

ある種の4重可移群について

大阪教育大学 平峰 豊

現在までに知られている4重可移群 ($A_6, A_7, \dots, S_4, S_5, \dots, M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}$) の中で4点の *stabilizer* が可解となっているものが11個 ($A_6, A_7, A_8, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, M_{11}, M_{12}, M_{23}$) あるが、この11個だけに限るかどうかは興味ある問題である。

次の定理はこの方面に関しての一つの試みである。

定理 G を有限集合 Ω 上の4重可移群とし、 G の4点の *stabilizer* の任意の2-element と任意の3-element が可換であるとする。 G は $A_6, A_7, S_4, S_5, S_6, M_{11}$ 又は M_{12} のいずれかである。

系 4点の *stabilizer* が中零となるような4重可移群は、知られたものに限る。

証明には、永尾、野田、大山氏らによる On multiply transitive groups I~XIII ([2]–[8]) の次の定理が用いられる。

定理1 4重可移群の4点の stabilizer を D とおくと、
 $G = S_5, A_6, M_{11}$ を除き D の固定点は丁度4点である。

定理2 P を D の 2-Sylow 群とすると、 $G = A_6, A_7, M_{11}, M_{23}$ を除き P の固定点は4点又は5点である。

定理3 $P (\neq 1)$ がその固定点以外のところで semi-regular であれば、 $G = A_8, A_9, S_6, S_7, M_{12}$ 又は M_{23} である。

定理4 D が 3'-group ならば、 $G = A_6, S_4, S_5, S_6, M_{11}$ 又は M_{12} である。

証明の概略をのべる。

(G, Ω) を定理の反例で $|\Omega|$ が最小となるものであるとする。
 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $G_{1234} = D$, $P \in \text{Syl}_2(D)$, $R \in \text{Syl}_3(D)$ とする。又、 G の部分集合 $X (\neq \emptyset)$ に対して $F(X) = \{j \in \Omega \mid j^X = j\}$ とする。

定理 1 ~ 4 により次のことが分かる。

(1) $F(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, $|F(P)| = 4$ or 5 , P は $\Omega - F(P)$ 上 semi-regular でない, $R \neq 1$ 。

(2) $|F(P)| = 4$

(証明) $F(P) = \{1, 2, 3, 4, i\}$ と仮定し, $L = \langle R^d \mid d \in D \rangle$ とおくと定理の仮定により $[L, P] = 1$ 。従って $i^P \in F(L)$ となる。又定理 1 より $|D: D_i| \neq 1$ であり, 明らかに $2, 3 \nmid |D: D_i|$ であるから, $|F(L)| \geq 4 + 5 = 9$ となる。 $|F(L)|$ は奇数故, 定理 4 を用いて $N_G(L)^{F(L)} \simeq M_{11}$ となる。従って $P^{F(L)} = 1$ 。よって $F(P) \not\subseteq F(L)$ となり矛盾を得る。

次に $m = \max_{i \in \Omega - F(P)} |P_i|$ とし, $P_j = Q$ $j \notin F(P)$, $|P_j| = m$ のように Q を定めると定理 3 及び (2) より次を得る。

(3) $1 \neq Q \neq P$

また, Q の maximality により

(4) Q を真に含む 2-部分群の固定点は 4 点以下である。

(5) $N_G(Q)^{F(Q)}$ は 4 重可移群である。

(証明) 次の補題により明らか。

補題 (Livingstone - Wagner [1]) G を Ω 上の置換群とする。 $1 \leq k < |\Omega|$ なる k とある素数 p に対して, 次の (*) が成り立つとき G は Ω 上の k 重可移群となる。

(*) P と $|P| = k$ なる Ω の任意の部分集合とすると, G の

p -部分群 C が存在して $F(C) = \Gamma$ となる。

$$(6) \quad N_G(Q)^{F(Q)} \simeq S_6 \text{ 又は } M_{12}.$$

(証明) (3), (5) 及び Ω の minimality より明らか。

(7) S と D の自明でない 3-部分群とすると $F(S) = F(Q)$ が成り立つ。このことにより、 R は $\Omega - F(R)$ 上 semi-regular であり、 $F(Q)$ は D にのみ依存して決まる部分集合である。

