

大自由度ハミルトン系の挙動
～特に非一様・遍歴的振舞いについて～
名古屋大学理学部物理R研 小西哲郎
tkonishi@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

1 乱れた秩序構造、カオス

カオスが盛んに研究されるようになってからもう20年以上たつ。カオスがここまで脚光を集めた理由の一つは、もちろん決定論から予測不能な運動が生じると言うパラドキシカルな事実、乱雑な振舞いを生じさせるには巨大な自由度は必要としない、という事の衝撃の他に、これまで理解が難しかった「なにか秩序や構造のようなものは見えるのだけれどもそれは規則的でも周期的でもないためにどう扱って良いか分からない」数々の現象に対してアプローチする可能性が感じられたからであると考ええる。この解説では、そうした「乱れた秩序構造」に対してカオスを通じてどのようにアプローチできるかを考えてみたい。

2 ハミルトン系の典型的挙動

ハミルトン系カオスの振舞いのうち、低自由度、すなわち、保測写像についてはかなり詳しく分かってきた。ところが、自由度が大きくなった系では、未だに分からない事がたくさんある。分かっていると思っていることすら実は単に低自由度系の振舞いから外挿的に推測しているにすぎない事が多い。(たとえば高次元系の相空間構造を理解している人がどのくらいいるであろうか?)

ここでは自由度の大きなハミルトン力学系の挙動のうち興味深いものとして次の3つを考えてみよう。

熱的・拡散的振舞い

淀みの・ $1/f$ 的振舞い

非一様・遍歴的振舞い(今回の主題)

前の2つでは、系の運動は、相空間全体を運動するか、相空間の一部に留まるかの違いはあるにせよ、どの時刻に観測しても系の様子は概ね同じである。これらについてはこの研究会の他の講演で十分な解説があったので、ここでは触れない。この解説では、それと異なる運動を考える。即ち、相空間および系の運動が一様ではなく様々な状態を移り変わる、いわば遍歴的運動である。

2.1 非一様・遍歴的振舞い

多体系における要素の空間的配置(構造)としてどのようなものが観測されるかを考えてみよう。もっとも単純な場合には、系がとり得る空間的構造は、エネルギーを最小にする配置としてただ一つ定まるであろう。

これに反し、系が複数の energy local minimum 配置をとり得る場合、また、乱れた流れの場の様に、系の空間構造がその種の最小値原理では定まらない場合には、系の空間的構造はただ一つとは限らない。

そこで、例として、

- symplectic coupled map (大域結合) [1, 2]

- symplectic coupled map (短距離結合)
- 1次元重力多体系 [3]

の3つを取り上げることにする。これらの系は多数の構成要素からなる。(簡単には分子などの多粒子系と思って良い。)

これらの系で、もしも相空間内に性質の異なるカオス領域が複数あるならば、系がこのカオス領域を次々と訪れて行くことで系の巨視的な状態が変化して行くと考えられる。そのときに、系の巨視的な状態の変化の法則と、微視的ダイナミクスの情報がどのように関係しているかは興味深い問題である。

以下ではそれぞれのモデルについてこれまで筆者らが行った研究を振り返り紹介する。紙面の都合で概略しか述べられないので詳細は文献を参照されたい。

3 大域結合型 symplectic map でのクラスター構造の形成と崩壊

ここでは、構造を作る保存系カオスの例を紹介する [2]。時間発展につれて、系は構造を作る状態と構造の無い状態の間を行き来する。

次のようなモデルを考える。系は単位円上におかれた N 個の粒子からなる。系の状態は、各粒子の座標 (= 位相/ 2π) と運動量 (q_i, p_i) 全部で $2N$ 個の値を指定すると定まる。系の時間発展は次のように定める；

$$(q_i, p_i) \mapsto (q'_i, p'_i)$$

$$p'_i = p_i + \frac{K}{2\pi\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^N \sin 2\pi(q_j - q_i) \quad (1)$$

