

G_2 -Geometry of Overdetermined Systems of Second Order

山口佳三 北海道大学大学院理学研究科

この講演では、次の E.Cartan の論文を出発点として、二階の接触幾何学について話したいと思います。

[C1] Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. Ec. Normale, 27 (1910), 109-192

実際、Cartan は、この論文の中で、つぎの過剰決定系 (involutive system) :

$$(A) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2.$$

ないし、つぎの放物型方程式 :

$$(B) \quad 9r^2 + 12t^2(rt - s^2) + 32s^3 - 36rst = 0.$$

(ここに $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ は古典的記号法です.) のシンメトリー, すなわちこれらの二階偏微分方程式 (系) を保つ無限小接触変換のなすリー環, が 14 次元例外型単純リー環 G_2 であることを見いだしています. この事実の検証を目標に, 表題の内容を明らかにして行きたいと思います.

§1. 二階の接触多様体. ここでは, 二階のジェット空間の幾何についておさらいをします ([Y1], [Y3]). 接触多様体の起源はつぎの接触要素 (contact element) の空間 [Grassmann Bundle] にあります. M を $(m+n)$ 次元の多様体とします. $J(M,n)$ を次で定めます.

$$J(M,n) = \bigcup_{x \in M} J_x, \quad J_x = Gr(n, T_x(M)).$$

ここに, $Gr(n, T_x(M))$ は, $T_x(M)$ の n 次元部分空間 (すなわち, M の n 次元接触要素) の成すグラスマン多様体です. $J(M,n)$ には自

然に $T(J(M, n))$ の部分束 C がつぎのように定まっています: $J(M, n)$ の各点 u において, 射影 $\pi: J(M, n) \rightarrow M$ の微分 $\pi_*: T_u(J(M, n)) \rightarrow T_x(M)$ を考えると $T_x(M)$ の n 次元部分空間 u は, $T_u(J(M, n))$ の余次元 m の部分空間 $C(u)$ をつぎで定めます.

$$C(u) = \pi_*^{-1}(u) \subset T_u(J(M, n)).$$

C は $J(M, n)$ 上の canonical system と呼ばれます. $J(M, n)$ の任意の点 u_0 の近傍には, つぎのような座標 (inhomogeneous Grassmann coordinate) が入ります: $x_0 = \pi(u_0)$ のまわりの M の座標近傍 $U': (z^1, \dots, z^m, x_1, \dots, x_n)$ を $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_{u_0} \neq 0$ なるように取ると u_0 の近傍 $U = \{u \in \pi^{-1}(U') \mid \pi(u) = x \in U' \text{ \& } dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|_u \neq 0\}$ における座標 $(z^1, \dots, z^m, x_1, \dots, x_n, p_1^1, \dots, p_n^m)$ がつぎで定まります.

$$dz^\alpha|_u = \sum_{i=1}^n p_i^\alpha(u) dx_i|_u \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

明らかに, この座標系 (正準座標系とよびます) で, C は, つぎで与えられます.

$$C = \{\varpi^1 = \dots = \varpi^m = 0\},$$

ここに, $\varpi^\alpha = dz^\alpha - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha dx_i$ ($\alpha = 1, \dots, m$) です.

$(J(M, n), C)$ は幾何学的な一階のジェット空間で, $m = 1$ の時, 接触多様体 (すなわち, C は $T(J)$ の余次元 1 の部分束で, 局所的に $C = \{\varpi = 0\}$ なる時, $\varpi \wedge (\varpi)^n$ は volume form. ここに, $J = J(M, n)$.) となっています. 二つの $(m + n)$ 次元多様体 $M, \hat{M}$ とその間の可微分同相写像 $\varphi: M \rightarrow \hat{M}$ に対して, φ は同型射 $\varphi_*: (J(M, n), C) \rightarrow (J(\hat{M}, n), \hat{C})$ (すなわち, $\varphi_*: J(M, n) \rightarrow J(\hat{M}, n)$ は可微分同相写像で C を $\hat{C}$ に移す) を誘導します. $m = 1$ が特別なのは, つぎの定理によります (cf. [Y3]).

