

定数係数の方程式に対する C^∞ -Goursat 問題について

京大 理 (研修員) 長谷川幸子

§1. 解析関数のクラスにおける Goursat 問題は、今までに何人かの先人によって、かなり詳しく研究されているが、 C^∞ クラスにおける二種の問題は(筆者の知る限り)一般的には今まで殆んど取り扱う方法がなかった。この問題を解析する手法を提供し、問題の本質(特に Cauchy 問題との相違)を明らかにしたいと思う。ここでは定数係数で、初期面が一重特性面である場合についての考察をする。次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

$$(1.1) \quad P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) = \sum_{i+j+|d| \leq m} a_{ij,d} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^d$$

$$= = \text{" } \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, t \in \mathbb{R}_+^1, x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^l.$$

最高階(m 階)の項を P_m , $m-1$ 階の項を P_{m-1} , 残りを R_{m-2} とすれば、 P は次のようにあらわせる。

$$(1.2) \quad P = P_m + P_{m-1} + R_{m-2}.$$

$= = \text{" } P_m$ に対して次の仮定をおく。

1

仮定 1 $t=0$ は一重特性面である. 即ち

$$a_{m,0,0} = 0 \quad \text{かつ} \quad |a_{m-1,1,0}| + \sum_{|d|=1} |a_{m-1,0,d}| \neq 0.$$

仮定 2 $\partial_t^{m-1} \partial_x$ の係数; $a_{m-1,1,0} \neq 0$.

上の 2 つの仮定の下で、次の問題 (Goursat 問題) を $E_{t,x,y}$ の範ちゅうで考える。

$$(1.3) \quad P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) u(t, x, y) = f(t, x, y) \in E_{t,x,y}(t \geq 0),$$

$$(1.4) \quad \begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = u_i(x, y) \in E_{x,y}, & 0 \leq i \leq m-2 \\ u(t, 0, y) = \varphi(t, y) \in E_{t,y} & (t \geq 0). \end{cases}$$

== 7" $\{u_i(x, y)\}_{0 \leq i \leq m-2}$ と $\varphi(t, y)$ との間には、次の関係式 (いわゆる compatibility 条件) が成り立っているとする。

$$(1.5) \quad \partial_t^i \varphi(0, y) = u_i(0, y) \quad 0 \leq i \leq m-2.$$

定義 Goursat 問題が $\mathcal{E}$ -wellposed であるとは、任意の $\{u_i\}_{0 \leq i \leq m-2}$, $\varphi(t, y)$, $f(t, x, y)$ に対して、(1.3), (1.4) を満足する $u(t, x, y)$ が $E_{t,x,y}$ の中に一意的に存在する = とである。

Banach の closed graph theorem により、 $\mathcal{E}$ -wellposed 7" あれば、線形写像 $(\{u_i\}, \varphi, f) \longrightarrow u$ は、 $\prod_{i=0}^{m-2} E_{x,y} \times E_{t,y} \times E_{t,x,y}$ から $E_{t,x,y}$ の中への連続写像になる。

さらに次の仮定をかく (§6 参照)。

仮定 3 $P_m(\tau, \xi, \eta)$ と $P_{m-1}(\tau, \xi, \eta)$ の係数は実数である。

我々の得た結果は次のようなものである。

$$(1.6) \quad P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta)\tau^{m-1} + b_2(\xi, \eta)\tau^{m-2} + \dots + b_m(\xi, \eta)$$

とおく。 $b_1(\xi, \eta) \neq 0$ のとき、 P_m は τ の $m-1$ 次多項式である。このとき、(1.1) の特性方程式 $P_m(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根 $\tau_i(\xi, \eta)$ (1.1) の特性根といい、 $\tau_i(\xi, \eta) \quad 1 \leq i \leq m-1$ であらわそう。

定理1 Goursat問題 (1.3), (1.4) が ε -wellposed であるならば、 $(\xi, \eta) \in R^1 \times R^e$ に対して、特性根 $\tau_i(\xi, \eta)$ は、全て実数である。

この定理は、双曲型方程式の Cauchy問題に対する結果と類似である。しかし次の定理は Goursat 問題固有の性質であると思われる。

定理2 Goursat問題が ε -wellposed であるならば、

$P_m(\tau, \xi, \eta)$ は $b_1(\xi, \eta)$ で割り切れなければならない。即ち

$$(1.7) \quad P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta) \tilde{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta),$$

== である $\tilde{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta)$ は $m-1$ 次同次多項式である。

次に低階の部分 P_{m-1} に対する制約をのべる。仮定 1, 2, 3 の他にさらに次の仮定をおく。

仮定4 $\tilde{Q}_{m-1}(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は m 方向に強双曲型である。即ち、 $\tilde{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根 $\tau = \tau_i(\xi, \eta)$ は、 $(\xi, \eta) \in R^1 \times R^e$ に対して、全て実でかつ相異なる。

定理3 仮定 1 ~ 4 の下で、Goursat問題が ε -wellposed であるならば、 P_{m-1} は次の形でなければならない。

$$(1.8) \quad P_{m-1}(\tau, \xi, \eta) = c \mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + b_1(\xi, \eta) Q_{m-2}(\tau, \xi, \eta),$$

ここで c は定数. Q_{m-1} は, (τ, ξ, η) の $m-2$ 次同次多項式.

この定理は, 双曲型方程式の Cauchy 問題の Levi 条件に類似のものである. Cauchy 問題では, 特性根が重根になってはじめて Levi 条件が登場したが, Goursat 問題では, 特性根が単根であっても, どのような条件がでてくると $\epsilon=3$ は, 私には興味深く思われる. 十分条件については次の結果を得た.

定理 4 仮定 1~4 の下で, P_m, P_{m-1} 以上の 3 つの定理の条件をみたしているならば, 即ち

$$P = b_1(\xi, \eta) \mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + c \mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + b_1(\xi, \eta) Q_{m-2}(\tau, \xi, \eta) + R_{m-2}(\tau, \xi, \eta)$$

ならば, Goursat 問題は ϵ -wellposed である.

注意 1 方程式 (1.3) は一般性を失うことなく次の形であると考えよう.

$$(1.3)' \quad \partial_t^{m-1} \partial_x u + \sum_{\substack{i+j+k \leq m \\ i \leq m-2}} a_{ijk} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^k u = f.$$

実際, P_m の中で, ∂_t^{m-1} なる項を含むものは $(a_0 \partial_x + \sum_{j=1}^{\ell} a_j \partial_{y_j}) \partial_t^{m-1}$ であらわして, 独立変数変換 (仮定 2, 3 より可能である)

$$x' = \frac{1}{a_0} x, \quad y_j' = y_j - \frac{a_j}{a_0} x \quad j=1, 2, \dots, \ell$$

を行えば,

$$\partial_x = \frac{1}{a_0} \partial_{x'} - \frac{1}{a_0} \sum a_j \partial_{y_j'}, \quad \partial_{y_j} = \partial_{y_j'}$$

であるから, $a_0 \partial_x + \sum a_j \partial_{y_j} = \partial_{x'}$ かしらう。次に (1.3)

の ∂_t^{m-1} の係数を C として, $u = e^{-Cx'} \tilde{u}$ なる未知関数変換を行なう. すると $\partial_t^{m-1} \tilde{u}$ の係数は 0 になる. 上の変換で, Goursat data となる超平面 $t=0$ は不変であるし, $x=0$ は $x'=0$ に変換される. x', y' を改めて x, y とかけば, (1.3)' が得られる.

