

発展方程式の解と Gevrey クラス

阪大 理 田 辺 玄 蔵

Banach 空間 X での抽象的微分方程式

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t) \quad (1)$$

の解 $u(t)$ が t の函数として Gevrey のクラスに属するかと

の問題について述べる. $\{M_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ を次の条件を満足する正数の列とする:

- (i) $\forall k \quad M_{k+1} \leq \alpha_0 M_k,$
- (ii) $0 \leq j \leq k$ のとき $\binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leq \alpha_1 M_k,$
- (iii) $\forall k \quad M_k \leq M_{k+1},$
- (iv) $\forall j, \forall k \quad M_{j+k} \leq \alpha_2^{j+k} M_j M_k.$

X が Hilbert 空間のとき Lions と Magenes によって種々の結果が得られた. まずそれを簡単に述べる. V は X の稠密な部分空間で X よりも強い位相を与える内積が定義され, その内積によって Hilbert 空間になっているものとする. このとき $V \subset X \subset V'$ と考えることが出来る. $A(t)$ が $V \times V$ で定義された sesquilinear form $a(t; u, v)$ によって $a(t; u, v) = (A(t)u, v)$ と定められる場合を考える. V ある u は V' の値をとる無限回微分可能, 任意の有限区間 $a \leq t \leq b$ で

$$\| (d/dt)^k u(t) \| \leq C_0 C^k M_k \quad \forall k$$

を成立せしめる様な常数 C_0, C が存在し, かつある t_0 が存在

して $t \leq t_0$ で $u(t) \equiv 0$ とする函数 u の全体をそれぞれ

$D_{+, M_k}(V), D_{+, M_k}(V')$ と表はす. これらの空間に適当な位相

を入れて局所凸完備な線型位相空間とすると (1) によって

$u(t) \in f(t)$ に対応させる写像が $D_{+, M_k}(V)$ と $D_{+, M_k}(V')$ との間
の同相写像であることを種々の仮定のもとで示すのが Lions
と Magenes の主な結果の一つである. $D_{+, M_k}(V)$ 等の定義で

$t \leq t_0$ で $u(t) \equiv 0$ を $t \geq t_0$ で $u(t) \equiv 0$ におき換えれば同様に

$D_{-, M_k}(V), D_{-, M_k}(V')$ が得られ, それ等の共役空間 ~~$D_{-, M_k}(V)$~~ を

$D_{+, M_k}(V), D_{+, M_k}(V')$ と表はすと写像 $u(t) \rightarrow f(t)$ は

$D_{+, M_k}(V)$ と $D_{+, M_k}(V')$ との間での同相写像にもなる. Lions と

Magenes は以上の結果を (1) が放物型, Schrödinger 型の場合,
 t について ∞ 階の場合についても証明しているが $\{M_k\}$

が quasi-analytic な場合は $D_{+, M_k}(V)$ は 0 だけになってしま

うのでその様な場合は除外されている. 以下においては X が

Banach 空間で (1) が放物型の場合について述べる. $D_{+, M_k}(V)$

の様な空間は考へたから $\{M_k\}$ は quasi-analytic でなっ

てもよい. Lions-Magenes の様に hyperfunction 解は考へず

通常の意味で (1) を満足する解のみを考へる. 主な結果は

(1) の基本解 $U(t, s)$ について

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^l u(t, s) \right\| \leq L_0 L^{n+m+l} M_{n+m+l} (t-s)^{-n-l}$$

を成立せしめる様な常数 L_0, L が存在することを示すことである。これを用いれば u_0 が X の正素の元, $f(t)$ が X の値をとる C^∞ 函数であればこの n に対し

$$\| d^n f(t) / dt^n \| \leq F_0 F^n M_n \quad s \leq t \leq T$$

を満足するならば初期条件 $u(s) = u_0$ を満足する (1) の解 $u(t)$ について

$$\| d^n u(t) / dt^n \| \leq C_0 C^n M_n (t-s)^{-n}, \quad s < t \leq T, \quad \forall n$$

を成立せしめる常数 C_0, C が存在することが示される。 $\{M_n\} = \{n!\}$ であるときは解析函数を扱っていることになるがこの場合は小松彦三郎氏の考案した方法によって既にいくつかの結果が得られている。それは解 $u(t)$ が正則函数として複素領域に延拓されてくることを示すのであるが、上の様な形の評価式は示されなかった。

仮定 1. 各 $t \in [0, T]$ に対して $A(t)$ は X の稠密な集合で定義された線型閉作用素で、その resolvent set はある開角領域 $\Sigma = \{\lambda: \theta \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \theta\}, 0 < \theta < \pi/2$, を含む。