定理 1.1 (Bäcklund) $M, \hat{M}$ を $(m + n)$ 次元多様体とする. $m \geq 2$ ならば, 同型射 $\Phi: (J(M, n), C) \rightarrow (J(\hat{M}, n), \hat{C})$ に対して, 可微分同相写像 $\varphi: M \rightarrow \hat{M}$ が存在して, $\Phi = \varphi_*$ となる.

$m = 1$ の時, 接触変換 (同型射) の全体が M の可微分同相写像のリフトより真に増大することは, よく知られた事実です. 従って, 幾何学的な二階のジェット空間を考えると, 未知関数の個数 m が 1 かそれ以上かで様子が異なって来ます. $m = 1$ の時, 接触多様体 (J, C)

を出発点として, (J, C) 上の Lagrange-Grassmann Bundle $(L(J), E)$ を考えます.

$$L(J) = \bigcup_{u \in J} L_u, \quad L_u = \{\text{Legendrian subspaces of } (C(u), d\varpi)\}.$$

$L(J)$ 上には, canonical system E がつぎのように定まります.

$$E(v) = \pi_*^{-1}(v) \subset T_v(L(J)) \quad \text{for } v \subset T_u(J), \quad u = \pi(v).$$

ここに, $\pi: L(J) \rightarrow J$ は射影. $L(J)$ の各点 v の近傍には, $u = \pi(v)$ の近傍の (J, C) の正準座標系 $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ を適当に取ることによって, 正準座標系 (x_i, z, p_i, p_{ij}) が入ります ($p_{ij} = p_{ji}$). 正準座標系で, E は, つぎで与えられます.

$$E = \{\varpi = \varpi_1 = \dots = \varpi_n = 0\}$$

ここに, $\varpi = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$, $\varpi_i = dp_i - \sum_{j=1}^n p_{ij} dx_j$ ($i = 1, \dots, n$) です. 二つの接触多様体 (J, C) , $(\hat{J}, \hat{C})$ とその間の接触変換 $\varphi: (J, C) \rightarrow (\hat{J}, \hat{C})$ に対して, φ は同型射 $\varphi_*: (L(J), E) \rightarrow (L(\hat{J}), \hat{E})$ を誘導します. 逆に, つぎが成り立ちます (cf. [Y1]).

定理 1.2 (J, C) , $(\hat{J}, \hat{C})$ を接触多様体とする. 同型射 $\Phi: (L(J), E) \rightarrow (L(\hat{J}), \hat{E})$ に対して, 接触変換 $\varphi: (J, C) \rightarrow (\hat{J}, \hat{C})$ が存在して, $\Phi = \varphi_*$ となる.

我々の最初の目標は, $(L(J), E)$ の部分多様体論を定式化することです.

§2. 微分式系の幾何 (田中理論). ここでは, 微分式系の幾何に対する田中理論 ([T1], [T2]) についておさらいをします.

2.1. 派生系と特性系. M を次元 N の多様体とし, D を M 上の微分式系とします. すなわち, D は M の接束 $T(M)$ の (階数 r の) 部分束です. M の各点の近傍では, 一次独立な $s = N - r$ 個の 1-微分形式 $\omega_1, \dots, \omega_s$ が取れて, 局所的には, D はつぎで与えられます.

$$D = \{\omega_1 = \dots = \omega_s = 0\}.$$

Frobenius の定理より、 (M, D) が完全積分可能 (すなわち、局所座標系 $(x_1, \dots, x_N)$ が取れて、 $D = \{dx_1 = \dots = dx_s = 0\}$) であるための条件はつぎで与えられます:

$$\begin{aligned} \iff d\omega_i &\equiv 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s} \quad \text{for } i = 1, \dots, s, \\ \iff [D, D] &\subset D, \quad \text{where } D = \Gamma(D). \end{aligned}$$