(証明) (6) により $S^{F(Q)} = 1$ 。従って $F(S) \geq F(Q)$ 。 $F(S) \neq F(Q)$ とすると、 $|F(S)| \geq 8$ かつ $|F(S)|$ は偶数である。定理の仮定及び (2) より、先の補題を再び用いて、 $N_G(S)^{F(S)}$ は定理の仮定をみたす 4 重可移群となる。故に $N_G(S)^{F(S)} \simeq M_{12}$ 。とくに $Q^{F(S)} = 1$ となるが、これは $F(Q) \geq F(S)$ を意味して矛盾となる。

(8) T と $N_G(Q)$ の 2-Sylow 群。 R^* と D の任意の 3-Sylow 群とすると $[T, R^*] = 1$ となる。

(証明) (6) より $N_G(Q)$ の 2-element x で $|F(x) \cap F(Q)| = 4$ をみたすものがあるか。この x に対して $\langle x^g \mid g \in N_G(Q) \rangle = N_G(Q)^{F(Q)}$ が成り立つ。 $\langle x^g \mid g \in N_G(Q) \rangle = M$, $N_G(Q)_{F(Q)} = K$ とおくと $N_G(Q) \supset M$, $Q \in \text{Syl}_2(K)$, $N_G(Q) = M \cdot K$ となる。(7) より $|F(x^g) \cap F(R^*)| = |F(x^g) \cap F(Q)| = 4$ 。従って $[x^g, R^*] = 1$ となるので、 $[M, R^*] = 1$ が成り立つ。一方 $T = (T \cap M) \cdot Q$ であり、 $[Q, R^*] = 1$ は明らか故に $[T, R^*] = 1$ を得る。

(9) $Q (\neq 1)$ の位数 2 の元 t に対して $|F(t)| \equiv 0 \pmod{3}$ が成立する。

(証明) $F(t) \supseteq F(Q) = F(R)$ は (7) より明らか。同様に (7) より R は $F(t) - F(R)$ 上 semi-regular に作用するから $|F(t) - F(R)| \equiv 0 \pmod{3}$ 。従って $|F(t)| = |F(R)| + |F(t) - F(R)| \equiv 0 \pmod{3}$ 。

(10) $|F(t)| \not\equiv 0 \pmod{3}$

(証明) $i \in Q - F(t)$ をとり $i^t = j$ とおく。 $R_1 \in \text{Syl}_3(G_{12ij})$ とすると (7) より $F(R_1)$ は $\langle t \rangle \cdot G_{12ij}$ により全体として固定される。この作用の kernel の 2-Sylow 群で t により normalize されるものと Q_1 とすると (6) より $N_G(Q_1)^{F(Q_1)}$ は S_6 または M_{12} に同型である。 $[R_1, Q_1] = 1$ 故 $R_1 \leq N_G(Q_1)$ であるが (8) より $[t, R_1] = 1$ となる。これらのことから $|F(t) \cap F(R_1)| = |F(t) \cap F(Q_1)| = 2$ または 4 となり、(9) の証明と同じく (7) を用いて $|F(t) - F(R_1)| \equiv 0 \pmod{3}$ が成り立つ。従って $|F(t)| = |F(t) \cap F(R_1)| + |F(t) - F(R_1)| \equiv 1$ または 2 $\pmod{3}$ を得る。

(9) 及び (10) により矛盾が導かれて定理が証明された。

最初に述べた問題を直接解決するのはかなり難かしいことではないかと思われるが、当面は次の問題が考えられる。

問題 4重可移群の4点の stabilizer が $\{2, 3\}$ -群であれば、それは知られたものに限るか？

(“可解”の場合で知られているものはこの性質をもっている。)

文献

- [1] D. Livingstone and A. Wagner : Transitivity of finite permutation groups on unordered sets, Math. Z. 90 (1965) 393-403
- [2] H. Nagao : On multiply transitive groups IV, Osaka J. Math. 2 (1965), 327-341.
- [3] H. Nagao : On multiply transitive groups V, J. Algebra 9 (1968), 240-248.
- [4] T. Oyama : On multiply transitive groups VII, Osaka J. Math. 5 (1968), 319-326.
- [5] T. Oyama : On multiply transitive groups VIII, Osaka J. Math. 6 (1969), 315-319.
- [6] T. Oyama : On multiply transitive groups IX, Osaka J. Math. 7 (1970), 41-56
- [7] T. Oyama : On multiply transitive groups XI, Osaka J. Math. 10 (1973), 379-439
- [8] T. Oyama : On multiply transitive groups XIII, to appear.