

## 総頂点間経路長を最小にする ピラミッド組織構造のリエゾン配置モデル

流通科学大学・情報学部・経営情報学科 澤田 清 (Kiyoshi Sawada)

Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,  
University of Marketing and Distribution Sciences

### 1. はじめに

企業などの組織の構造には様々な種類があるが [1, 2], それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造 (ピラミッド組織と呼ばれている [3, 4]) である. ピラミッド組織構造には, 上司と直属の部下との間にのみ, 情報のやりとりを行える関係が存在する. しかし, 直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には, 事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる.

ピラミッド組織構造は, 構成メンバーを頂点に, 上下のメンバー間関係を辺に対応させると, 根付き木であると考えることができる. このとき, 各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している. また, 根付き木に辺を追加することは, 直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する [5]. 著者らは, ピラミッド組織構造を対象として, 組織全体の情報伝達が最も効率的になるような, メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案した [6, 7, 8]. そこでは, 完全  $K$  分木型のピラミッド組織構造に対して, 全頂点对の最短経路の長さの総和 (以後, 総頂点間経路長と呼ぶ) が最小となるような追加辺の位置を解析的に求めた.

組織内の上下関係以外の関係形成として, 組織内の既存のメンバー間に関係を追加するのではなく, 組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職 (リエゾンと呼ばれる [9, 10]) を配置する方法がある. リエゾンを配置することの有効性は認識されているが, リエゾンをどこに配置すればよいか, すなわちリエゾンを組織内のどのメンバーと情報交換させればよいかという問題については, あまり議論されていない.

本論文では, 完全  $K$  分木型のピラミッド組織構造に対して, 同じ階層で情報交換を行う 1 人のリエゾンを配置する次の 2 つのモデルを提案する. すなわち, 高さ  $H$  ( $H = 2, 3, \dots$ ) の完全  $K$  分木 ( $K = 2, 3, \dots$ ) 組織構造に対して, (i) 同じ階層内の 2 人のメンバーと情報交換を行う, (ii) 同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う, という 2 つのモデルである. このとき, すべての組織メンバー間の情報伝達が最も効率的となるような, リエゾンと情報交換を行う階層を求める. これは, 高さ  $H$  の完全  $K$  分木に頂点 (リエゾン) を 1 つ追加し, その頂点を同じ深さ  $N$  ( $N = 2, 3, \dots, H$ ) の頂点と隣接化させる場合に, 総頂点間経路長が最小となるような深さ  $N^*$  を求めることを意味する. ただし, リエゾンは組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職であるため, リエゾンと他のメンバーとの間の情報伝達の効率は考えない, すなわちリエゾンと完全  $K$  分木の頂点との間の経路長は総頂点間経路長には含めない. ここで, 完全  $K$  分木は, すべての葉の深さが同じで, かつすべての内部頂点の子の数が  $K$  である  $K$  分木を指す [11]. また, 深さは根からその頂点までの経路の長さを表す.

完全  $K$  分木の 2 頂点  $n_i$  と  $n_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, (K^{H+1} - 1)/(K - 1)$ ) の間の最短経路の長さを  $l_{i,j}$  とすると (ただし  $l_{i,j} = l_{j,i}$ ,  $l_{i,i} = 0$ ),  $\sum_{i < j} l_{i,j}$  は総頂点間経路長を表す. また, 上述したようなリエゾン頂点との隣接化を行った後の 2 頂点  $n_i$ ,  $n_j$  間の最短経路の長さを  $l'_{i,j}$  とすると,  $l_{i,j} - l'_{i,j}$  はリエゾン頂点との隣接化により 2 頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す. ここでは, これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ. さらに, 全頂点間の短縮経路長の総和  $\sum_{i < j} (l_{i,j} - l'_{i,j})$  を, 総頂点間短縮経路長と定義する.

2. では同じ階層内の 2 人のメンバーと情報交換を行う場合について, 3. では同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う場合について, それぞれ総頂点間短縮経路長を定式化し, それらを最大にする, すなわち総頂点間経路長を最小にする階層を求める.