$$q'_i = q_i + p'_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

この時間発展は symplectic condition を満たしている。すなわち、系の時間発展は正準変換になっている [4]。

この系では1つの粒子は他の全ての粒子と相互作用する。また、2粒子間の相互作用は粒子間距離が離れても減衰しない。この意味でこの系を大域結合系と呼ぶ。

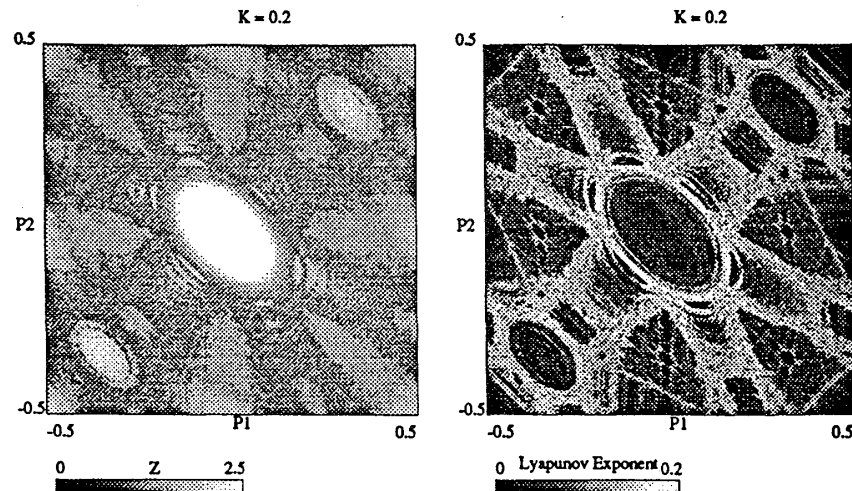
系の典型的な時間発展は2種類ある [1]。粒子が集まってクラスターを作っている状態と、クラスターを作らずにバラバラに運動している状態である。

リヤプノフ数を調べることにより [1]、2つの状態はどちらもカオスであることが分かる。即ち、相空間内に性質の異なるカオス領域が2つ共存していることになる。しかも、今は自由度が大きいので、前節で述べたように、2つの領域はつながっている。従って時間発展につれてクラスターは出来たり壊れたりする可能性がある。

以下では、クラスター状態をカオスとしてどう理解するか考えてみる。

2つの状態の違いは初期条件の違いによる。そこで、初期条件の空間で2つの状態がどのように分布しているかを調べてみる。

図1(b)は、初期条件の空間(運動量空間 (p_1, p_2)) に「クラスター度」 $Z = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_j) \right|$ を対応させたものである。クラスター度 Z は初期条件を与えてから適当な時間たった後に測ったものである。図上の一点 (p_1, p_2) を定めると初期条件が一つ定まる。他の p_3, x_j は固定し、 p_4, x_4 は重心を固定する事で定め



(a) クラスター状態の分布 (白い部分がクラスターになる初期状態)

(b) 図 1(b) と同じ断面で見た短時間リヤプノフ数 (黒いほどリヤプノフ数が小)

Figure 1: 運動量の初期条件の空間。クラスターを作る状態とリヤプノフ数がゼロ近くである状態が対応している。

る。この図によれば、運動量空間の原点付近およびそれを取り巻く波状の領域でクラスターが生成していることがわかる。

一方、相空間の全く同じ断面で短時間リヤプノフ数を測ったのが図 1(b) である。ハミルトン系カオスに良く見られるような、レゾナンスの帯と周期点の島が見られる。

図 1(b) でクラスターが生じる領域と図 1(b) でリヤプノフ数が小さい領域は良く一致している。これと、リヤプノフ数の収束の様子、滞在時間分布などから、クラスター構造はハミルトン系カオスに特徴的なトーラスおよびその残骸近傍の階層構造にトラップされて保持されている (標語的に言えば「カオスが構造を守っている」) と言える。

では、クラスター構造がある状態と無い状態の間の遷移はどのようにして起きるのであろうか？巨視的な状態の変化に対して各粒子はバラバラに運動するのかそれとも協調して運動するのであろうか？これを調べるために、ここではリヤプノフベクトルを各粒子に割り付けてその平行度を定量化して調べてみた。予想では、相空間内でクラスターが生成／崩壊を起こすあたりでは各粒子の「協同度」が上がると思われたが、実際の数値計算ではとくに変化は無かった。これはおそらく今考えている系では秩序状態が 1 種類しかなく、秩序と無秩序の間の遷移であるためであると考えられる。

