$$

又、 $C^\infty(K \backslash X), \mathcal{S}(K \backslash X)$ は、次の作用により、 $\mathcal{A}(G, K)$ -module となる：
 $f \in \mathcal{A}(G, K), \varphi \in C^\infty(K \backslash X)$ により、

$$f * \varphi(x) = \int_G f(g) \varphi(g^{-1}x) dg \quad \text{for } \forall x \in X.$$

G の元 g が、 $g = k h n$, $k \in K$, $h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_{2n} \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と岩沢分解してゐるとき、 $2n$ 個の複素変数 $S = (S_1, \dots, S_{2n})$ について、

$$\Phi_S(g) := \prod_{i=1}^{2n} |h_i|^{S_i - (n-i+\frac{1}{2})}$$

$$w_S(g) := \int_K \Phi_S(g^{-1}k) dk$$

$$\hat{w}_S(f) := \int_G f(g) w_S(g^{-1}) dg, \quad \text{for } f \in \mathcal{A}(G, K)$$

と定めると、

$$f * w_S = \hat{w}_S(f) w_S, \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{A}(G, K)$$

$$w_S(g^{-1}) = w_{-S}(g), \quad \text{for } \forall g \in G$$

が成立してゐる ([2])。

我々は、これをを用いて、 $\mathcal{A}(G, K)$ 及び $\mathcal{A}(K \backslash X)$ 上の Fourier 変換を次のように定義する：

$$\mathcal{A}(G, K) \longrightarrow \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]$$

$$f \longmapsto \tilde{f}(z) = \hat{w}_{\tilde{S}z}(f),$$

$$\text{ただし, } \tilde{S}z = Sz + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}), \quad Sz = (z_n, z_{n-1}, \dots, z_1, z_1 - 1)$$

$$\mathcal{A}(K \backslash X) \longrightarrow \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]$$

$$\varphi \longmapsto \hat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x) \Phi_z(x^{-1}) dx$$

ただし, dx は X 上の G -invariant measure で $\int_X dx = 1$.
 対称群 S_n を, $\{z_1, \dots, z_n\}$ に作用させたときに固定される元
 全体 $\mathbb{C}[g^{\pm z_1}, \dots, g^{\pm z_n}]^{S_n}$ を $\mathcal{B}$ で表わす。Fourier変換の
 像は $\mathcal{B}$ に含まれることがわかり, 次の定理が成立する。

Theorem A

(1) Fourier変換 $f \mapsto \hat{f}$ により, ring epimorphism

$$\mathcal{H}(G, K) \longrightarrow \mathcal{B} \text{ を得る。}$$

(2) $f * \Psi_Z = \hat{f}(Z) \Psi_Z$ for $\forall f \in \mathcal{H}(G, K)$.

(3) $C^\infty(K \setminus X)$ 内の, $\mathcal{H}(G, K)$ -同時固有関数は

$$\text{ある } C \in \mathbb{C} \text{ と } Z_0 \in \mathbb{C}^\infty \text{ により } C \cdot \Psi_{Z_0}$$

と表わされる。

Theorem B

Th A-(1) の ring homomorphism により, $\mathbb{C} \in \mathcal{H}(G, K)$ -
 module とみなすと, Fourier変換 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ により,

$$\mathcal{S}(K \setminus X) \cong \mathcal{B} \text{ (as } \mathcal{H}(G, K)\text{-modules).}$$

3° $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $w^\lambda = \begin{pmatrix} \pi^{\lambda_1 J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n J_n} \end{pmatrix}$, $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と
 定める。特に, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ のときは, λ を長さ n の partition と呼ぶ。

$X = \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^n \\ \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n}} K \cdot \pi^\lambda$ と disjoint union に分解される。

$z_p(x; z)$ は, K -不変であり, $\tilde{\lambda} = \lambda + (z_1, \dots, z_n)$ のとき

$$z_p(\pi \tilde{\lambda}; z) = q^{z(z_1 + \dots + z_n)} z_p(\pi \lambda; z)$$

であるから, $z_p(x; z)$ の値は, $x = \pi^\lambda$ (λ : partition) での値で決定される。

$\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$ に対し $z, \langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$