## 2. 同階層 2 メンバーとの情報交換モデル

ここでは, 完全  $K$  分木型組織構造に対して, リエゾンを 1 人配置し, 同じ階層内の 2 人のメンバーと情報交換を行う. すなわち, 高さ  $H$  ( $H = 2, 3, \dots$ ) の完全  $K$  分木 ( $K = 2, 3, \dots$ ) に対して, リエゾン頂点を 1 つ追加し, その頂点を同じ深さ  $N$  ( $N = 2, 3, \dots, H$ ) の 2 つの頂点と隣接化する.

2.1 で本モデルの総頂点間短縮経路長を定式化し, 2.2 で総頂点間短縮経路長を最大にする, リエゾンと隣接化する頂点を解析的に求める.

### 2.1 総頂点間短縮経路長の定式化

リエゾン頂点と隣接化する深さ  $N$  の 2 つの頂点の組は, 隣接化後に同形のグラフになるものを除くと,  $N - 1$  通り存在する. すなわち, 深さ  $L$  ( $L = 0, 1, 2, \dots, N - 2$ ) の頂点の  $K$  個の子のうち, 2 つの相異なる子の子孫の対である  $N - 1$  通りである. ここではまず,  $L = 0$  の場合, すなわち完全  $K$  分木の根の相異なる子の子孫に隣接化したときの総頂点間短縮経路長を定式化する.

ここで, リエゾン頂点と隣接化を行う 2 頂点を  $v_0^X$ ,  $v_0^Y$  とし,  $v_0^X$  の祖先の中で深さ  $N - k$  の頂点を  $v_k^X$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 2$ ),  $v_0^Y$  の祖先の深さ  $N - k$  の頂点を  $v_k^Y$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 2$ ) とする. また,  $v_0^X$  と  $v_0^Y$  の子孫の集合をそれぞれ  $V_0^X$  と  $V_0^Y$  と書く. ただし, 子孫はその頂点自身も含むものとする. さらに, 頂点  $v_k^X$  の子孫の集合から  $v_{k-1}^X$  の子孫の集合を除いたものを  $V_k^X$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 2$ ), 頂点  $v_k^Y$  の子孫の集合から  $v_{k-1}^Y$  の子孫の集合を除いたものを  $V_k^Y$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 2$ ) とする. 以上に定義した頂点集合を, 図 1 に示す. ただし, 図 1 は,  $K = 2$ ,  $H = 5$  の完全  $K$  分木に対して, リエゾン頂点 (白丸で表している) を深さ  $N = 4$  の 2 つの頂点に隣接化 (太線で表している) した場合である.

このとき,  $V_0^X$  と  $V_0^Y$  の頂点間の短縮経路長の総和は,

$$A_{1,H}(N) = \{M(H - N)\}^2 2(N - 1) \quad (1)$$

と表される. ただし,  $M(h)$  ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ) は高さ  $h$  の完全  $K$  分木の頂点数を表す. 次に,  $V_0^X$  と  $V_k^Y$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 2$ ) の頂点間と,  $V_0^Y$  と  $V_k^X$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 2$ ) の頂点間の短縮経路長の総和は,

$$B_{1,H}(N) = 2M(H - N) \sum_{i=1}^{N-2} \{(K - 1)M(H - i - 2) + 1\} 2i \quad (2)$$