従って、non-integrable な微分式系に対する最初の手がかりとして、 D の派生系 (derived system) ∂D が考えられます。派生系 ∂D は、セクションのことばで、つぎで与えられます。

$$\partial D = D + [D, D].$$

また、 (M, D) の Cauchy 特性系 $Ch(D)$ は各点 x に於いて、つぎで定義されます。

$$Ch(D)(x) = \{X \in D(x) \mid X \lrcorner d\omega_i \equiv 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s} \text{ for } i = 1, \dots, s\}$$

$Ch(D)$ は、微分式系となる時 (ランク一定の時)、常に完全積分可能です (cf. [Y1])。

さらに高次 (k 次) の派生系 $\partial^k D$ が通常、帰納的につぎで与えられます (cf. [BCG₃])。

$$\partial^k D = \partial(\partial^{k-1} D).$$

これに対して、 k 次の弱派生系 (k -th weak derived system) $\partial^{(k)} D$ がつぎで定められます。

$$\partial^{(k)} D = \partial^{(k-1)} D + [D, \partial^{(k-1)} D].$$

弱派生系を用いるのが、田中理論の一つのポイントです ([T1])。この時、微分式系 (M, D) が正則 (regular) であるとは、すべての自然数 k に対して $D^{-(k+1)} = \partial^{(k)} D$ が $T(M)$ の部分束となっていることで定めます。

正則な (M, D) に対してつぎが成り立ちます。

(S1) ある $\mu \geq 1$ が存在して、

$$D = D^{-1} \subset D^{-2} \subset \dots \subset D^{-\mu} = \dots = D^{-k}$$

$$(S2) \quad [D^p, D^q] \subset D^{p+q} \quad \text{for any } p, q < 0.$$

2.2. Symbol Algebras. (M, D) を正則な微分式系で, $T(M) = D^{-\mu}$ とします. (M, D) の最初の不変量として, M の各点 x における (M, D) の表象代数 (symbol algebra) がつぎのように決まります ([T1]):

$$\mathfrak{m}(x) = \bigoplus_{p=-1}^{-\mu} \mathfrak{g}_p(x),$$

ここに, $\mathfrak{g}_{-1}(x) = D(x)$, $\mathfrak{g}_p(x) = D^p(x)/D^{p+1}(x)$ ($p < -1$). また, $\mathfrak{m}(x)$ の bracket 積がつぎで定められます.

$$[X, Y] = \varpi_{p+q}([\tilde{X}, \tilde{Y}]_x), \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}_p(x), Y \in \mathfrak{g}_q(x).$$

ここに, $\tilde{X} \in \Gamma(D^p)$, $X = \varpi_p(\tilde{X}_x)$, $\tilde{Y} \in \Gamma(D^q)$, $Y = \varpi_q(\tilde{Y}_x)$. (S2) より, これによって $\mathfrak{m}(x)$ は, 階別べき零 (nilpotent) リー環となり, つぎを満たします.

$$[\mathfrak{g}_{p+1}(x), \mathfrak{g}_{-1}(x)] = \mathfrak{g}_p(x), \quad \text{for } p < -1.$$