とし, 一方が変数の場合も, この記号 $\langle, \rangle$ を流用すると,

次のように explicit formulae が記述される。

Theorem C

$$(1) z_p(J_n; z) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-2k-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1-q^{z_i - z_j - 1}}{1-q^{z_i - z_j + 1}}$$

(2) $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ は n の partition, $\rho = (n-2i+1 \mid 1 \leq i \leq n) \in \mathbb{Z}^n$ とすると,

$$\bar{\Psi}_z(\pi \lambda) = q^{-\langle \lambda, \rho \rangle} \prod_{i=1}^n \frac{1-q^{-2}}{1-q^{-z_i}} \sum_{\sigma \in S_n} q^{\langle \lambda, \sigma z \rangle} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1-q^{z_{\sigma(j)} - z_{\sigma(i)} - 2}}{1-q^{z_{\sigma(j)} - z_{\sigma(i)}}}$$

従って, $\bar{\Psi}_z(x) \in \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n}$ for $\forall x \in X$ 。

Remark. 後に定義する H.L. 多項式 P_λ などを用いると,

$$\bar{\Psi}_z(\pi \lambda) = q^{-\langle \lambda, \rho \rangle} \frac{\omega_\lambda(q^{-2})}{\omega_n(q^{-2})} P_\lambda(q^{z_1}, \dots, q^{z_n}; q^{-2})$$

と記述される。

4° $\xi, \lambda \in \mathbb{F}$ と m, n の partition とする ($m \geq n$). $l \in \mathbb{N}$ 1-27 $\subset \mathbb{Z}$,

$$N_l(\pi^\xi, \pi^\lambda) = \# \{ \bar{v} \in M(2m, 2n; \mathcal{O}_f^l) \mid t_\mu \pi^\xi v \equiv \pi^\lambda \pmod{p^l} \}$$

$$N_l^{\text{pr}}(\pi^\xi, \pi^\lambda) = \# \left\{ \bar{v} \in M(2m, 2n; \mathcal{O}_f^l) \mid \begin{array}{l} v: \text{primitive} \\ t_\mu \pi^\xi v \equiv \pi^\lambda \pmod{p^l} \end{array} \right\}$$

1-27 $\subset \mathbb{Z}$, $v \in M(2m, 2n; \mathcal{O})$ を primitive とは, ある $u \in GL(2m, \mathcal{O})$ 1-27 $\subset \mathbb{Z}$, $v = u \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるとき 1-11 う,

と定め, local density を次のように定義する:

$$\mu(\pi^\xi, \pi^\lambda) := \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{N_l(\pi^\xi, \pi^\lambda)}{q^{-l \ln(4m-2n+1)}}$$

$$\mu^{\text{pr}}(\pi^\xi, \pi^\lambda) := \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{N_l^{\text{pr}}(\pi^\xi, \pi^\lambda)}{q^{-l \ln(4m-2n+1)}}.$$

$\mathbb{F}$ と m の partition ξ 1-27 $\subset \mathbb{Z}$, $|\xi| \geq \sum_{i=1}^n \xi_i$ を表わす。
上の記号を用いると, まづ, 次の induction formulae が
得られる。

Theorem D

$\xi \in \mathbb{F}$ と m の partition とすると,

$$\begin{aligned}
\zeta_f(\pi^3; s_1, \dots, s_n) &= \prod_{j=3}^{2n} \frac{1}{1-q^{-j}} q^{-|3|s_n} \sum_{\lambda} \mu^{pr}(\pi^3, \pi^{\lambda}) \text{vol}(K_{n-1} \cdot \pi^{\lambda})^{-1} \zeta_f(\pi^{\lambda}; s_1, \dots, s_{n-1}) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1-q^{-(s_i+\dots+s_n+2n-2i+2)})(1-q^{-(s_i+\dots+s_n+2n-2i-1)})}{\prod_{j=3}^{2n} (1-q^{-j})} \\
&\quad \times q^{-|3|s_n} \sum_{\lambda} \mu(\pi^3, \pi^{\lambda}) \text{vol}(K_{n-1} \cdot \pi^{\lambda})^{-1} \zeta_f(\pi^{\lambda}; s_1, \dots, s_{n-1})
\end{aligned}$$