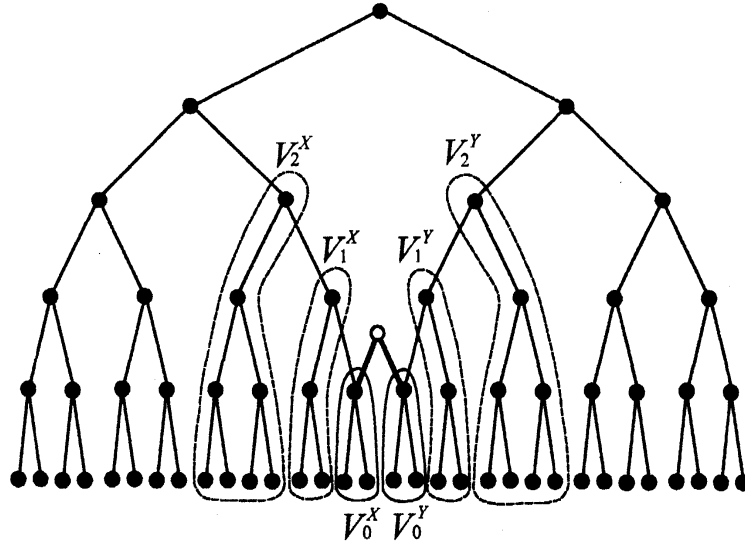


図 1: 同階層 2 メンバーとの情報交換モデルの総頂点間短縮経路長の定式化

で与えられる. さらに,  $V_k^X$  ( $k = 1, 2, \dots, N-3$ ) と  $V_k^Y$  ( $k = 1, 2, \dots, N-3$ ) の頂点間の短縮経路長の総和は,

$$C_{1,H}(N) = \sum_{i=1}^{N-3} \left\{ (K-1)M(H-i-3) + 1 \right\} \sum_{j=1}^i \left\{ (K-1)M(H-N+j-1) + 1 \right\} 2(i-j+1) \quad (3)$$

となる. ただし,  $\sum_{i=1}^0 \cdot = 0$ ,  $\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$  と定義する.

以上より,  $L = 0$  の場合の総頂点間短縮経路長  $S_{1,H}(N)$  は,

$$\begin{aligned} S_{1,H}(N) &= A_{1,H}(N) + B_{1,H}(N) + C_{1,H}(N) \\ &= \left\{ M(H-N) \right\}^2 2(N-1) + 2M(H-N) \sum_{i=1}^{N-2} \left\{ (K-1)M(H-i-2) + 1 \right\} 2i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-3} \left\{ (K-1)M(H-i-3) + 1 \right\} \sum_{j=1}^i \left\{ (K-1)M(H-N+j-1) + 1 \right\} 2(i-j+1) \end{aligned} \quad (4)$$

となる.

深さ  $L$  ( $L = 0, 1, 2, \dots, N-2$ ) の頂点の相異なる子の子孫にリエゾン頂点を隣接化した場合, 深さ  $L$  の頂点の子孫同士以外は最短経路の長さが短縮されない. このことから, この場合の総頂点間短縮経路長は, 高さ  $H-L$  の完全  $K$  分木の, 深さ  $N-L$  の 2 頂点のうち, 根の相異なる子の子孫にリエゾン頂点を隣接化した場合と同じとなる. すなわち, 深さ  $L$  の頂点の相異なる子の子孫にリエゾン頂点を隣接化した場合の総頂点間短縮経路長を  $R_H(N, L)$  とすると,

$$R_H(N, L) = S_{1,H-L}(N-L) \quad (5)$$

という関係が成り立つ.

図 2 に,  $K = 2$ ,  $H = 5$  の完全  $K$  分木に対して,  $N = 4$ ,  $L = 2$  の 2 頂点にリエゾン頂点 (白丸で表す) を隣接化 (太線で表す) した例を示す. この例では, 高さ 3 ( $= 5 - 2$ ) の完全  $K$  分木 (図中の破線で囲まれた部分) の根の相異なる子の子孫のうち深さ 2 ( $= 4 - 2$ ) の頂点にリエゾン頂点を隣接化した場合の総頂点間短縮経路長と同じとなる. すなわち,  $R_5(4, 2) = S_3(2)$  となる.