4 短距離結合型 symplectic map での構造の組み替え

前節では 大域結合した結合写像系で構造を持った状態と持たない状態の間の遷移をみた。本節では構造を持つ状態が複数あるような系を作り、その構造遷移と相

空間構造について考えてみる。

前節のモデルの相互作用を短距離型にして以下のようなモデルを考える；

$$(q_i, p_i) \mapsto (q'_i, p'_i)$$

$$p'_i = p_i + k \sum_{j=1}^N c_j c_i \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi(q_j - q_i)) \right]^n \sin 2\pi(q_j - q_i) \quad (3)$$

$$q'_i = q_i + p'_i$$

このモデルは前節のモデル (2) の相互作用を有限の距離で減衰するようにしたものである。相互作用の形は、周期境界条件に合うように周期関数で簡単なものとして $\cos^n$ を使った。減衰の強さを決める指数 n は適当に定めた。 c_i は各粒子が持つ “charge” であり、 $c_i = 1$ (i : 奇数), $c_i = -1$ (i : 偶数) である。ここでは同符号の粒子は斥力、異符号の粒子は引力の相互作用をする。

この系での典型的ふるまいは下記のようなものである；

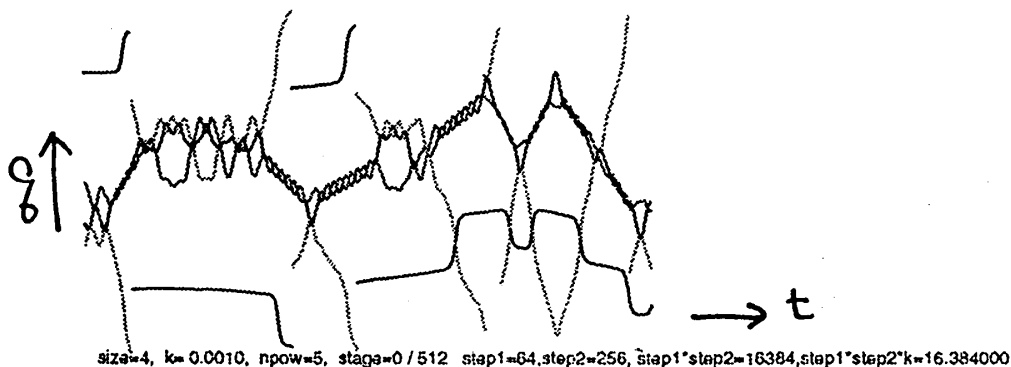


Figure 2: 単距離型モデルの典型的時間発展

系は正負のチャージを持つ 2 粒子からなる binary を基本とし、binary どうしの衝突、すり抜け、組み替えが起きている。また、3 粒子が一つのクラスターを形成するという状態も観測されている。

2 つの粒子がしばらくの時間互いに近くにいれば、この 2 粒子を同じクラスターに所属していると考えられる。これにより、系の状態を、粒子をクラスターに分解する仕方で分類することが出来る。4 粒子系の場合には、4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1 の 5 通り (×粒子の順列) の状態に区別される。

各状態での滞在時間分布を考えてみる。もしも系が各状態間を熱的に遷移しているのだとすれば、滞在時間分布は指数減衰するはずである。また、その場合には、系の状態間遷移は熱という形でまとめられてしまうので、運動の力学的性質の詳細は表には現れて来ない。(例えば複数の谷を持つポテンシャルの中を熱で飛び移る系のように。)

図 3 は、binary が 2 つ出来ている状態への滞在時間分布であり、指数的ではなくべき的な分布が見られている。したがって、系の状態間遷移は力学の詳細な情報と関連している可能性がある。また、構造が出来ていない状態においてはこのようなべき分布は見られず、指数減衰に近い。