逆に, 生成条件 ($\mathfrak{g}_p = [\mathfrak{g}_{p+1}, \mathfrak{g}_{-1}]$ for $p < -1$) を満たす階別べき零リー環 $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p=-1}^{-\mu} \mathfrak{g}_p$ に対して, $M(\mathfrak{m})$ を $\mathfrak{m}$ をリー環とする単連結べき零リー群とします. $\mathfrak{m}$ を $M(\mathfrak{m})$ 上の左不変ベクトル場の成すリー環と同一視するとき, $\mathfrak{g}_{-1}$ は, $M(\mathfrak{m})$ 上の左不変微分式系 $D_{\mathfrak{m}}$ を定めます. 明らかに, $(M(\mathfrak{m}), D_{\mathfrak{m}})$ の各点での symbol algebras は $\mathfrak{m}$ と同型となります. $(M(\mathfrak{m}), D_{\mathfrak{m}})$ を Standard differential system of type $\mathfrak{m}$ と呼びます. $(M(\mathfrak{m}), D_{\mathfrak{m}})$ の無限小自己同型の成すリー環 $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ は, $\mathfrak{m}$ の prolongation として, 代数的に定められます. §4 では, $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ がいつ有限次元単純リー環になるかを議論します.

表象代数の例として, $(L(J), E)$ では, 各点でつぎの $\mathfrak{c}^2(n)$ と同型になります.

$$\mathfrak{c}^2(n) = \mathfrak{c}_{-3} \oplus \mathfrak{c}_{-2} \oplus \mathfrak{c}_{-1}$$

ここに, $\mathfrak{c}_{-3} = W$, $\mathfrak{c}_{-2} = W \otimes V^*$, $\mathfrak{c}_{-1} = V \oplus W \otimes S^2(V^*)$ であり; V, W は, それぞれ次元 n と 1 のベクトル空間です. bracket 積は, V と V^* の pairing から誘導されるもので, 他は, 0 とします. 実際, この同型は, $(L(J), E)$ の正準座標系を用いて, 任意の点での coframe $\{\varpi, \omega_i, dx_i, dp_{ij}\}$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) に対する dual frame

$\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{d}{dx_i}, \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\}$ を用いて容易に計算されます. $\{\frac{d}{dx_i}, \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\}$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) が, $\Gamma(E)$ の free base となっていることに注意します. ここに, $\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j}$ は, 古典的記号法です. また, E の派生系 ∂E がつぎを満たすことが容易にわかります.

$$\partial E = \{\varpi = 0\} = \pi_*^{-1}C, \quad Ch(\partial E) = \text{Ker} \pi_*.$$

§3. PD-多様体の幾何. ここでは, $(L(J), E)$ の部分多様体論を定式化します ([Y1]). R をつぎを満たす $L(J)$ の部分多様体とします.

$$(R.0) \quad p: R \rightarrow J \text{ submersion.}$$

ここに, $p = \pi|_R$ で, $\pi: L(J) \rightarrow J$ は射影です. 二階のジェット空間 $L(J)$ 上には, 二つの微分式系 $C^1 = \partial E$ と $C^2 = E$ があります. これらを, R に制限したものを D^1, D^2 とします. Canonical system E を定める 1-形式達 $\{\varpi, \varpi_1, \dots, \varpi_n\}$ の R への制限を同じ記号であらわすことにしますと, 条件 (R.0) よりこれらは一次独立であり, つぎが成り立ちます.

$$D^1 = \{\varpi = 0\}, \quad D^2 = \{\varpi = \varpi_1 = \dots = \varpi_n = 0\}.$$

実際, さらに $(R; D^1, D^2)$ は, つぎを満たします.

(R.1) D^1 と D^2 はそれぞれ余次元が 1 と $n+1$ の微分式系である.

$$(R.2) \quad \partial D^2 \subset D^1.$$

(R.3) $Ch(D^1)$ は D^2 の余次元 n の部分束である.

$$(R.4) \quad R \text{ の各点 } v \text{ に於いて, } Ch(D^1)(v) \cap Ch(D^2)(v) = \{0\}.$$