§2. 定理1の証明.

証明の方法は Mizohata [1] にしなう. 記述を簡略にするために, 記号を少し変えよう. $x_1, y_1, \dots, y_l$ の代りに $x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}$ とかきう. 注意1より,

$$(2.1) \quad P = \partial_t^{m-1} \partial x_1 + \sum_{\substack{i+j \leq m-1 \\ i \leq m-2}} \partial_t^i \partial x^j \quad \text{と考える.}$$

$$P(\partial_t, \partial x) = P_m(\partial_t, \partial x) + R_{m-1}(\partial_t, \partial x)$$

とかきう. Goursat問題が ε -well posed であってかつ実数でないような特性根があるとしよう. もう少し詳しく言えば, $\mathbb{R}^{l+1}$ の点 ξ^0 (そのホーミ座標, $\xi_1^0 \neq 0$ であるような) があって, $P_m(\xi, \xi^0) = 0$ が $\lim_{\xi \rightarrow \xi^0} P_m(\xi, \xi^0) \neq 0$ であるような根 $\xi = \xi_1(\xi^0)$ をもつとしよう. 必要ならば, $\xi^0 \in -\mathbb{R}^n$ におきかえる = といより.

$$(2.2) \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi^0} \xi_1(\xi^0) < 0 \quad (|\xi^0| = 1, \xi_1^0 \neq 0)$$

であるとしよう. さて $P(u) = 0$ をみるに u を評価しよう. そのために, x 空間と, ξ 空間の両方で局所化を行なう. 先

が $\beta(x) \in C_0^\infty$ としよう. $0 \leq \beta(x) \leq 1$ でありかつ原点の近傍で $\beta(x) \equiv 1$ とする. $\beta(x)$ を $pu = 0$ に作用さす.

$$(2.3) \quad P[\beta u] = [P, \beta] u.$$

次に $d(\xi) \in C_0^\infty$ とし, 次の条件をみたすものを選ぶ.

$\text{supp } d(\xi)$ は ξ_1 の小さな近傍にふくまれる. さらに $0 \leq d(\xi) \leq 1$, ξ_1 のある近傍で $d(\xi) \equiv 1$ かつ $d(\xi)$ の support 上で $\xi_1 \neq 0$.

$$d_m(\xi) = d\left(\frac{\xi}{m}\right)$$

とあらう. $d_m(D)$ を次で定義する.

$$d_m(D) u(x) = \mathcal{F}^{-1} [d_m(\xi) \hat{u}(\xi)], \quad u \in \mathcal{S}'.$$

この $d_m(D)$ を (2.3) に作用さす. P は定数係数であるから,

$$(2.4) \quad P[d_m \beta u] = d_m [P, \beta] u.$$

$P = P_m + R_{m-1}$ とあ, したがって,

$$(2.5) \quad P_m[d_m \beta u] = d_m [P, \beta] u - R_{m-1}[d_m \beta u].$$

(2.1) より P_m は $\mathcal{S}'$ のような形をしてゐる.

$$(2.6) \quad P_m(\partial_t, \partial_x) = \partial_{x_1} \partial_t^{m-1} + \sum_{j=2}^m g_j(\partial_x) \partial_t^{m-j}.$$

ここで $g_j(\xi)$ は, ξ に関する j 次同次式である. $d_m(\xi)$ の support の上で, $\xi_1 \neq 0$ を考慮して, 作用素 $(i\xi_1)^{-1}(D)$ を $\mathcal{S}'$ の式で定義する.

$$(i\xi_1)^{-1}(D)(d_m v) = \mathcal{F}^{-1} [(i\xi_1)^{-1} d_m(\xi) \hat{v}(\xi)].$$

明らかに $(i\xi_1)^{-1}(D)$ は ∂_{x_1} の逆である. 即ち

$$(i\xi_1)^{-1}(D) \partial_{x_1} (d_m v) = \partial_{x_1} (i\xi_1)^{-1}(D) (d_m v) = d_m v.$$

= の $(i\lambda_1)^{-1}(D)$ を (2.5) 式に作用すると ((2.6) を考慮すれば) フォの式が得られる。

$$(2.7) \left[d_t^{m-1} + \sum_{j=2}^m (i\lambda_1)^{-1}(D) g_j(d_x) d_t^{m-j} \right] (d_m \beta u) \\ = (i\lambda_1)^{-1}(D) \{ d_m [P, \beta] u - R_{m-1} [d_m \beta u] \}.$$

$t=0$ は, (2.7) 式では, もはや特性面ではない。(2.7) 式左辺の特性方程式は,

$$L^{m-1} + \sum_{j=2}^m (i\lambda_1)^{-1} g_j(i\lambda) L^{m-j} \equiv (i\lambda_1)^{-1} P_m(L, i\lambda) = 0.$$

= の方程式の $\lambda = \lambda_0$ における根を $L_1^0, L_2^0, \dots, L_{m-1}^0$ とおこう。

(2.2) より次の式が成り立つことより ([1] p. 116 参照)。

$$(2.8) \begin{cases} \operatorname{Re} L_i^0 - \varepsilon \geq 3\delta, & 1 \leq i \leq N_1, \\ \operatorname{Re} L_j^0 - \varepsilon \leq -3\delta, & N_1+1 \leq j \leq m-1. \end{cases}$$

(2.7) 式を t 方向の双曲型方程式とみる場合, 右辺に d_t^{m-1} という項があると, それは [1] と同じ方法では取り扱えない。

$d_t^{m-1}(d_m \beta_x u)$ の表現

= = で (2.7) 式の右辺で d_t^{m-1} をふくんでおく項: $(i\lambda_1)^{-1}(D) \cdot \{ d_m [P, \beta] u \}$ に注目しよう。

$$[P, \beta] u = - \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} P^{(\nu)} [\beta^{(\nu)} u]$$

であるから

$$(i\lambda_1)^{-1}(D) \{ d_m [P, \beta] u \} \\ = (i\lambda_1)^{-1}(D) \sum_{j=1}^p \frac{\partial P}{\partial \lambda_j} (d_t, d_x) (d_m d_{\lambda_j} \beta \cdot u) \\ - (i\lambda_1)^{-1}(D) \sum_{|\nu| \geq 2} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} P^{(\nu)} (d_t, d_x) (d_m d_x^\nu \beta \cdot u).$$

$P(\partial_t, \partial_x)$ の中で ∂_t^{m-1} という項をふくんでいるのは、 $\partial_t^{m-1} \partial_{x_1}$ という項だけである。よって上の式は次のように書ける。

$$(i\zeta_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(d_n \partial_{x_1} \beta \cdot u) + \sum'_{|\nu| \geq 1} C_\nu(\partial_t, D)(d_n \partial_x^\nu \beta \cdot u)$$