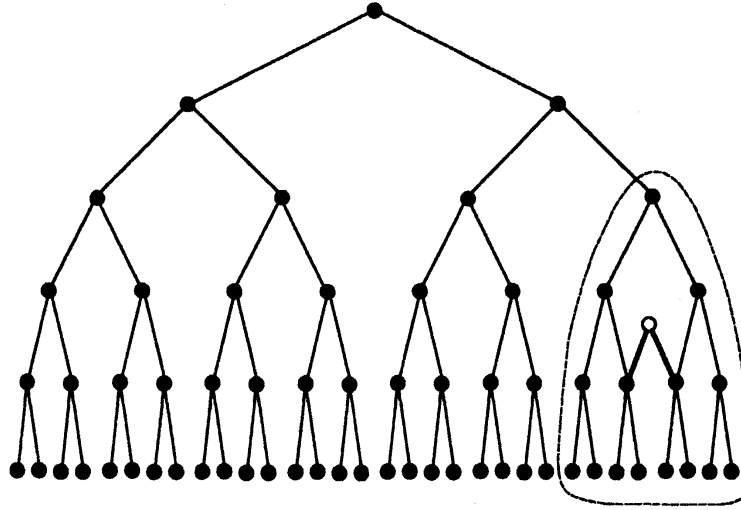


図 2:  $R_H(N, L) = S_{1, H-L}(N-L)$  の例

## 2.2 リエゾンと隣接化する最適な頂点

$R_H(N, L)$  を最大にする  $L^*$  に関して, 次の定理 1 が得られる.

**定理 1** 各  $N$  ( $N = 2, 3, \dots, H$ ) について,  $L^* = 0$  のとき  $R_H(N, L)$  が最大になる.

**証明**  $N = 2$  のとき,  $L = 0$  のみであるので,  $L^* = 0$  である.  $N \geq 3$  のとき,  $\Delta R_H(N, L) \equiv R_H(N, L+1) - R_H(N, L)$  とおくと,

$$\begin{aligned}
 \Delta R_H(N, L) &= S_{1, H-(L+1)}(N - (L+1)) - S_{1, H-L}(N - L) \\
 &= -2\{M(H-N)\}^2 - 2M(H-N)\{(K-1)M(H-N) + 1\}2(N-L-2) \\
 &\quad - 2M(H-N) \sum_{i=1}^{N-L-3} (K-1)\{M(H-L-i-2) - M(H-L-i-3)\}2i \\
 &\quad - \{(K-1)M(H-N) + 1\} \sum_{j=1}^{N-L-3} \{(K-1)M(H-N+j-1) + 1\}2(N-L-j-2) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{N-L-4} (K-1)\{M(H-L-i-3) - M(H-L-i-4)\}
 \end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=1}^i \left\{ (K-1)M(H-N+j-1)+1 \right\} 2(i-j+1) \quad (6)$$

を得る。ただし、 $L = 0, 1, 2, \dots, N-3$  である。 $M(h)$  は、 $h$  に関する増加関数であることから、

$$\Delta R_H(N, L) < 0 \quad (7)$$

となるので、 $L^* = 0$  である。  $\square$

定理 1 より、総頂点間短縮経路長を最大にする、リエゾン頂点と隣接化する 2 つの頂点を求めるとき、根の相異なる子の子孫の組だけを考えればよい。

式 (4) に

$$M(h) = \frac{K^{h+1} - 1}{K - 1} \quad (8)$$

を代入して整理すると、

$$S_{1,H}(N) = \frac{1}{(K-1)^3} \left\{ 2(N-1)(K-1)K^{2H-N} + 4K^{H-N+1} - 4K^H + 2(N-1)(K-1) \right\} \quad (9)$$

を得る。

さらに、式 (9) の  $S_{1,H}(N)$  を最大にする  $N^*$  に関して、次の定理 2 が得られる。

**定理 2**  $N^* = 2$  のとき  $S_{1,H}(N)$  が最大になる。

**証明**  $H = 2$  のとき、 $N = 2$  のみであるので、 $N^* = 2$  である。 $H \geq 3$  のとき、 $S_{1,H}(N)$  の  $N$  に関する差分を  $\Delta S_{1,H}(N)$  とおくと、

$$\begin{aligned} \Delta S_{1,H}(N) &\equiv S_{1,H}(N+1) - S_{1,H}(N) \\ &= \frac{1}{(K-1)^2} \left\{ (-2NK + 2K + 2N)K^{2H-N-1} - 4K^{H-N} + 2 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。ただし、 $N = 2, 3, \dots, H-1$  である。ここで、

$$\Delta S_{1,H}(N) < 0 \quad (11)$$

となるので、 $N^* = 2$  である。  $\square$

### 3. 同階層全メンバーとの情報交換モデル

ここでは、完全  $K$  分木型組織構造に対して、リエゾンを 1 人配置し、同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う。すなわち、高さ  $H$  ( $H = 2, 3, \dots$ ) の完全  $K$  分木 ( $K = 2, 3, \dots$ ) に対して、リエゾン頂点を 1 つ追加し、その頂点を同じ深さ  $N$  ( $N = 2, 3, \dots, H$ ) の全頂点と隣接化する。