逆に, この 4 つの条件が, (R.0) を満たす $(L(J), E)$ の部分多様体の特徴付けます. すなわち, 我々は, 多様体とその上の二つの微分式系の triplet $(R; D^1, D^2)$ が, 4 つの条件 (R.1) から (R.4) を満たす時, PD 多様体と呼びます. PD 多様体には, つぎのような (局所的な) 実現定理が成り立ちます: 条件 (R.1) と (R.3) より, 完全積分可能系 $Ch(D^1)$ の定める foliation の余次元は, $2n+1$ ですが, 今, R は $Ch(D^1)$ について regular, すなわち leaves の空間 $J = R/Ch(D^1)$ は $2n+1$ 次元の多様体であるとし, この時, D^1 は J に落ちます. すなわち, J 上の余次元 1 の微分式系 C があって, $D^1 = p_*^{-1}C$ となります. ここに, $p: R \rightarrow J = R/Ch(D^1)$ は射影で, (J, C) は接

触多様体です. 条件 (R.1) と (R.2) はつぎの写像 ι の像が (J, C) の Legendrian subspace となることを保証しています.

$$\iota(v) = p_*(D^2(v)) \subset C(u), \quad u = p(v)$$

最後に条件 (R.4) は $\iota: R \rightarrow L(J)$ が immersion であることを示しています. さらに, つぎが成り立ちます.

定理 3.1. $(R; D^1, D^2)$, $(\hat{R}; \hat{D}^1, \hat{D}^2)$ を PD 多様体とし, $R, \hat{R}$ はそれぞれ $Ch(D^1)$, $Ch(\hat{D}^1)$ について regular とする. (J, C) , $(\hat{J}, \hat{C})$ を同伴する接触多様体とする. この時, 同型射 $\Phi: (R; D^1, D^2) \rightarrow (\hat{R}; \hat{D}^1, \hat{D}^2)$ は, 接触変換 $\varphi: (J, C) \rightarrow (\hat{J}, \hat{C})$ を誘導し, つぎの可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota} & L(J) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\iota}} & L(\hat{J}). \end{array}$$

これによって, $(L(J), E)$ の条件 (R.0) を満たす部分多様体論が, PD 多様体の幾何として定式化されました.

PD 多様体 $(R; D^1, D^2)$ に於いて, $D^1 = \partial D^2$ が成立すると, (R, D^2) の幾何となり田中理論が直接適用可能です. これについては, つぎの compatibility condition (C) のもとでつぎの定理が知られています.

(C) $p^{(1)}: R^{(1)} \rightarrow R$ は上への写像である.

ここに, $R^{(1)}$ は $(R; D^1, D^2)$ の first prolongation です ([Y1]).

定理 3.2. $(R; D^1, D^2)$ を条件 (C) を満たす PD 多様体とする. この時, R の各点 v に於いてつぎが成り立つ.

$$\dim D^1(v) - \dim \partial D^2(v) = \dim Ch(D^2)(v).$$

特に, $D^1 = \partial D^2 \iff Ch(D^2) = \{0\}$.

$\text{rank } Ch(D^2) > 0$ の場合には, PD 多様体 $(R; D^1, D^2)$ の幾何は, さらに (X, D) の幾何に reduction 可能です. ここに, $X = R/Ch(D^2)$ であり, $D^2 = \rho_*^{-1}D$, $\rho: R \rightarrow X$ です. 実際, (A) はこの例であり, $\dim X = 5$, $\text{rank } D = 2$ となっています.

§4. 単純階別リー環に付随する微分式系. ここでは, その prolongation が有限次元単純リー環となる Standard differential system を分類します ([Y5]). 話を簡単にするため, この節では, すべて複素数体上のリー環を考えます.

4.1. ルート系による単純階別リー環の分類. $\mathfrak{g}$ を ($\mathbb{C}$ 上の) 有限次元単純リー環とします. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とし, $\mathfrak{h}$ に関するルート系を $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ とします. Φ の 1 組の基底 (単純ルート系) $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ を取ると, すべての $\alpha \in \Phi$ は, Δ の (一斉に非負または一斉に非正の) 整係数一次結合でかけられ, $\mathfrak{g}$ はつぎのようにルート空間分解されます.

