

On a theorem of Koebe

北大 理学部 田中 博

§0 序文 N. Boboc and G. Mocanu [1] は開リーマン面上へ調和測度を用いて等角不変な距離を定義し、それを harmonic metric とよんだ。他方、T. Kuusalo [5] はリーマン多様体上へ曲線族のモジュールを使って距離を定義し、それを quasiconformal metric とよんだ。この報告 ([8] に含まれる) では、開リーマン面上で上の二つの距離の間にどのような関係があるかを調べ、さらに後者の距離を使って、Koebe の定理をリーマン面上で定義されている正則函数へ拡張する。この報告でモジュールに関連した結果はそのまま高次元空間の場合にも成り立つことに注意する。

§1 記号と準備 以下では [3] で用いられている記号や用語はそのまま使う。R を開リーマン面とし、K を R の退化しない連続体で、その補集合 $R_0 = R - K_0$ は連結とする。曲線族 Γ のモジュールは $M(\Gamma)$ であらわす。

G を R の部分領域とし, A, B を空でない G の部分集合とする. このとき $\Delta(A, B; G)$ で A と B を G 内で結ぶ曲線族の全体をあらわす. つぎの二つの補題が得られる.

補題 1. K を R のコンパクト部分集合とし, Γ_K で K から出発して, R 内に集積しない曲線族の全体をあらわす. このとき

$$M(\Gamma_K) = \|\omega(K)\|^2 = C(K)$$

が成り立つ. ただし, R が放物型るときはすべての K に対して $C(K) = 0$ と定めておく.

補題 2. K を R_0 のコンパクト部分集合とする. このとき, つぎが成り立つ.

$$M(\Delta(K, K_0; R)) = \|\tilde{\omega}(K)\|^2 = \tilde{C}(K).$$

§2 等角不変な距離とリーマン面の完備化

G を R の部分領域とし, $a, b \in G$ に対して, $C_{a,b}(G)$ で, a および b を含む G 内の連続体の全体をあらわす.

定義 1 [1] $z \in R$ を固定する. $a, b \in R - \{z\}$ K に対して,

$$H_z(a, b) = H_z(a, b; R) = \inf \{ \omega_z(K); K \in C_{a, b}(R - \{z\}) \}$$

と定める.

定義 2 [5, 7]. $a, b \in R_0$ に対して,

$$d(a, b) = d(a, b; R, K_0) = \inf \{ M(\Delta(K, K_0; R); K \in C_{a, b}(R_0)) \}$$

と定める.

定理 1 [1, 5, 7]. R を開リーマン面とする.

(1) H_z が $R - \{z\}$ 上の距離となるのは R が双曲型の時に限る.

(2) d は常に R_0 上の距離になる.

これらの距離から導入される位相は R の元の位相と一致する.

定義 3 (cf. [6]). G を R の相対コンパクトな領域とする.

G が $\xi \in \partial G$ で conformally connected (resp. quasi-conformally connected) であるとは, 単調減少する ξ の近傍の列 $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ で, 各 $U_k \cap G$ が連結で, かつ $\omega_z(U_k \cap G) \rightarrow 0$ (resp. $M(\Delta(U_k \cap G, K_0; G)) \rightarrow 0$)

$(K_0 \subset G)$ as $n \rightarrow \infty$ となるものが存在すると主をいう。
 ただし, $\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k = \{z\}$ は仮定しない。

とくに, G が ∂G の各点で conformally connected
 (resp. quasiconformally connected) であるとき, G は
 ∂G 上でそうであるという。

定義 4. 開リーマン面 R の H_z および d に関する完備化
 をそれぞれ R_H^* , R_d^* であらわす。

定理 2. G が R の相対コンパクトな領域で, かつ, ∂G 上
 conformally connected (resp. quasiconformally connected)
 ならば, G_H^* (resp. G_d^*) はコンパクトである。しかし,
 これらがコンパクトであっても, G が ∂G 上 conformally
 connected, あるいは quasiconformally connected
 であるとは限らない。

証明. G は ∂G 上 conformally connected であると仮定
 する。 K を z_0 を中心とした開円板で G に含まれるものとする。
 このとき仮定により $G - K$ が H_z に関して全有界な
 ことがわかる。従って G_H^* はコンパクトである。

つぎに, G として $\{ |z| < 1 \} - \{ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \}$ をとると,
 G は 単位開円板と等角同型であるから, G_H^* はコンパクト

になる。しかし容易にわかるように、 G は $\mathbb{R}G$ 上 (特に実軸上) $\text{conformally connected}$ ではない。quasiconformal part も全く同様である。

定理3. G が $\mathbb{R}G$ 上 quasiconformally connected ならば $\text{conformally connected}$ であり、従って、 G_H^* は G_d^* の商空間である。しかし G_d^* が G_H^* の商空間になるとは限らない。

証明 前半は容易に示される。後半の証明のために、[2]の定理1の証明に使われている例を使う。この例を少し変形して、radial slits を持つ単位円板 Ω は実軸に関して対称であるとしてよい。 $K_0 = \{ |z| \leq \frac{1}{2} \}$ とおくとき、この例は $M(\Delta(|z|=1), K_0; \Omega) = 2/\log 2$ であるが、 Ω の外部境界 $|z|=1$ の Ω に関する調和測度は0であることを示している。したがって、 Ω_H^* の位相では $|z|=1$ が一点に対応している。しかし Ω_d^* の位相では一点に対応していない。仮に、 Ω_d^* の位相でも $|z|=1$ が一点に対応していたとする。このとき実数列 $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ で、

$$r_n, -r_n \in \Omega, \quad r_n \rightarrow 1, \quad d(-r, r_n) \rightarrow 0$$