前節同様の相空間構造を見てみる。

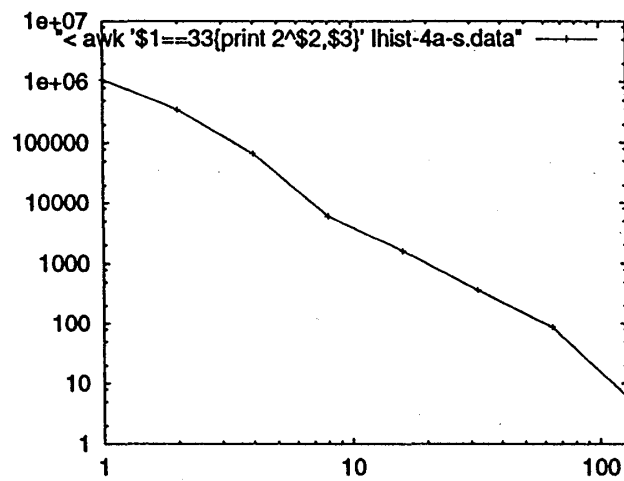
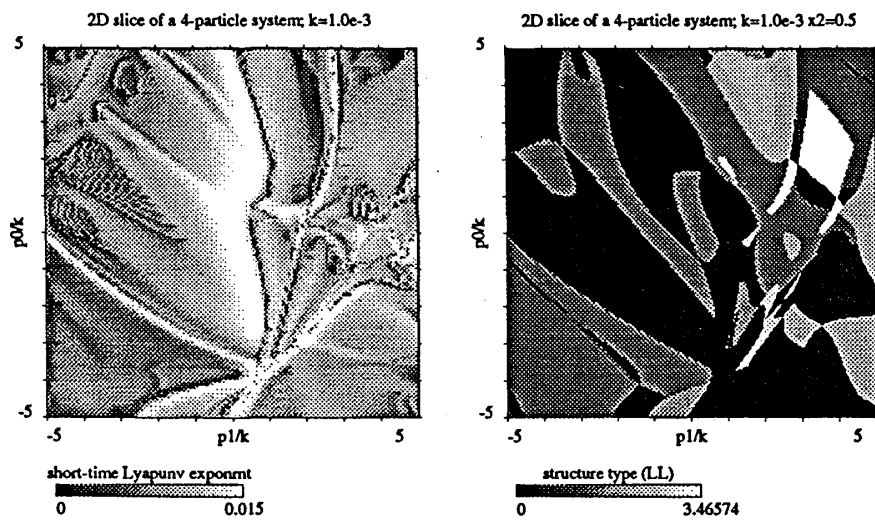


Figure 3: 2 binars 状態の寿命分布 (両対数)。横軸は寿命 / 512, 縦軸は頻度。およそ $1/\tau^2$ のべき分布



(a) 短時間リヤプノフ数

(b) 図 4(a) と同じ断面での状態の分類。

Figure 4: 4 粒子系での運動量空間の初期条件での短時間リヤプノフ数と状態分類。状態の境目では軌道不安定性が大きい。

図 4(a), 4(b) は、それぞれ $N = 4$ の場合の運動量空間の初期条件に短時間リヤプノフ数と状態を表したものである。系の状態の境目ではリヤプノフ数が大きくなっており、状態は相空間内で複雑に入り組んでいるのが分かる。

別の見方をしてみよう。この系は写像系なのでエネルギーは保存せず、厳密な意味での「ポテンシャル」を定義することは出来ない。しかし、写像 (3) はハミルトニアン

$$H = T + U$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} p_i^2, U(q) = \sum_{i,j} c_i c_j \frac{k}{\pi(n+1)} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi(q_j - q_i)) \right\}^{n+1} \quad (4)$$

の 2 次の symplectic integrator そのものなので、短時間の振舞いを考えるならば、近似的なポテンシャルを考える事も意味がある。

図 5 は、4 粒子系の配位空間 $(q_1, \dots, q_3)$ において「準ポテンシャル」 $U(q)$ がある値よりも小さい領域を記したものである。 $(q_4$ の値は重心を fix することにより定まる。) いくつか見える線状の部分がそれぞれのクラスター構成に対応しており、線の交点でクラスターの組み替えが起きている。このようにして、系が相空間内の回廊をめぐる状態を変化させていることが分かる。