$z_1, \dots, z_n$ は長さ $n-1$ の partitions を渡る和であり、変数変換 $s_i = z_{i+1} - z_i - 2$ ($1 \leq i \leq n$), $z_{n+1} = n+1$ を行うと、 i 才 2 の式 $\prod_{i=1}^{n-1}$ の積の部分に

$$\prod_{i=1}^{n-1} (1-q^{z_i-z_{n-2}})(1-q^{z_i-z_{n-1}})$$

となる。

Remark 長さ n の partition ξ と変数 n に $\xi \vdash n$

$$W_{\xi}(x) := \prod_{i \geq 0} w_{m_i(\xi)}(x)$$

ただし, $m_i(\xi) = \#\{j \mid \xi_j = i\}$, $w_{\ell}(x) = \prod_{i=1}^{\ell} (1-x^i)$, と定める。

$$\text{vol}(K \cdot \pi^3) = q^{-\sum_{i=1}^n (3-4i)\xi_i} \frac{w_{2n}(q^{-1})}{w_{\xi}(q^{-2})}$$

となることはわかる。

The C で与えられた $11 \ni \zeta_p(\pi^{\mathbb{Z}}; S)$ の explicit formulae と The D とを組み合わせて local density の explicit formulae を得られるが, それを述べる前に必要な記号を準備する (cf [13]).

partition λ を Young 図形に表わしたとき, 転置した図形に対応する partition を λ' で表わす。

λ, μ は長さ m, n の partitions と可也。

$\lambda \supset \mu \iff m \geq n$ かつ $\lambda_i \geq \mu_i$ ($1 \leq i \leq n$)

このとき, $\lambda - \mu$ を horizontal strip (h.s.) $\iff \lambda_i - \mu_i \leq 1$ ($i \geq 1$) と定義し, 更に $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^+$ とする。

$$I_{\lambda/\mu} = \{i \geq 1 \mid \lambda_i - \mu_i = 1, \lambda_{i+1} - \mu_{i+1} = 0\}$$

$$J_{\lambda/\mu} = \{j \geq 1 \mid \lambda_j - \mu_j = 0, \lambda_{j+1} - \mu_{j+1} = 1\}$$

$$\varphi_{\lambda/\mu}(t) := \prod_{i \in I_{\lambda/\mu}} (1 - t^{m_i(\lambda)})$$

$$\psi_{\lambda/\mu}(t) := \prod_{j \in J_{\lambda/\mu}} (1 - t^{m_j(\lambda)})$$

と定める。ただし $I_{\lambda/\mu} = \emptyset$ (resp. $J_{\lambda/\mu} = \emptyset$) のときは,

$\varphi_{\lambda/\mu}(t) = 1$ (resp. $\psi_{\lambda/\mu}(t) = 1$) とする。

以下では, λ, μ, ν は長さ n の partitions とする。不定元 $x_1, \dots, x_n, t \in \mathbb{Z}$, Hall-Littlewood polynomial は,

$$P_\lambda(x; t) = P_\lambda(x_1, x_n; t) = \frac{(1-t)^n}{\omega_\lambda(t)} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n} \prod_{i < j} \frac{x_{\sigma(i)} - tx_{\sigma(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}$$

と定義される。これは 2 次関係が知られている。

$$P_\lambda(x; 0) = \sum_{\substack{\lambda \geq \mu \\ |\lambda| = |\mu|}} K_{\lambda\mu}(t) P_\mu(x; t),$$

すなわち、 $K_{\lambda\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $K_{\lambda\mu}(q^{-2}) \geq 0$ である。