$C_\nu(\partial_t, D)$ は t に関しては微分, x に関しては擬微分作用素で、その order は $m - |\nu| - 1$ である。そして、 t に関する order は $m-2$ 以下である。記述の都合上、

$$(i\zeta_1)^{-1}P(d_n \beta u) \equiv [\partial_t^{m-1} + C_0(\partial_t, D)](d_n \beta u)$$

であらわそう。 C_0 は C_ν と同じ性質をもつ。これを便して、(2.7) 式は次のように書きあらわすことができる。

$$(2.9) \quad \partial_t^{m-1}(d_n \beta u) = (i\zeta_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(d_n \partial_{x_1} \beta \cdot u) + \sum'_{|\nu| \geq 0} C_\nu(\partial_t, D)(d_n \partial_x^\nu \beta \cdot u).$$

ここで C_ν の order は、 $m-1-|\nu|$ である。(2.9)で β の代りに $\partial_{x_1} \beta$ ($\equiv \beta_{x_1}$) を代入して式は

$$(2.10) \quad \partial_t^{m-1}(d_n \beta_{x_1} u) = (i\zeta_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(d_n \partial_{x_1}^2 \beta \cdot u) + \sum'_{|\nu| \geq 0} C_\nu(\partial_t, D)(d_n \partial_x^\nu \partial_{x_1} \beta \cdot u).$$

(2.10) を (2.9) に代入する。

$$(2.11) \quad \partial_t^{m-1}(d_n \beta u) = \left\{ (i\zeta_1)^{-1}(D) \right\}^2 \partial_t^{m-1}(d_n \partial_{x_1}^2 \beta \cdot u) + (i\zeta_1)^{-1}(D) \sum'_{|\nu| \geq 0} C_\nu(\partial_t, D)(d_n \partial_x^\nu \partial_{x_1} \beta \cdot u) + \sum'_{|\nu| \geq 0} C_\nu(\partial_t, D)(d_n \partial_x^\nu \beta \cdot u)$$

この操作をくりかえせば、任意の正の整数 k に対して、 k 回の式が得られる。

$$(2.12) \quad \partial_t^{m-1}(d_m \beta u) = (i\beta_1)^{-1} \partial_t^{m-1}(d_m \partial_{x_1}^{\beta_1} \beta \cdot u) \\ + \sum_{s=0}^{\beta_1} \left\{ (i\beta_1)^{-1} \right\}^s \sum_{|\nu| \geq 0} C_\nu(\partial_t, D) (d_m \partial_x^\nu \partial_{x_1}^s \beta \cdot u).$$

つぎに方程式の解を下方から評価しよう。

不等式

(2.7)式を system に直そう。(2.7)の右辺を f とおくと、

$$(2.7)' \quad \left[\partial_t^{m-1} + \sum_{j=2}^m (i\beta_1)^{-1} (D) \partial_j (\partial_x) \partial_t^{m-j} \right] [d_m \beta u] = f.$$

$$U = {}^t ((1+t)^{m-2}(\beta u), (1+t)^{m-3} \partial_t(\beta u), \dots, \partial_t^{m-2}(\beta u)) \\ \equiv E(1, \partial_t)(\beta u)$$

とあけば、(2.7)' はつぎのようにかける。

$$(2.13) \quad \partial_t(d_m U) = H \Lambda d_m U + B d_m U + F.$$

ここで $F = {}^t(0, \dots, 0, f)$, B は L^2 の有界作用素。

$$H(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ h_{m-1} & \dots & h_2 & h_1 \end{pmatrix}$$

ここで $h_j(\beta) = |\beta|^{-j} \partial_{\beta_{j+1}}(i\beta) / (i\beta_1)$. $H(\beta)$ は β に依りて、 0 次同次である。 H の定義より、

$$\det(\tau I - H(\beta)) = (i\beta_1)^{-1} P_m(\tau, i\beta), \quad \beta_1 \neq 0.$$

[1] p.117 と同様にして、つぎのようは non singular matrix N_0 が存在する。

$$N_0 H(\beta_0) N_0^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_1 & & 0 \\ \tilde{\tau}_2 & \ddots & \\ \tilde{a}_{ij} & & \tilde{\tau}_{m-1} \\ & & & \tilde{\tau}_{m-1} \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_0$$

$\Rightarrow \text{ } |a_{ij}| \leq \frac{\delta}{4m}$, (δ は(2.8)式にあらわれたもの).

(2.13) に N_0 を作用させると, つぎのようになる.

$$(2.14) \quad \partial_t d_m(N_0 U) = [\mathcal{Q}_0 + N_0 \{H - H(\xi^0)\} N_0^{-1}] \wedge d_m(N_0 U) \\ + N_0 B N_0^{-1} (d_m N_0 U) + N_0 F.$$

$$N_0 \{H(\xi) - H(\xi^0)\} N_0^{-1} = \mathcal{Q}_\varepsilon(\xi) = (a_{ij}^{(\varepsilon)}(\xi))_{1 \leq i, j \leq m-1}$$

とあらう. ξ^0 の近傍 V_{ξ^0} に十分小さくとれば, 任意の $\xi \in V_{\xi^0}$ に対して $|a_{ij}^{(\varepsilon)}(\xi)| \leq \frac{\delta}{4m}$ となる. $\text{supp}(d) \subset V_{\xi^0}$ となるように $d(\xi)$ をとろう.

$$\exp(-\varepsilon \wedge t) N_0 d_m U = V^{(m)} = {}^t(V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \dots, V_{m-1}^{(m)})$$

とあけは, (2.14) はつぎのようになる.

$$\partial_t V^{(m)} = (\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_\varepsilon - \varepsilon) \wedge V^{(m)} + N_0 B N_0^{-1} V^{(m)} \\ + \exp(-\varepsilon \wedge t) N_0 F.$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_1} \|V_i^{(m)}\|^2 - \sum_{j=N_1+1}^{m-1} \|V_j^{(m)}\|^2$$

とあらう. $\|\cdot\|$ は, x 空間の L^2 -norm である. $d(\xi)$ の support を十分小さくとれば, つぎの式が得られる.

$$\frac{d}{dt} S(t) \geq \delta' n \|V^{(m)}\|^2 - C \|V^{(m)}\| \cdot \|\tilde{F}\| \\ \geq \delta' n \|V^{(m)}\|^2 - \frac{C'}{n} \|\tilde{F}\|^2.$$

$\Rightarrow$ δ', C' は n に無関係な正の定数. $\tilde{F} = \exp(-\varepsilon \wedge t) N_0 F$.

結局次の式を得る

$$(2.16) \quad S'(t) \geq \delta' n \|V^{(m)}\|^2 - \frac{C}{n} \|\exp(-\varepsilon \wedge t) f\|^2.$$

C は n に無関係な定数.