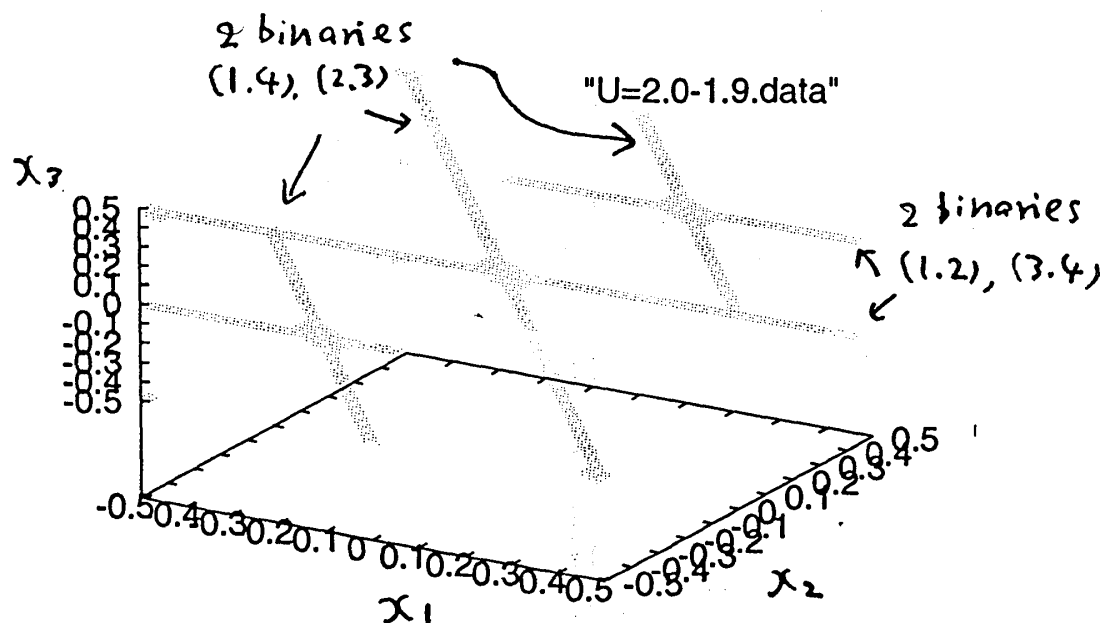


Figure 5: “ポテンシャル” 底付近: $-2 < U(x)/U_0 < -1.9$ を満たす点 x (eq.(4))

このモデルでは、複数の巨視的状态の間を移り変わる系のダイナミクスと相空間構造の関連を見た。ここでは状態間の遷移は主にクラスターの衝突によって起きていた。次の節では別のメカニズムを見てみる。

5 1次元重力多体系に置けるカオスの遍歴

ここでは1次元重力多体系のダイナミクスを紹介する [5, 3]。この系はこれまで紹介した系同様、

- 多粒子系である
 - 巨視的に区別できる複数の状態 (quasi-equilibria) を持つ
 - 系はそれらの状態の間を行き来する
- と言う特徴に加えて、後述のように、
- 状態間遷移の力学的メカニズムがわかっている

という特徴を持つ。

1次元重力多体系 (いわゆる「シートモデル」) は次のようなモデルである；

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} p_i^2 + (2\pi G m^2) \sum_{i<j} |x_i - x_j| \quad (5)$$

一粒子当りのエネルギーは

$$\varepsilon(i) = \frac{1}{2} v_i^2 + 2\pi G m \sum_{j=1}^N |x_i - x_j| \quad (6)$$

で与えられる。

この系の熱平衡状態においては、1体分布関数は次で与えられると考えられている；

$$f(x, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi, \quad \eta \equiv \sqrt{\frac{3M}{E}} \cdot \frac{v}{2}, \quad \xi \equiv \frac{3\pi G M^2}{2E} \cdot x \quad (7)$$

これは “isothermal 分布” と呼ばれている。

ナイーブに考えると、任意の初期状態から出発した系はしばらくの過渡的状态の後、式 (7) で与えられる isothermal 分布に落ち着くと予想される。

図 6 は、系の累積エネルギー分布の時間変化である。ここで系はある準定常状態 (図の◇-) から isothermal 分布 (図の●-) へ遷移した後、また別の準定常状態 (図の□-) へ逆行している。すなわち、系の緩和は単調ではない。