$\lambda \geq \mu \iff \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i \quad (\forall i \geq 1)$ である。

$$a_\mu = \sum_{\substack{\lambda \geq \mu \\ \lambda_1 + \lambda_2 = |\lambda| = |\mu|}} \frac{q^{\lambda_1 - \lambda_2} - q^{-2\lambda_1 + \lambda_2 - 3}}{1 - q^{-3}} K_{\lambda\mu}(q^{-2}) \quad \text{と置く。}$$

k の不分岐 2 次拡大体の整数環 $\tilde{\mathcal{O}}$ とし、 $\tilde{\mathcal{O}}$ -module M の type λ であるとは $\tilde{\mathcal{O}}$ の $M \cong \tilde{\mathcal{O}}/(\pi^{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus \tilde{\mathcal{O}}/(\pi^{\lambda_n})$ となるように定義する。これは 1 つ固定して、

$$G_{\mu\nu}^\lambda(\tilde{\mathcal{O}}) = \# \left\{ N \mid \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{O}}\text{-sub-module of } M \\ N \text{ of type } = \mu, \quad M/N \text{ of type } = \nu \end{array} \right\}$$

$$f_{\mu\nu}^\lambda(q^{-2}) = q^{2 \sum_{i=1}^n (i-1)(-\lambda_i + \mu_i + \nu_i)} G_{\mu\nu}^\lambda(\tilde{\mathcal{O}})$$

と定めると、明らかに $f_{\mu\nu}^\lambda(q^{-2}) \geq 0$ である。

以上の記号を用いると、次のように explicit formulae を記述される。

Theorem E

$\xi, \lambda \in \mathbb{E} \leq n, n-1$ の partitions とすると,

$$(1) \mu(\pi^\xi, \pi^\lambda) = \prod_{i=1}^{2n-2} (1-q^{-i}) \cdot \frac{w_\xi(q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-2n+1})(1-q^{-2n})} q^{2\Sigma(i+1)\xi_i + \Sigma(2i-3)\lambda_i}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \sum_{\substack{\mu, \eta \\ \lambda = \mu + \eta \\ |\lambda| = |\mu| + |\eta| \\ \xi - \eta : \text{h.s.}}} a_\mu \varphi_{\xi/\eta}(q^{-2}) f_{\mu\eta}^\lambda(q^{-2}) \end{array} \right]$$

$$(2) \mu^{\text{pr}}(\pi^\xi, \pi^\lambda) = \prod_{i=1}^{2n-2} (1-q^{-i}) \cdot \frac{w_\xi(q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-2n+1})(1-q^{-2n})} q^{2\Sigma(i+1)\xi_i + \Sigma(2i-3)\lambda_i}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \sum_{\substack{\mu \\ \lambda - \mu \\ \xi - \mu \\ \text{h.s.}}} q^{|\lambda| - |\mu|} \varphi_{\xi/\mu}(q^{-2}) \varphi_{\lambda/\mu}(q^{-2}) \end{array} \right]$$

定理に述べた、 $a_\mu, f_{\mu\eta}^\lambda(q^{-2})$ を具体的な形で求めるアルゴリズムは存在するか、ここでは次の系を述べるに留める。

Corollary

$\xi, \lambda \in \mathbb{Z}^n$ are partitions and $n \geq 1$.

$$(1) \mu(\pi^\xi, \pi^\lambda) \neq 0 \iff \xi - \xi \cap \lambda \text{ is a horizontal strip,}$$

$$(2) \mu^{\text{pr}}(\pi^\xi, \pi^\lambda) \neq 0 \iff \xi - \xi \cap \lambda \text{ is a horizontal strip, and } \lambda - \xi \cap \lambda \text{ is a horizontal strip.}$$

参考文献

[1] I. G. Macdonald : Symmetric functions and Hall polynomials , Oxford 1979

[2] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic group over p-adic field , Publ. Math. IHES 18 (1963) , 5-70