定理1の証明

(2.1)が ε -well posed とする。はじめに Goursat 問題の解の列を定義しよう。即ち Goursat data の列を定義しよう。 $\hat{\psi}(z)$ を C^∞ 関数で、その support は z^0 の小さな近傍にふくまれるとする。さらに $\hat{\psi}(z)$ の support 上で $d(z)=1$ かつ $\int |\hat{\psi}(z)|^2 dz = 1$ とする。 ψ_{m+1} を、つぎの式で定義する。

$$(2.17) \quad \hat{\psi}_{m+1}(z) = \hat{\psi}(z - m z^0)$$

すなわち

$$(2.18) \quad \psi_{m+1}(x) = \exp(i m z^0 x) \psi(x).$$

つぎの Goursat data を満足するような $Pu = 0$ の解 $u_m(t, x)$ とする。

$$(2.19) \quad \begin{cases} N_0 E(1, \partial_t) u_m(0, x) = {}^t(\psi_m(x), 0, \dots, 0) \\ u_m(t, 0, x') = \varphi_m(t, x') = \sum_{i=0}^{m-2} \partial_t^i u_m(0, 0, x') t^i / i! \end{cases}$$

(2.19) は明らかに compatibility 条件をみたす。(2.19) は、つぎのようにも書ける。

$$(2.20) \quad \begin{cases} \partial_t^i u_m(0, x) = \eta^{-1}(c_i \psi_m(z) / (|z|+1)^{m-2-i}) & 0 \leq i \leq m-2 \\ u_m(t, 0, x') = \varphi_m(t, x'). \end{cases}$$

[1] p.119 と同様の計算で、

$$(2.21) \quad \|d_m N_0 E(1, \partial_t) \beta u(0, x)\| = c + o\left(\frac{1}{m}\right)$$

とうる。 $c = c''$, c は正の定数。

さて、(2.1)式で、 $u = u_m(t, x)$ とおこう。 ε -well posed の仮定

から, 正の整数 k と, x 空間における O の近傍 Ω と, $T'(>0)$ が存在して,

$$(2.22) \max_{x \in \Omega} |\partial_t^i u_n(x, t)| \leq O(n^k), \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq t \leq T'$$

が成り立つ。ここで $\beta(x)$ の support は小さくとり,

$\text{supp } \beta(x) \subset \Omega$ とすれば,

$$(2.23) \|\beta(x) \partial_t^i u_n(t, x)\| \leq O(n^k), \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq t \leq T'$$

が成り立つ。

(2.7) の右辺にあらわれてくる $(i\zeta_1)^{-1}(D) d_n \partial_{x_1} \beta \partial_t^{m-1} u_n$ なる項は, [1] ではあらわれない項である。この項について, (2.12) 式を用いる。(2.23) より,

$$\|(i\zeta_1)^{-k} \partial_t^{m-1} (d_n \partial_{x_1}^k \beta \cdot u_n)\| \leq C(\text{定数})$$

であるから, (2.12) で $k = k$ とすれば, $\partial_t^{m-1} (d_n \beta u_n)$ は, Cauchy 問題のときにあらわれるような項と, L^2 -norm で有界(n に依りて)な項との和であらわすことができる。こうしておけば, [1] と同じ取り扱いができて,

$$(2.24) \quad S_n(t) \geq C \exp\left(\frac{\sigma'}{2} n t\right) - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る。 $S_n(t)$ の定義については [1] p124 を参照。一方 ε -well posed の仮定から, $S_n(t)$ は, n に依りて多項式の order であらなければならない。これは (2.24) に矛盾する。

§3. 定理2の証明.

方程式(1.3)'を考えよう。はじめに $y \in \mathbb{R}^1$ のときについて定理2を証明する。このとき(1.3)'で $f=0$ とおいた式はつぎのようになる。

$$(3.1) \quad \partial_t^{m-1} \partial_x u = \sum_{\substack{i+j+k \leq m \\ i \leq m-2}} a_{ijk} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^k u.$$

定理2の主張は、 ε -well posed ならば、 $a_{m-i,0,i} = 0, 2 \leq i \leq m$.

はじめに証明の概略をのべてよう。まず $a_{m-2,0,2} = 0$ を示す。

詳しく云えば、 ε -well posed と $a_{m-2,0,2} \neq 0$ を仮定して、(3.1)の解の列で、Goursat data から、解への連続性がありたいようなもの構成する。次に $a_{m-i,0,i} = 0 \quad (3 \leq i \leq m)$ を次の方法で示す。即ち $a_{m-2,0,2} = 0$ かつ $\sum_{i=3}^m |a_{m-i,0,i}| \neq 0$ とすれば、特性多項式 $P_m(t, \xi, \eta) = 0$ が虚根をもつことが示され、定理1より、 ε -well posed であることに反する。

前記後半の証明は簡単であるので(詳しくは[3]参照)ここでは前半の部分の証明をしようと思う。(3.1)で $u = e^{i\eta y} v(t, x)$ とおこう。 η は実数とする。 $v(t, x)$ のみたすべき方程式は、

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \partial_t^{m-1} \partial_x v(t, x) \\ &= [a_{m-2,0,2} (i\eta)^2 + a_{m-2,0,1} (i\eta) + a_{m-2,0,0}] \partial_t^{m-2} v \\ &+ (a_{m-2,2,0} \partial_x^2 + a_{m-2,1,1} (i\eta) \partial_x + a_{m-2,1,0} \partial_x) \partial_t^{m-2} v \\ &+ \sum_{i \leq m-3} a_{ijk} (i\eta)^k \partial_t^i \partial_x^j v. \end{aligned}$$

ゆえに、 $x \rightarrow -x$ に変換する = により、 $a_{m-2,0,2} < 0$

であると仮定できる。(3.2)式右辺の第一項と $(a\eta^2 + ib\eta + c)\partial_t^{m-2}V$,
 $(a > 0)$ と書こう。 $\eta > 0$ で $+\infty$ に近づいた時の(3.2)の解の挙
 動を見よう。そのため,

$$\zeta = \sqrt{a\eta^2 + ib\eta + c}, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0$$

としよう。 $\eta \rightarrow +\infty$ のとき,

$$\zeta = \sqrt{a}\eta + i \frac{b}{2\sqrt{a}} + O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

になる。これより,

$$|\zeta| = \zeta + O\left(\frac{1}{\eta}\right) = \zeta + O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)$$

がしめがう。さて、(3.2)の解で、次のような Goursat data
 を与えるものを考えよう。

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t^i V(0, x) = 0 & 0 \leq i \leq m-3 \\ \partial_t^{m-2} V(0, x) = 1 \\ V(t, 0) = t^{m-2}/(m-2)! \end{cases}.$$

(3.3)の第一式より,

$$(3.4) \quad V(t, x) = \sum_{p \geq 0, q \geq 0} V_{pq} \frac{t^{m-2+p}}{(m-2+p)!} \cdot \frac{x^q}{q!}$$

としよう。第2, 第3式より

$$(3.5) \quad V_{00} = 1, \quad V_{0q} = 0 \quad q \geq 1, \quad V_{p0} = 0 \quad p \geq 1$$

がしめがう。(3.4)を(3.2)に代入して、両辺の $t^r x^s$ の係数をくらべれば、つぎの式が得られる。

$$(3.6) \quad V_{r+1, s+1} = \zeta^2 V_{r, s} + (a_{m-2, 2, 0} V_{r, s+2} + a_{m-2, 1, 1}(i\eta) V_{r, s+1} \\ + a_{m-2, 1, 0} V_{r, s+1}) + \sum_{i \leq m-3} a_{i, j, k}(i\eta)^k V_{r+i-(m-2), s+j}.$$