この非単調な変化が起きているときに、系の内部の状態がどうなっているかを見てみる。図 7 には各粒子のエネルギーの時間変化を示してある。(ここで、粒子のエネルギーの最大のもの、2 番目のもの、…をつないで示してある。実際には最大のエネルギーを持つ粒子は時々入れ替わっている。) ここで、系の巨視的状态が変化するとき、異常に大きなエネルギーを持った粒子が出現していることが分かる。各粒子は平均場ポテンシャルの中を振動しているわけであるが、平均場そのものが振動するために、共鳴により大きなエネルギーを持った粒子が出現する。このために全体のエネルギー配分が変化し、系は別の状態へと遷移するのである。模式的に書けば図 8 の様になる。

6 結び

この解説では大自由度ハミルトン系にみられる非熱的な巨視的状态間遷移について 3 つのモデルを通じて概観した。状態間遷移の仕方はそれぞれ次のようであった。図はそれぞれのモデルでの秩序状態の相空間内での分布を概念的に表したものである。巨視的な状態変化と微視的なダイナミクスの関連をまとめると次のようになる。

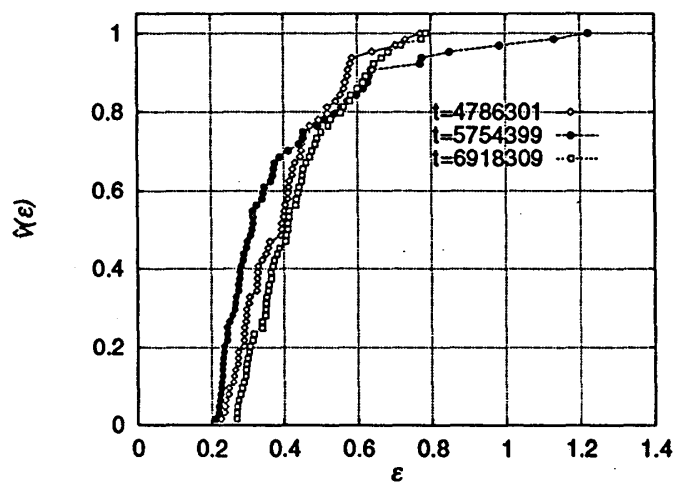


Figure 6: 系の累積エネルギー分布の時間変化。 $\hat{\nu}(\epsilon)$ はエネルギーが ϵ 以下である粒子の割合。

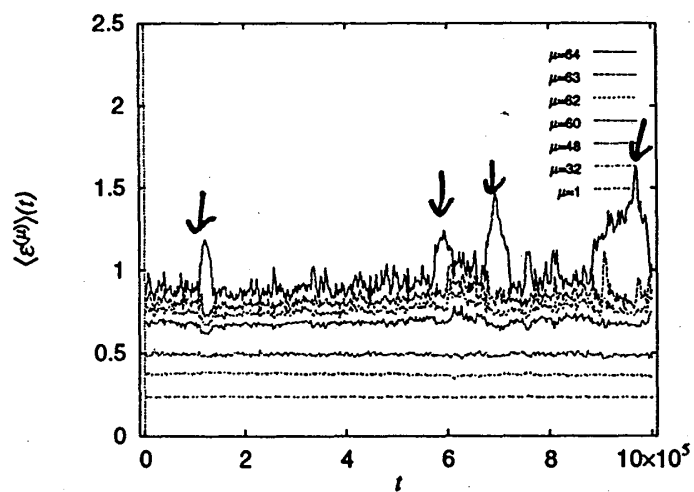


Figure 7: 各粒子のエネルギーの時間変化。時おり例外的に高いエネルギーの粒子が出現している。

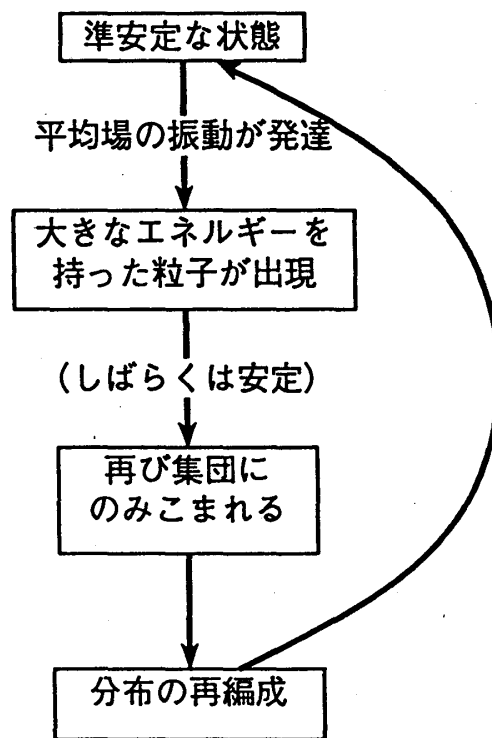


Figure 8: 1次元重力多体系での遷移過程のダイアグラム

- まず、Globally coupled symplectic map では、クラスター状態は相空間内の自己相似構造にトラップされた状態であり、微視的にはカオスであるが巨視的にはカオスであることによってその形態を維持していた。クラスター状態は徐々に壊れていき、状態間遷移の積極的な原因過程は不明であった。
- 次に、短距離型 symplectic map では、系は相空間内の細いパスを通して状態を変化させていく。変化はクラスター間の衝突による速い変化と、内部自由度間の共鳴による遅い変化によると思われる。