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

ここに, $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [h, X] = \alpha(h)X \text{ for } h \in \mathfrak{h}\}$ は, ($\alpha \in \Phi$ に対応する 1 次元の) ルート空間で, Φ^+ は正のルートの集合です.

今, Δ の空でない部分集合 Δ_1 を選ぶと, つぎのように Φ^+ が分割され, $\mathfrak{g}$ に gradation が入り, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は階別リー環となります:

$$\Phi^+ = \bigcup_{p \geq 0} \Phi_p^+, \quad \Phi_p^+ = \left\{ \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i \mid \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} n_i = p \right\}$$

$$\mathfrak{g}_p = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_p^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{-p} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_p^+} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q} \quad \text{for } p, q \in \mathbb{Z}.$$

この時, さらに, 負のパート $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p < 0} \mathfrak{g}_p$ は, 生成条件 ;

$$\mathfrak{g}_p = [\mathfrak{g}_{p+1}, \mathfrak{g}_{-1}] \quad \text{for } p < -1$$

を満たします. $\Delta_1 \subset \Delta$ からこうして得られた単純階別リー環 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p=-\mu}^{\mu} \mathfrak{g}_p$ を以降, (X_ℓ, Δ_1) であらわすことにします. ここに, X_ℓ は単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対応する Dynkin 図形をあらわし, Δ_1 はその頂点の部分集合をあらわしています. この時, $\mu = \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} m_i$ となることに注意します. ここに, $\theta = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i$ は Φ^+ の最高ルートです.

逆に, つぎが成り立ちます.

定理 4.1. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ を生成条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の単純階別リー環とする. $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形を X_ℓ とする. この時, X_ℓ の頂点の部分集合 Δ_1 が存在して, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は, (X_ℓ, Δ_1) と同型となる. (X_ℓ, Δ_1) の同型類はその diagram automorphisms で定まっている.

4.2. 単純階別リー環に付随する微分式系. 定理 4.1 により, 結果的に, 生成条件を満たす単純階別リー環 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ の分類は, $\mathfrak{g}$ の parabolic 部分環 $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{g}_p$ の分類に一致しています. 従って, 各単純階別リー環 (X_ℓ, Δ_1) に対して, 唯一つの R -space (compact simply connected homogeneous complex manifold) $M_{\mathfrak{g}} = G/G'$ が定まります. さらに, $\mu \geq 2$ なる場合には, $M_{\mathfrak{g}}$ 上に, $\mathfrak{g}_{-1}$ より G -不変な微分式系 $D_{\mathfrak{g}}$ が定まり, $(M(\mathfrak{m}), D_{\mathfrak{m}})$ (Standard differential system of type $\mathfrak{m}$) は, $(M_{\mathfrak{g}}, D_{\mathfrak{g}})$ の open dense 部分多様体となります. $(M_{\mathfrak{g}}, D_{\mathfrak{g}})$ の (従って, $(M(\mathfrak{m}), D_{\mathfrak{m}})$ の) infinitesimal automorphism については, つぎが成り立ちます.

定理 4.2. 生成条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の単純階別リー環 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は, つぎの例外 (1), (2), (3) を除いて, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p < 0} \mathfrak{g}_p$ の prolongation $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ に一致する.

- (1) $\mu = 1$, i.e., $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.
- (2) contact gradation, i.e., $\mu = 2$ & $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$.
- (3) $(X_\ell, \Delta_1) \cong (A_\ell, \{\alpha_1, \alpha_i\})$ ($i = 2, \dots, \ell - 1$) or $(C_\ell, \{\alpha_1, \alpha_\ell\})$.