(3.5) と (3.6) より $V_{p,q}$ は一意的に決まる。特に Goursat data の形から、 $\lambda, \bar{\lambda}$ として

$$(3.7) \quad V_{pp} = \zeta^{2p} \quad p \geq 0, \quad V_{p,q} = 0 \quad q > p$$

が得られる。次に η が大きい時の $V_{p,q}$ ($q < p$) と評価しよう。

$\eta < \text{const} \cdot |\beta|$ と考慮すれば、

$$(3.8) \quad |V_{r,s}| \leq \frac{r!}{s!} |\beta|^{2s} (C|\beta|)^{r-s}, \quad s \leq r$$

が得られる。証明は、数式的帰納法による。[3] 参照。また、

$$\partial_t^{m-2} v = \sum_{p,q} \frac{t^p}{p!} \frac{x^q}{q!} V_{p,q} \text{ と下から評価しよう。 } t, x \geq 0 \text{ とし}$$

て、右辺の和を、 $p=q$ の部分と $p \neq q$ の部分に分けてみる。

($V_{p,q} = 0 \quad q > p$ であるから) (3.8) を使えば、

$$\begin{aligned} |\partial_t^{m-2} v(t, x; \eta)| &\geq \left| \sum_{p \geq 0} V_{pp} \frac{t^p x^p}{(p!)^2} \right| - \left| \sum_{q < p} V_{p,q} \frac{t^p x^q}{p! q!} \right| \\ &\geq \left| \sum_{p \geq 0} V_{pp} \frac{(tx)^p}{(p!)^2} \right| - \sum_{q < p} t^p \frac{x^q}{(q!)^2} |\beta|^{2q} (C|\beta|)^{p-q}. \end{aligned}$$

上式の第2項は、

$$\begin{aligned} &\sum_{q \geq 0} \frac{|\beta|^{2q}}{(q!)^2} x^q \sum_{p: p \geq q} t^p (C|\beta|)^{p-q} \\ &= \sum_{q \geq 0} \frac{|\beta|^{2q}}{(q!)^2} x^q t^q \sum_{j \geq 1} (C|\beta|)^j t^j \end{aligned}$$

であるから、結局次の評価が得られる。

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |\partial_t^{m-2} v(t, x; \eta)| &\geq \sum_{q \geq 0} \frac{|\beta|^{2q}}{(q!)^2} (xt)^q \left\{ 1 - \sum_{j \geq 1} (C|\beta|)^j t^j \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{q \geq 0} \frac{|\beta|^{2q}}{(q!)^2} (xt)^q - \sum_{q \geq 0} \frac{\zeta^{2q}}{(q!)^2} (xt)^q \right\}. \end{aligned}$$

Bessel 関数の性質を用いれば ([3] 参照)

$$(3.10) \quad \left| \partial_t^{m-1} v(t_3, x_0; \eta) \right| \geq \exp(\delta' \sqrt{|\beta|}) \quad (0 < \delta' < \delta)$$

が得られる。ここで $t_3 = \frac{1}{3C|\beta|}$, x_0 は正で固定されたいものである。さて, $u = e^{i\eta y} v(t, x)$ であらうから, (3.3) より

$$(3.11) \quad \begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = 0 & 0 \leq i \leq m-3 \\ \partial_t^{m-2} u(0, x, y) = e^{i\eta y} \\ u(t, 0, y) = e^{i\eta y} t^{m-2} / (m-2)! \end{cases}$$

ε -wellposed の仮定より, $\partial_t^{m-2} u(t, x, y)$ は $\eta \rightarrow +\infty$ のとき η の, したがって $|\beta|$ の多項式 order をもつ。一方 (3.10) より,

$\partial_t^{m-2} u(t_3, x_0, y)$ は $|\beta|$ の exponential order をもっている。これは矛盾である。

最後に $y \in \mathbb{R}^l$ のときを考えよう。(1.3)' で $f=0$ とおいた式は次のようになる。

$$(3.12) \quad \partial_t^{m-1} \partial_x u = \sum_{\substack{i+j+|\alpha| \leq m \\ i \leq m-2}} a_{ij\alpha} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^\alpha u.$$

定理 2 の主張は, ε -wellposed ならば, $\sum_{|\alpha|=i} |a_{m-i, 0, \alpha}| = 0$,

$2 \leq i \leq m$. もし $\sum_{|\alpha|=i} |a_{m-i, 0, \alpha}| \neq 0$ であれば, 適当な独立変数変換により, $\partial_t^{m-i} \partial_{y_1}^i$ の係数が 0 ではないようにできる。 $u = u(t, x, y_1)$ として $y_2 \cdots y_l$ には頼らないような解を考えれば, $l=1$ の場合に帰着できる。 $i=3, \dots, m$ の場合についても, $l=1$ の場合と同様にやればよい。[3] 参照。

§ 4, 定理3の証明.

基本的な証明の方針は、定理1の証明の時と同じである。
詳しく記していれば、非常に長くなるので、概略をのべよう
と思う。(1.3)より

$$(4.1) \quad P(\tau, \zeta, \eta) = \tau^{m-1} \zeta - \sum_{i \leq m-2} a_{ij} \tau^i \zeta^j \eta$$

$$\equiv P_m(\tau, \zeta, \eta) + P_{m-1}(\tau, \zeta, \eta) + R_{m-2}(\tau, \zeta, \eta)$$

とおく。 P_m, P_{m-1} は夫々 m 次, $m-1$ 次の同次多項式, R_{m-2} は, $m-2$ 次の多項式である。(4.1)より, P_{m-1} の中の τ^{m-1} の係数は0である。さらに定理2より $P_m = \zeta \dot{Q}_{m-1}(\tau, \zeta, \eta)$ である。

$$(4.2) \quad P_{m-1} = \zeta \dot{Q}_{m-2}(\tau, \zeta, \eta) + \dot{P}_{m-1}(\tau, \eta)$$

とおく。ここで $\dot{Q}_{m-2}, \dot{P}_{m-1}$ は夫々 $m-2$ 次, $m-1$ 次の同次多項式である。これより,

$$(4.3) \quad P = \zeta(\dot{Q}_{m-1} + \dot{Q}_{m-2}) + \dot{P}_{m-1}(\tau, \eta) + R_{m-2}$$

$$\equiv \zeta \dot{Q}_{m-1} + \dot{P}_{m-1}(\tau, \eta) + R_{m-2}.$$

証明したいことは, " $\dot{P}_{m-1}(\tau, \eta) \neq 0$ ならば, Goursat 問題は, ε -well posedではない" ということである。 $\dot{P}_{m-1}(\tau, \eta) \neq 0$ としよう。 $\dot{P}_{m-1}(\tau, \eta^0) \neq 0$ なる $\eta^0 \in \mathbb{R}^l$ が存在する。 $P_m + P_{m-1}$ を主要部とみて, $P_m(\tau, i\zeta, i\eta) + P_{m-1}(\tau, i\zeta, i\eta) = 0$ の根を $\zeta = \sqrt{\lambda}$, $\eta = \lambda \eta^0$ ($\lambda > 0$, 十分大) の近傍で考えると, 次の問題を導く。