3.1 で本モデルの総頂点間短縮経路長を定式化し、3.2 で総頂点間短縮経路長を最大にする、リエゾンと隣接化する階層を解析的に求める。

### 3.1 総頂点間短縮経路長の定式化

ここで、深さ  $N$  以上の頂点間の短縮経路長の総和は、

$$A_{2,H}(N) = \{M(H-N)\}^2 K^N (K-1) \sum_{i=1}^{N-1} i K^i \quad (12)$$

で与えられる。ここでも、 $M(h)$  ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ) は、高さ  $h$  の完全  $K$  分木の頂点数を表す。また、深さ  $N$  以上の頂点と深さ  $N$  未満の頂点との間の短縮経路長の総和は、

$$B_{2,H}(N) = 2M(H-N) K^N (K-1) \sum_{i=1}^{N-2} (N-i-1) i K^i, \quad (13)$$

深さ  $N$  未満の頂点間の短縮経路長の総和は、

$$C_{2,H}(N) = K^N (K-1) \sum_{i=1}^{N-3} \sum_{j=1}^i (i-j+1) j K^j \quad (14)$$

となる。ただし、ここでも  $\sum_{i=1}^0 \cdot = 0$ ,  $\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$  と定義する。

以上より、深さ  $N$  の全頂点とリエゾン頂点を隣接化させたときの総頂点間短縮経路長  $S_{2,H}(N)$  は

$$\begin{aligned} S_{2,H}(N) &= A_{2,H}(N) + B_{2,H}(N) + C_{2,H}(N) \\ &= \{M(H-N)\}^2 K^N (K-1) \sum_{i=1}^{N-1} i K^i + 2M(H-N) K^N (K-1) \sum_{i=1}^{N-2} (N-i-1) i K^i \\ &\quad + K^N (K-1) \sum_{i=1}^{N-3} \sum_{j=1}^i (i-j+1) j K^j \end{aligned} \quad (15)$$

と定式化される。

式 (15) に、式 (8) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} S_{2,H}(N) &= \frac{1}{2(K-1)^3} \left[ \{2K^{-N+3} + (2N-2)K^3 - 2NK^2\} K^{2H} \right. \\ &\quad \left. + \{-4K^{N+2} + 4NK^3 - (4N-4)K^2\} K^H + (N^2 - N) K^{N+1} (K-1)^2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。以下では、式 (16) の  $S_{2,H}(N)$  を最大にする  $N^*$  を求める。

### 3.2 リエゾンと隣接化する最適な階層

式 (16) の  $S_{2,H}(N)$  を最大にする  $N^*$  に関して、次の定理 3 が得られる。

**定理 3**  $N^* = H$  のとき  $S_{2,H}(N)$  が最大になる。

証明  $H = 2$  のとき,  $N = H$  のみであるので,  $N^* = H$  である.  $H \geq 3$  のとき,  $S_{2,H}(N)$  の  $N$  に関する差分を  $\Delta S_{2,H}(N)$  とおくと,

$$\begin{aligned}\Delta S_{2,H}(N) &\equiv S_{2,H}(N+1) - S_{2,H}(N) \\ &= \frac{1}{2(K-1)^2} \left\{ (2K^2 - 2K^{-N+2})K^{2H} + (4K^2 - 4K^{N+2})K^H \right. \\ &\quad \left. + (K-1)K^{N+1}(N^2K + NK - N^2 + N) \right\}\end{aligned}\quad (17)$$