ここで, 例外 (1), (2), (3) に対応する R -space はつぎの通りです. (1) は, コンパクト既約エルミート対称空間です. (2) は, Boothby type の接触多様体 (Standard contact manifold) で, 各複素単純リー環に対して唯一つ存在します (次節で議論します). (3) の場合, $(A_\ell, \{\alpha_1, \alpha_{i+1}\})$ には, $(J(\mathbb{P}^\ell, i), C)$ が, $(C_\ell, \{\alpha_1, \alpha_\ell\})$ には, $(L(\mathbb{P}^{2\ell-1}), E)$ が対応します. ここに, $\mathbb{P}^\ell$ は, ℓ -次元複素射影空間であり, $\mathbb{P}^{2\ell-1}$ は, Standard contact manifold of type C_ℓ です. (2), (3) は, 共に, 一階ないし二階のジェットの空間であることに注意します.

§5. G_2 - Geometry. ここでは, §3, §4 の議論を踏まえて, (A), (B) の一般化を考えます.

5.1. Standard contact manifolds. 各複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ は, 最高ルート θ を持ちます. §4 の構成より, contact gradation (X_ℓ, Δ_θ) は, この最高ルートを峻別する gradation (Φ^+ の分割) です. ここに, Δ_θ は, Extended Dynkin diagram に於いて, $-\theta$ と連結している X_ℓ の

頂点のなす Δ の部分集合です. また, θ を最高ウェイトにもつ既約表現として, $\mathfrak{g}$ の随伴 ($\cong$ 余随伴) 表現があります. (X_ℓ, Δ_θ) に対応する R -space J_θ は, θ のルートベクトルを通る G の (co)adjoint orbit の射影化として得られます. この構成より, J_θ は, (contact gradation (X_ℓ, Δ_θ) に対応する) 自然な接触構造 C_θ を持ちます. (cf. [Y5, §4]) Standard contact manifold (J_θ, C_θ) は, 当初, コンパクト単連結等質複素接触多様体として, Boothby によって見いだされています ([Bo]).

Extended Dynkin Diagram with the coefficient of Highest Root (cf. [Bu])

5.2. Gradation of G_2 . G_2 の Dynkin 図形はつぎで与えられます.

$$\begin{array}{c} \odot \\ \alpha_1 \end{array} \Leftarrow \begin{array}{c} \odot \\ \alpha_2 \end{array}, \quad \theta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

この場合, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ より, Δ_1 の選び方は, つぎの 3 通りです.

(G1) $\Delta_1 = \{\alpha_1\}$. この場合, $\mu = 3$ で, $\dim \mathfrak{g}_{-3} = \dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$ です. また, $(M_{\mathfrak{g}}, D_{\mathfrak{g}})$ は, (A) の (X, D) に一致しています.

(G2) $\Delta_1 = \{\alpha_2\}$. この場合は, contact gradation です.

(G3) $\Delta_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. この場合, $\mu = 5$ で, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$, 他は次元 1 です.

Standard contact manifold $(J_{\mathfrak{g}}, C_{\mathfrak{g}})$ of type G_2 に於いて, 例外群 G_2 の作用を $L(J_{\mathfrak{g}})$ にリフトすると, $L(J_{\mathfrak{g}})$ は, つぎのように, 軌道分解します:

$$L(J_{\mathfrak{g}}) = O \cup R_1 \cup R_2.$$

ここに, O は open orbit で, R_i は, 余次元 i の軌道です. この時, R_1, R_2 は, それぞれ $(B), (A)$ の global model と考えられます. さらに, R_2 は, コンパクトな軌道で, $(G_2, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ に対応する R -space となっています. この事実から, (A) に対応する PD 多様体 $(R; D^1, D^2)$ は $(G_2, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ に対応する R -space を用いて, 記述可能となります.