補題 4.1 $\dot{Q}_{m-1}(\tau; \zeta, \eta) = 0$ かつ $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^l, (\zeta, \eta) \neq (0, 0)$

に対して、実で相異なる根 $\{\lambda_i(z, \eta), 1 \leq i \leq m-1\}$ をもつとする。さらに $\hat{P}_{m-1}(\tau, \eta^0) \neq 0$ $\eta^0 \in \mathbb{R}^l$ とする。このとき、特性多項式

$$(4.4) \quad i\{Q_{m-1}(\tau, i\lambda, i\eta) + \hat{P}_{m-1}(\tau, i\eta)\} = 0$$

の根 $\{\tau_i(z, \eta)\}_{1 \leq i \leq m-1}$ は、つぎのような評価をもつ。

$$(4.5) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \tau_i > \delta \sqrt{\lambda}, & 1 \leq i \leq N_1, & N_1 \geq 1, \delta > 0. \\ |\operatorname{Re} \tau_i| \leq C(\text{定数}) & N_1+1 \leq i \leq N_2 \\ \operatorname{Re} \tau_i < -\delta \sqrt{\lambda} & N_2+1 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

$(z, \eta) \in V_\lambda$, $\lambda > 0$. 十分大.

$$V_\lambda = \{(z, \eta); |z - \varepsilon_0 \sqrt{\lambda}| < \varepsilon \sqrt{\lambda}, |\eta - \lambda \eta^0| < \varepsilon \lambda\} = \tau'' \varepsilon_0$$

は、 τ_1 または $-\tau_1$ で、そのどちらになるかは $Q_{m-1}(\tau, z, \eta) = 0$ の根と $\hat{P}_{m-1}(\tau, \eta)$ によって決まる。

この補題の証明には、ヒューズ層を用いる。詳しくは(3)をみて下さい。 $\beta(z, \eta), d(z, \eta) \in \mathbb{C}^2$ で定義した関数として、 $Pu = 0$ に作用すると、

$$(4.6) \quad P[d\beta u] = - \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} P^{(\nu)}[d\beta^{(\nu)} u].$$

§2 では、 $d_m = d(\frac{z}{m}, \frac{\eta}{m})$ とおいた上で、 $m \rightarrow \infty$ のとき、

z, η 向の m の増大 order が同じであらう。こゝでは、補題の V_λ を考慮して、 z は $\sqrt{m}$ の order で、 η は m の order で増大せよ。そのため、 d_t, d_y の order は 1, d_x の order は $\frac{1}{2}$ とみて、(4.6) の両辺の order をみてみよう。左辺の order

は、 $m-1+\frac{1}{2}$ である。 $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$ の order は $m-1$ である。右辺の他の項は、 $\leq m-1-\frac{1}{2}$ である。したがって右辺の最も高い order の項は、 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P[d, \beta_x u]$ である。この項は、§2 と同じ方法では、取り扱えない。order が左辺 (主要部) にくらべて 1 は上り下り項であるならば、同じ取り扱いがでる。さて問題の項：
 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P[d, \beta_x u]$ は次のように処理する (溝畑先生の idea による)。

$$P = \bar{\partial} Q_{m-1}(\tau, \bar{z}, u) + \bar{P}_{m-1}(\tau, u) + R_{m-2}(\tau, \bar{z}, u)$$

であるから、

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} P = Q_{m-1} + \bar{\partial} \frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \bar{z}}.$$

(4.6) で $\beta \in \beta_x$ でありかえれば、

$$(4.8) \quad P[d, \beta_x u] = - \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} P^{(\nu)} [d(\beta_x)^{(\nu)} u].$$

$d(\bar{z}, u)$ の support の上で $\bar{z} \neq 0$ とすれば、§2 と同様に $(i\bar{z})^{-1}(D)$ が定義できる (この order は $-\frac{1}{2}$ と考える)。これを
 使えば、

$$(4.9) \quad Q_{m-1}(d\beta_x u) = -(i\bar{z})^{-1}(D)(\bar{P}_{m-1} + R_{m-2})[d\beta_x u] \\ - \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} (i\bar{z})^{-1}(D) P^{(\nu)} [d(\beta_x)^{(\nu)} u].$$

とすると (4.6) と (4.7) より

$$P(d\beta u) = \left[Q_{m-1} + \bar{\partial} \frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \bar{z}} \right] (d\beta_x u) \\ - \sum'_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} P^{(\nu)} (d\beta^{(\nu)} u)$$

である。ここで Σ' は $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P$ なる項をふくまないものをあらわす。
 上式に (4.9) を代入すれば、

$$\begin{aligned}
P(d\beta u) &= -(iz)^{-1}(D)(\dot{P}_{m-1} + R_{m-2})(d\beta_x u) \\
&\quad - \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} (iz)^{-1}(D) P^{(\nu)}[d(\beta_x)^{(\nu)} u] \\
&\quad + \left(\partial_x \frac{\partial Q_{m-1}}{\partial z} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial z} \right) (d\beta_x u) - \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} P^{(\nu)}(d\beta^{(\nu)} u).
\end{aligned}$$

結局次の式を得る。

$$(4.10) \quad P(d\beta u) = \sum_{|\nu| \geq 1} C_\nu (\partial_t, \partial_x, \partial_z, (iz)^{-1}(D)) (d\beta^{(\nu)} u).$$

左辺の order は $m-1+\frac{1}{2}$. 右辺は $m-1-\frac{1}{2}$. 以後(4.10)で $P_m + P_{m-1}$ を主要部, R_{m-2} を低階とみて, §2 の (2.16) に対応する式を求めないのである. §2 では方程式を system に直し, 主要部の行列を三角化したが, 今の場合, 三角化では, 非対角元の部分の評価がうまくゆかないので, 対角行列に直す. 二で仮定4 ($\dot{Q}_{m-1}$ が強双曲型) が利してくる. 詳しくは(3)を参照.

§5. 定理4の証明.

定理の仮定より P は次の形をしてゐることを考えよう.

$$\begin{aligned}
P(\tau, z, \eta) &= z \dot{Q}_{m-1}(\tau, z, \eta) + z \dot{Q}_{m-2}(\tau, z, \eta) + R_{m-2}(\tau, z, \eta) \\
&\equiv z \dot{Q}_{m-1} + R_{m-2}.
\end{aligned}$$

さらに, 一般性を失うことなく, Goursat data は 0 であるとしてよい. 記述を簡略にするために, 記号を少し変えよう.