を得る. ただし,  $N = 2, 3, \dots, H-1$  である. ここで, 式 (17) の  $K^H$  を

$$x = K^H \quad (18)$$

とおくと, 実数  $x$  に関する 2 次関数  $T_N(x)$  が得られる.

$$\begin{aligned}T_N(x) &= \frac{1}{2(K-1)^2} \left\{ (2K^2 - 2K^{-N+2})x^2 + (4K^2 - 4K^{N+2})x \right. \\ &\quad \left. + (K-1)K^{N+1}(N^2K + NK - N^2 + N) \right\}.\end{aligned}\quad (19)$$

また,  $T_N(x)$  を  $x$  に関して微分すると

$$T'_N(x) = \frac{2}{(K-1)^2} \left\{ (K^2 - K^{-N+2})x + K^2 - K^{N+2} \right\} \quad (20)$$

となる.

このとき,  $2K^2 - 2K^{-N+2} > 0$  より,  $T_N(x)$  は下に凸であり, さらに

$$\begin{aligned}T_N(K^{N+1}) &= \frac{1}{2(K-1)^2} \left\{ 2(K-2)(K^N - 1)K^{N+3} \right. \\ &\quad \left. + (N^2K + NK - N^2 + N)(K-1)K^{N+1} \right\} > 0,\end{aligned}\quad (21)$$

$$T'_N(K^{N+1}) = \frac{2}{K-1} K^2 (K^N - 1) > 0 \quad (22)$$

であることから,  $x \geq K^{N+1}$  のとき  $T_N(x) > 0$  となることがわかる. したがって,  $H \geq N+1$ , すなわち  $N = 2, 3, \dots, H-1$  に対して,  $\Delta S_{2,H}(N) > 0$  となるので,  $N^* = H$  である.  $\square$

#### 4. おわりに

本論文では, 高さ  $H$  の完全  $K$  分木型ピラミッド組織構造を対象として, 組織全体の情報伝達が最も効率的になるようにリエゾンを配置する目的で, 1 人のリエゾンが (i) 同じ階層内の 2 人のメンバーと情報交換を行う, (ii) 同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う, という 2 つのモデルを提案した. (i), (ii) それぞれのモデルに対して, 総頂点間短縮経路長を定式化し, それらを最大にするリエゾンと情報交換を行う階層を解析的に求めた. その結果, (i) の同じ階層内の 2 人のメンバーと情報交換を行う場合は, 深さ  $N^* = 2$  の, 根の相異なる子の子孫同士で, 総頂点間短縮経路長を最大にすることがわかった. これは, 組織構造の階層数や各メンバーの直屬部下数に関係な

く、最上位層から2層下で異なる直接の上司を持つ2人のメンバーとリエゾンの間で情報交換を行うことで、組織全体の情報伝達効率を最も改善できることを表している。また、(ii)の同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う場合は、 $N^* = H$ ，すなわち各メンバーの直属部下数に関係なく、最下位層の全メンバーとリエゾンの間で情報交換を行うことで、組織全体の情報伝達効率を最も改善できることがわかった。

## 参考文献

- [1] S. P. Robbins, Essentials of Organizational Behavior, 7th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2003.
- [2] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.
- [3] N. Takahashi, "Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms", European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297-310, 1988.
- [4] 高橋伸夫, 組織の中の決定理論, 朝倉書店, 東京, 1993.
- [5] 宇野 斉, "組織内コミュニケーション・パスの追加効果について," 組織科学, vol.27, no.2, pp.73-86, 1993.
- [6] 澤田 清, 宇野 斉, "完全2分木型組織構造への関係追加モデル," 日本応用数理学会論文誌, vol.10, no.4, pp.335-346, 2000.
- [7] 澤田 清, "総頂点間経路長を最小にする完全2分木の階層間隣接化," 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353-360, 2003.
- [8] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete  $K$ -ary tree, European Journal of Operational Research, to appear.
- [9] J. H. Gittell, "Organizing work to support relational co-ordination", International Journal of Human Resource Management, vol.11, pp.517-539, 2000.
- [10] 沼上 幹, 組織デザイン, 日本経済新聞社, 東京, 2004.
- [11] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.