- 最後に、1次元重力多体系では、平均場の振動と1粒子周期運動の共鳴により巨大なエネルギーを持った粒子が出現することで、無数にある準安定状態の間を遷移する。

今後の問題としては、非熱的な状態間遷移にはこれらの他にどのようなプロセスがあるのか、また、heteroclinic cycle [6] や on-off intermittency [7] との関連がどうなっているかが興味深い。

References

- [1] T. Konishi and K. Kaneko. Clustered motion in symplectic coupled map systems. *J. Phys.*, Vol. A 25, pp. 6283 – 6296, 1992.
- [2] K. Kaneko and T. Konishi. Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional Hamiltonian dynamical systems. *Physica*, Vol. D 71, pp. 146–167, 1994.

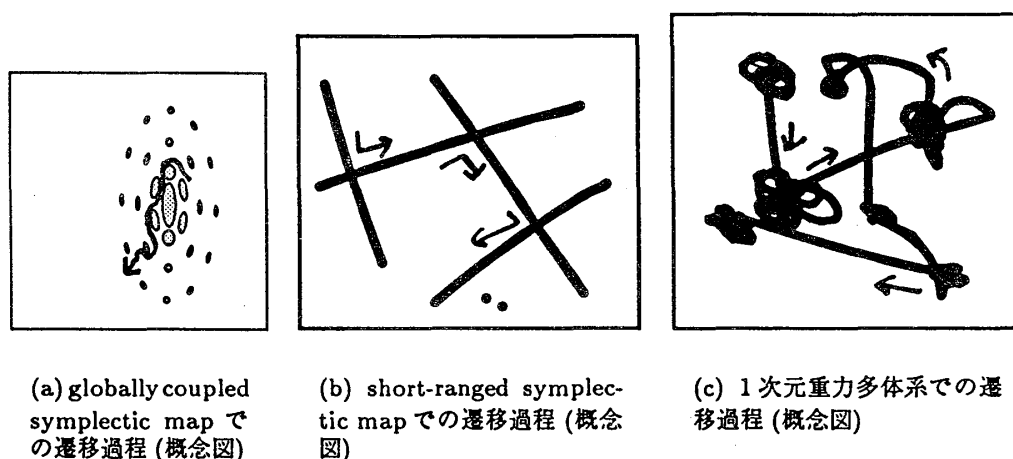


Figure 9: それぞれのモデルでの運動の概念図

- [3] 土屋, 郷田, 小西. 重力シート多体系の緩和過程とカオスの遍歴. 日本物理学会誌, Vol. 52, No. 10, p. 783, 1997.
- [4] こういうことを書くとどうも「ハミルトン系は難しい」と感じる人がいる様なのだが、実際の計算は (特にマップの場合は) とても簡単である。
- [5] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi. Chaotic itinerancy and thermalization in one-dimensional self-gravitating systems.
- [6] 茶碗谷毅. 生態系モデルでのサドル間遷移. 物性研究, Vol. 68, No. 5, pp. 572 – 576, 8 1997.
- [7] 秦浩起. オンオフ間欠性と大自由度カオス. 物性研究, Vol. 68, No. 5, pp. 577 – 580, 8 1997.