$(x, y_1, \dots, y_e)$ の代りに $(x_1, x_2, \dots, x_{e+1})$, $(z, \eta_1, \dots, \eta_e)$ の代りに $(z_1, z_2, \dots, z_{e+1})$ と書こう. 結局成すは, 次の Goursat 問題を考えよう.

$$(5.1) \quad Q_{m-1} \partial_{x_1} u = R_{m-2} u + f \quad f \in E_{t,x}$$

$$(5.2) \quad \begin{cases} \partial_t^i u(0, x) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ u|_{x_1=0} = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, x') = (x_1, x_2, \dots, x_{l+1}), \quad x \in \mathbb{R}^{l+1}.$$

ここで Q_{m-1} は order $m-1$ の微分作用素であり、かつ t 方向に強双曲型である。 R_{m-2} は $m-2$ 階の微分作用素である。遂に近似法によって定理を証明する。即ち $v_0 \in$

$$Q_{m-1} v_0 = f, \quad \partial_t^i v_0(0, x) = 0 \quad 0 \leq i \leq m-2$$

の解とある。 $u_0 \in$

$$\partial_{x_1} u_0 = v_0, \quad u_0|_{x_1=0} = 0$$

の解とする。一般に $j \geq 1$ に対し、 v_j は

$$(5.3) \quad Q_{m-1} v_j = R_{m-2} u_{j-1}, \quad \partial_t^i v_j(0, x) = 0, \quad 0 \leq i \leq m-2$$

の解であるとし、 $u_j \in$

$$(5.4) \quad \partial_{x_1} u_j = v_j, \quad u_j|_{x_1=0} = 0$$

の解であるとする。我々は $u_0 + u_1 + \dots$ が収束する $= t$ が示したい。

ここで Goursat 問題の依存領域という概念を導入しよう。

$\tilde{Q}_{m-1}(t, z) = 0$ の根 $\lambda_i(z)$ ($1 \leq i \leq m-1$) とする。 $\lambda_{\max} = \max_{1 \leq i \leq m-1, |z|=1} \lambda_i(z)$ とおく。 $\tilde{t} > 0$ とする。 $\mathcal{D}(\tilde{t}, \tilde{x}) \in$

backward cone: $\{(t, x); |x - \tilde{x}| \leq \lambda_{\max}(\tilde{t} - t)\}$ かつ $t \geq 0$ の部分とする。さらに $D(\tilde{t}, r) = \bigcup_{|x| \leq r} \mathcal{D}(\tilde{t}, x)$ とする。ここで $D(\tilde{t}, r)$ を 1 つとり固定する。 $D(\tilde{t}, r)$ と超平面 $t = s$ ($s < \tilde{t}$)

との共通部分を $D(s)$ であらわす。次の2つの補題を得る。

補題 5.1

$$(5.5) \quad \begin{cases} \partial_{x_1} u = V(t, x), & V(t, x) \in H_{loc}^0 \\ u|_{x_1=0} = 0 \end{cases}$$

(5.5) の解はつぎの評価をもつ。

$$(5.6) \quad \|u(t)\|_{D(t)} \leq C_1 \|V(t)\|_{D(t)}.$$

== 2" $\|u(t)\|_{D(t)}^2 = \int_{D(t)} |u(t, x)|^2 dx$, C_1 は $D(t)$ に依存するが, V には無関係な定数。

補題 5.2

$$(5.7) \quad \begin{cases} \partial_{x_1}^m v = g(t, x) & g(t, x) \in H_{loc}^k \\ \partial_t^i v(0, x) = 0, & 0 \leq i \leq m-2. \end{cases}$$

(5.7) の解は、つぎの不等式をみたす。

$$(5.8) \quad \|v(t)\|_{k, D(t)} \leq C_2 \int_0^t \|g(s)\|_{k, D(s)} ds, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$== 2" \quad \|g(s)\|_{k, D(s)} = \sum_{|a| \leq k} \|\partial_x^a g(s)\|_{D(s)}$$

$$\|v(t)\|_{k, D(t)} = \sum_{i=0}^{m-2} \|\partial_t^i v(t, x)\|_{m-2-i+k, D(t)}.$$

Remark 補題 5.1 で $\|\cdot\|_{D(t)}$ と $\|\cdot\|_{k, D(t)}$ で置きかえてもよい。

即ち 補題 5.1' $V(t, x) \in H_{loc}^k$ ならば、(5.5) の解はつぎの評価をもつ。

$$(5.6)' \quad \|u(t)\|_{k, D(t)} \leq C_1' \|V(t)\|_{k, D(t)}.$$

さて、上の補題の証明であるが、補題 5.1 は (5.5) の解が、

具体的に積分の形で書き下せることにより、容易に示される。

補題 5.2 は、双曲型方程式の依存領域を考慮すれば、本質的には、[2] p338. 定理 6.12 と同じである。

さて、定理の証明であるが、 $0 \leq t \leq T$, $M = \sup_{0 \leq s \leq T} \|f(s)\|_{L^2(D(s))}$ とおこう。補題 5.1' と 5.2 より (R_{m-2} が $m-2$ 階の微分作用素である = と使って)

$$(5.9) \quad \|u_j\|_{L^2(D(t))} \leq (C_1 C_2)^{j+1} C_3^j M t^{j+1} / (j+1)!$$

を得る。ここで C_3 は R_{m-2} の係数によって決まる定数。

u_j と $\partial_t^i u_j$ (i は任意) がお互にかゝっても、(5.9) と類似の不等式が得られる。 $D(t, r)$ は任意であつたから、 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ は広義一様収束する = とわかる。同様に任意の i, α に対して、

$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_t^i \partial_x^\alpha u_k$ も、 $R^{l+1} \times [0, T]$ で広義一様収束する。 $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ とおけば、これは Goursat 問題 (5.1)-(5.2) の解であり、 $u \in C_{tx}^\infty$ である。解の一意性についても、補題 5.1', 5.2 を使って、容易に示される。詳しくは [3] をみて下さい。

§6. 補足—仮定 3 についての考察

仮定 3 で、 P_m と P_{m-1} は実係数としながら、このうち、 P_m については、必要条件としてでてくるものである。

命題 6.1 仮定 1, 2 の下で、Goursat 問題 (1.3)-(1.4) が ε -well-posed であるならば、主要部 P_m の係数は実数である。(= 2, 仮定 2 より、 $\partial_t^{m-1} \partial_x$ の係数を 1 と考える)

証明.

$$P = (\partial_x + \sum_{j=1}^{\ell} a_j \partial_{y_j} + c) \partial_t^{m-1} - \{h_2(\partial_x, \partial_y) \partial_t^{m-2} + h_3(\partial_x, \partial_y) \partial_t^{m-3} + \dots + h_m(\partial_x, \partial_y)\}$$

とおく。ここで $h_j(z, y)$ は, (z, y) の j 次多項式である。命題 E を示すためには, "E-wellposed ならば, a_j ($1 \leq j \leq \ell$) は実数である" が示されれば十分である。実際 a_j ($1 \leq j \leq \ell$) が実数であれば, §1 の注意 1 により, 方程式は (1.3) に帰着でき, 定理 1 の証明がそのまま使えて, 特性根は実数であることが云える。これより P_m の係数は実数であることがわかる。

さて, ある j ($1 \leq j \leq \ell$) があって, $\lim a_j \neq 0$ としよう。

$Pu=0$ なる u のうちで, (t, x, y_j) のみの関数を考えよう。簡単のために記号を少し変えて, つぎの方程式を考えよう。

$$(6.1) \quad Pu \equiv (\partial_x - a \partial_y) \partial_t^{m-1} u - \{h_2(\partial_x, \partial_y) \partial_t^{m-2} + \dots + h_m(\partial_x, \partial_y)\} u = 0, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad \lim a \neq 0.$$

$$u = e^{i\eta(ax+y)} v(t, x) \quad \text{とおけば, } v \text{ のみ方程式は,}$$

$$(6.2) \quad \partial_x \partial_t^{m-1} v = \{h_2(\partial_x + ia\eta, i\eta) \partial_t^{m-2} + \dots + h_m(\partial_x + ia\eta, i\eta)\} v \\ \equiv \sum_{s=2}^m \sum_{p+q=s} a_s p q \partial_x^p \eta^q \partial_t^{m-s} v(t, x).$$