となるものが存在する。このとき、各 n に対して、 $\Omega - K_0$ のジョルダン弧 α_n で $-r_n, r_n$ を結び、かつ、

$$M(\Delta(\alpha_n, K_0; \Omega)) = \tilde{C}(\alpha_n) < 1/n$$

とすることが出来る。 $\bar{\alpha}_n$ で α_n の複素共役を表わし、
 $\beta_n = \alpha_n \cup \bar{\alpha}_n$ とおく。このとき β_n は $\{z=1\}$ と K_0 を
 分離するから、 Ω に関する仮定により、

$$\log 2|z|/\log 2 \leq \tilde{\omega}_2(\beta_n) \quad \text{in } \Omega - K_0 (n=1, 2, \dots)$$

が示される。これから

$$\tilde{C}(\beta_n) \geq 2/\log 2$$

が得られる。しかし、他方、 $\tilde{C}(\beta_n) \leq 2\tilde{C}(\alpha_n) < \frac{2}{n}$
 である。これは矛盾である。故に定理は証明された。

§3 Koelbe の定理の一般化

R を双曲型リーマン面とし、 p を R_0 上の距離とする。
 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は R_0 内の点列で、 R 内に集積点をもたず、
 ある $\delta > 0$ に対して、 $p(a_n, b_n) > \delta$ ($n=1, 2, \dots$) と
 なるものとする。各 n に対して、 $\alpha_n \in C_{a_n, b_n}(R_0)$ を
 とり、 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は R 内に集積しないとする。 f は
 R 上で定義されている正則函数で、 w_0 は複素平面 $\mathbb{C}$ 内の
 点とする。

定義 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \alpha_n} |f(z) - w_0| = 0$ となるのは $f(z) \equiv w_0$ のときに限るとき, Koebe の定理が組 (f, p) に対して成り立つという.

定理 4 ([1]). $p = H_2 (z \in R)$ で, f が有界ならば, Koebe の定理が組 (f, H_2) に関して成り立つ.

定義 6. $r > 0$ に対して,

$$G(r) = f^{-1}(\{ |w - w_0| < r \}), \quad A(r) = \iint_{G(r)} \left(\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \right)^2 dx dy$$

($z = x + iy$) とおく,

このとき, もし, $\lim_{r \rightarrow 0} A(r)/r^2 < \infty$ ならば, w_0 は Beurling の意味で "ordinary point" であるという.

我々は Koebe の定理をつぎのように拡張する. これが我々の主定理である.

定理 5. $p = d$ で, w_0 が f の ordinary point ならば, Koebe の定理が組 (f, d) に関して成り立つ.

証明. $f(z) \neq w_0$ と仮定する. $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を単調減少して 0 に近づく実数列とする. 各 n に対して,

$$F_n = f^{-1}(\{ |w - w_0| \leq r_n \})$$

とおく. w_0 を固定する. 十分大きな n に対して, $\alpha_n \subset F_{n_0}$

となるから

$$0 < \delta \leq d(a_n, b_n) \leq M(\Delta(\alpha_n, K_0; R))$$

$$\leq M(\Delta(F_{n_0}, K_0; R)) = \tilde{C}(F_{n_0})$$

が得られる. 他方, Z. Kuramochi は [4] の定理 9 の証明
のなかで, $\tilde{C}(F_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ を示している.

したがって, これは矛盾である. 故に定理は証明された.

系. K_0 を R 上の閉円板とする. l_1, l_2 を K_0 の中心から
出発する正則な Green 曲線で, $d(l_1 - K_0, l_2 - K_0) > 0$
となるものとする. $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は R 内に集積しない弧の列
で, 各 n に対して, $l_1 \cap \alpha_n \neq \emptyset$, $l_2 \cap \alpha_n \neq \emptyset$ とする.
このとき, R 上の正則関数 $f(z)$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \alpha_n} |f(z) - w_0| = 0$$

を満し, w_0 が f の ordinary point ならば,

$f(z) \equiv w_0$ である.

定理 3 を使うことにより, 次の定理が得られる.

定理 6. 定理 4 と定理 5 における仮定は独立である.

References

- [1] N. Boboc and G. Mocanu: Sur la notion de métrique harmonique sur une surface riemannienne hyperbolique. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Romaine 4 (52), (1961), 1 - 21.
- [2] C. Constantinescu: Ideale Randkomponenten einer Riemannschen Fläche. Rev. Math. Pures Appl., 4 (1959), 43 - 76.
- [3] C. Constantinescu and A. Cornea: Ideale Ränder der Riemannschen Flächen. Springer Verlag, 1963.
- [4] Z. Kuramochi: Correspondence of boundaries of Riemann surfaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I 17 (1963), 96 - 122.
- [5] T. Kuusalo: Generalized conformal capacity and quasi-conformal metrics. Seminar on Teichmüller Spaces and Quasi-conformal Mappings, (Braşov, Romania, 1969).
- [6] R. Näkki: Continuous boundary extension of quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I 511 (1972), 1 - 10.
- [7] H. Tanaka: Metrics induced by capacities and boundary behaviors of quasiconformal mappings on Riemann surfaces. Hokkaido Math. J. 5 (1976), No. 1, 145 - 154.
- [8] H. Tanaka: A generalization of Koebe's theorem to a Riemann surface. To appear.