5.3. G_2 -geometry. Extended Dynkin diagram に於いて, A_{ℓ} type を除いて, Δ_{θ} は, 一つの simple root α_{θ} からなっています. もちろん, α_{θ} の最高ルートに於ける係数は, 2 です. さらに, 例外リー環では, 例外なく, α_{θ} の隣に, 最高ルートに於ける係数が, 3 である simple root α_G が存在します. $X_{\ell} \cong E_6, E_7, E_8, G_2, F_4$ に対して $(X_{\ell}, \{\alpha_G\})$ の定める gradation は, $\mu = 3$ で, $\dim \mathfrak{g}_{-3} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2\dim \mathfrak{g}_{-2}$ を満たします. さらに, $\mathfrak{g}_{-1}$ 同志の bracket 積を無視すれば, 他の部分の積は,

$$\mathfrak{g}_{-3} = W, \quad \mathfrak{g}_{-2} = V, \quad \mathfrak{g}_{-1} = W \otimes V^*$$

と記述されます. この事実が, $(X_{\ell}, \{\alpha_G\})$ に付随する微分式系 $(M_{\mathfrak{g}}, \partial D_{\mathfrak{g}})$ より (B) の一般化にあたる単独方程式 (Goursat 方程式) が構成され得る理由となります (cf. [Ts]).

また, 明らかに $(X_{\ell}, \{\alpha_{\theta}, \alpha_G\})$ の定める R -space は, $(X_{\ell}, \{\alpha_{\theta}\})$ の定める Standard contact manifold $(J_{\mathfrak{g}}, C_{\mathfrak{g}})$ 上のファイバー空間ですが, 実際, $L(J_{\mathfrak{g}})$ 内のコンパクト軌道として実現されます. これが, (A) の一般化となる過剰決定系を与えます. ただし, この時, PD 多様体としては, $\text{rank } Ch(D^2) = 1$ のケースで, (X, D) としては, $(X_{\ell}, \{\alpha_G\})$ が対応します.

参考文献

- [Bo] W. M. Boothby, Homogeneous complex contact manifolds, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., vol 3, (1961), 144-154.
- [Bu] N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 4,5 et 6, Hermann, Paris (1968).
- [BCG₃] R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. Goldschmidt, and P. Griffiths, Exterior differential systems, Springer-Verlag, New-York (1986).
- [C1] E.Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. Ec. Normale, vol 27 (1910), 109-192.
- [C2] E.Cartan, Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes, Bull. Soc. Math. France, vol 39 (1911), 352-443.
- [T1] N.Tanaka, On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups, J. Math. Kyoto Univ., vol 10 (1970), 1-82.
- [T2] N.Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J., vol 8 (1979), 23-84.
- [Ts] A.Tsuchiya, Geometric Theory of Second Order Partial Differential Equations, Lecture Notes, Nagoya University (1981), (in Japanese).
- [Y1] K.Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japanese J. of Math., vol 8 (1982), 109-176.
- [Y2] K.Yamaguchi, On involutive systems of second order of codimension 2, Proc. of Japan Acad., vol 58, Ser A, No.7 (1982), 302-305.
- [Y3] K.Yamaguchi, Geometrization of Jet bundles, Hokkaido Math. J., vol 12 (1983), 27-40.
- [Y4] K.Yamaguchi, Typical classes in involutive systems of second order, Japanese J. Math., vol 11 (1985), 265-291.
- [Y5] K.Yamaguchi, Differential systems associated with simple graded Lie algebras, Adv. Studies in Pure Math., vol 22 (1993), 413-494.
- [Y6] K.Yamaguchi, G_2 -geometry of overdetermined systems of second order, in preparation.

G_2 -Geometry of Overdetermined Systems of Second Order

By

Keizo YAMAGUCHI

Introduction.

Discovery of E. Cartan in

[C1] *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Ec. Normale. 27 (1910), 109-192

Overdetermined (involutive) system :

$$(A) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2.$$

Single equation of Goursat type:

$$(B) \quad 9r^2 + 12t^2(rt - s^2) + 32s^3 - 36rst = 0,$$

where

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

14-dimensional Exceptional Simple Lie Algebra G_2

The Plan of This TALK

Main Theme **Contact Geometry of Second Order**