(6.2) の解で "つぎ" のような Goursat data をみたすものを考えよう。

$$(6.3) \quad \begin{cases} \partial_t^i v(0, x) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ v(t, 0) = t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}$$

(6.2) - (6.3) の形式解を。

$$(6.4) \quad V(t, x) = \sum_{j, l_2} V_{j, l_2} \frac{t^j x^{l_2}}{j! l_2!}$$

とおく。(6.3)より、

$$(6.3)' \quad \begin{cases} V_{j, l_2} = 0 & j = 0, 1, \dots, m-2, \quad l_2 = 0, 1, 2, \dots \\ V_{m-1, 0} = 0, \\ V_{j, 0} = 0 & j \neq m-1. \end{cases}$$

(6.4)を(6.2)へ代入すれば、

$$\sum_{j, l_2} V_{j, l_2} \frac{t^{j-m+1} x^{l_2-1}}{(j-m+1)!(l_2-1)!} = \sum_{s=2}^m \sum_{p+q \leq s} a_{spq} \eta^q \sum_{j, l_2} \frac{t^{j-m+s} x^{l_2-p}}{(j-m+s)!(l_2-p)!}.$$

両辺の $t^l x^r$ の係数とくると、

$$(6.5) \quad V_{l+m-1, r+1} = \sum_{s=2}^m \sum_{p+q \leq s} a_{spq} \eta^q V_{l+m-s, r+p}.$$

(6.3)'と(6.5)より

$$(6.6) \quad V_{m-1+l, l_2} = 0 \quad l_2 > l \geq 0.$$

$l_2 \leq l$ なる項については、 η の評価を行う。

$$(6.7) \quad |V_{l+m-1, l_2}| \leq A C^l \eta^{l_2+l} (l_2+l)! \quad l_2 \leq l, \quad A, C \text{ は定数.}$$

(6.7)の証明は、 $l_2=0$ のときは、(6.3)'よりただちに示せる。

他の部分は、帰納法による。さて、(6.4)と(6.6)より、

$V_{m-1, 0} = 1$ を使えば、

$$(6.8) \quad \begin{aligned} V(t, x) &= \sum_{l_2 \leq l} V_{m-1+l, l_2} \frac{t^{m-1+l} x^{l_2}}{(m-1+l)! l_2!} \\ &= \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{l_2=1}^l \sum_{l_2=0}^l V_{m-1+l, l_2} \frac{t^{m-1+l} x^{l_2}}{(m-1+l)! l_2!}. \end{aligned}$$

上式が2項と、(6.7)を使って評価しよう。

$$\sum_{e \geq 1} \sum_{h=0}^e A C^e \eta^{h+e} (h+e)! \frac{t^{m-1+e} x_h}{(m-1+e)! h!}$$

$$\leq \sum_{e \geq 1} \sum_{h=0}^e A C^e \eta^{h+e} 2^{h+e} t^{m-1+e} x_h.$$

$x = x_0$ を固定し, $C > 1$, $\eta > 1$ とすれば上式はつぎの式であり得る

$$A \cdot t^{m-1} \sum_{e \geq 1} C^e \eta^{2e} 2^{2e} t^e (1 + |x_0|)^e$$

$$(6.9) \quad t < 1 / 4 C \eta^2 (1 + x_0)$$

のとき, 上の級数は収束する. 結局 (6.9) とみれば t に対して

$$|V(t, x_0)| \geq t^{m-1} \left(1 - \sum_{e=1}^{\infty} A \{ 4 C \eta^2 (1 + |x_0|) t \}^e \right)$$

を得る. よって, 例えは, $t \eta = \frac{1}{8 C \eta^2 (1 + |x_0|) \cdot A}$ とすれば,

$$(6.10) \quad |V(t \eta, x_0)| \geq M / \eta^{2(m-1)}.$$

M は η に無関係な正の定数.

さて, u の u にもおける,

$$(6.11) \quad u = e^{i a \eta x + i \eta y} v$$

とある. $\operatorname{Im} a \neq 0$ より, $a = a_1 + i a_2$ ($a_2 \neq 0$) とおこう. $-a_2 x_0 > 0$ とするよう x_0 をとろう.

$$(6.12) \quad |u(t \eta, x_0, y)| = e^{-a_2 \eta x_0} |V(t \eta, x_0)|$$

$$\geq e^{-a_2 x_0 \eta} M \eta^{-2(m-1)}.$$

一方 (6.11) の u のみならず $G_{\text{oursat data}}$ は, (6.3) より,

$$\begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ u(t, 0, y) = e^{i \eta y} t^{m-1} / (m-1)! \end{cases}$$

であるから, ε -well posed の仮定より, 解は η に限りなく高

々多項式の増大 order をもつ。これは (6.12) に矛盾する。

次に P_{m-1} が実係数であるという仮定について考えてみよう。

仮定 3' P_m の係数は実数である。

命題 6.2 仮定 1, 2, 3', 4 の下で, Goursat 問題が ε -well posed ならば,

$$\operatorname{Re} P_{m-1}(t, z, \eta) = c Q_{m-1}(t, z, \eta) + b_1(z, \eta) Q_{m-2}(t, z, \eta)$$
である。即ち、定理 3 が P_{m-1} の実部について成り立つ。

証明は、定理 3 のそれをなぞっておればよい。 $\operatorname{Im} P_{m-1}$ についてはどうであろうか。簡単な例で説明しよう。

$$(6.13) \quad \partial_t \partial_x u = i \partial_y u$$

線性多項式 (4.4) は今の場合

$$\mathcal{L}(iz) = i \cdot i \eta$$

したがって $\mathcal{L} = i \frac{\eta}{z}$ となり、 $\operatorname{Re} \mathcal{L} = 0$ であるから、

補題 4.1 は成り立たない。即ち、 $\operatorname{Im} P_{m-1}$ については定理 3 の証明は全く通用しないのである。もっとも、(6.13) については、定理 3 の証明とは別の方法で ε -well posed であることが示される。実際

$$(6.14) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta x t)^n}{(n!)^2} e^{i \eta y}$$

は、(6.13) を満たす。 $u(0, x, y) = u(t, 0, y) = e^{i \eta y}$

であるから、Goursat 問題が ε -well posed とすれば、解は η

の多項式 order でおさえられなければならない。しかし (6.14) より、多項式 order ではおさえられないことがわかる。よって、(6.13) は ε -well posed でない。

参考文献

- [1] S. Mizohata. Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ, vol 1. No 1, 1961, p. 109 — 127
- [2] 溝口 茂 偏微分方程式論 岩波 (1965)
- [3] Y. Hasegawa. On the C^∞ -Goursat problem for equations with constant coefficients. to appear in J. Math. Kyoto Univ.