仮定 2. 有界作用素の値をとる関数 $A(t)^{-1}$ は $0 \leq t \leq T$ で無限回微分可能である。

仮定3. 常数 K_0, K が存在して各 $\lambda \in \Sigma$, $t \in [0, T]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n (\lambda - A(t))^{-1} \right\| \leq \frac{K_0 K^n M_n}{|\lambda|}.$$

以上の仮定は種々の場合に成立することが示される. $A(t)$ が $[0, T]$ のある稠密近傍 Δ で定義され, そこに仮定1と仮定3の $n=0$ の場合が満足され, 更に $A(t)^{-1}$ が Δ で正則であるときは仮定3が満足されることされる. これは $(\lambda - A(t))^{-1}$ を Cauchy の積分表示で表現すれば容易に確かめられる. 基本解 $U(t, s)$:

$$(\partial/\partial t) U(t, s) + A(t) U(t, s) = 0, \quad 0 \leq s < t \leq T,$$

$$U(s, s) = I, \quad 0 \leq s \leq T$$

は次の様に表はされる:

$$U(t, s) = \exp(-(t-s)A(t)) + \int_s^t \exp(-(t-\tau)A(t)) R(\tau, s) d\tau,$$

$$R(t, s) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l(t, s),$$

$$R_1(t, s) = -(\partial/\partial t + \partial/\partial s) \exp(-(t-s)A(t)),$$

$$R_l(t, s) = \int_s^t R_1(t, \tau) R_{l-1}(\tau, s) d\tau, \quad l=2, 3, \dots$$

$U(t, s)$ は次の積分方程式を満足することと容易に証明すること出来る:

$$U(t, s) = \exp(-(t-s)A(s)) + \int_s^t Q_1(t, \tau) U(\tau, s) d\tau, \quad (2)$$

但し

$$\begin{aligned} Q_1(t, \tau) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \exp(-(t-\tau)A(\tau)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (\lambda - A(\tau))^{-1} d\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

ここで Γ は $\infty e^{-i\theta}$ と $\infty e^{i\theta}$ とを結ぶ Σ の外側の滑らかな路である。主結果を証明する前に $U(t, s)$ が t, s について無限回微分可能か？

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^l U(t, s) \right\| \leq C_{n,m} (t-s)^{-n-l} \quad (4)$$

となる様な常数 $C_{n,m}$ が存在することを示さねばならぬが、この証明は容易である。

予備定理1. 任意の m, n に対して

$$\left\{ \begin{aligned} &\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m \exp(-(t-s)A(s)) \right\| \\ &\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m Q_1(t, s) \right\| \end{aligned} \right\} \leq N_0 N^{n+m} M_n M_m (t-s)^{-n}$$

が成立する様な常数 N_0, N が存在する。

これは (3) を使って容易に証明できる

$$Z(t, s) = \int_s^t Q_1(t, \tau) U(\tau, s) d\tau$$

と仮定する。

予備定理 2. $s = r_0 < r_1 < \dots < r_n$ とする。 $t = r_{n+1} > r_n$ で

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)^n Z(t, s) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i} \right)^{i-j} Q_1(t, r_i) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)^j U(r_i, s) \\ &+ \sum_{i=0}^n \int_{r_i}^{r_{i+1}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{i-j} Q_1(t, \tau) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^j U(\tau, s) d\tau. \end{aligned}$$

証明.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n Z(t, s) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-i} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \int_{r_i}^{r_{i+1}} Q_1(t, \tau) U(\tau, s) d\tau \right\}$$

$i \leq n-1$ のとき

$$\begin{aligned} \{ \} &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^i Q_1(t, \tau) \cdot U(\tau, s) d\tau \\ &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{i-j} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^j Q_1(t, \tau) \cdot U(\tau, s) d\tau \end{aligned}$$

として τ について部分積分を行う。 $i = n$ のときも同様に行なれば求める等式が得られる。

Stirling の公式によりある正数 ω が存在して $\forall n$ の自然数 n に対し

$$\omega^{-1} n^n e^{-n\sqrt{n}} \leq n! \leq \omega n^n e^{-n\sqrt{n}} \quad (5)$$

が成立する。

定理 1. 常数 H_0, H が存在し、 $\forall n$ の自然数 n に対し

$$\|(\partial/\partial t)^n U(t, s)\| \leq H_0 H^n M_n (t-s)^{-n} \quad (6)$$

証明. 帰納法に於る. $n=0$ のときは明らかである. $n-1$

迄はわかったとする. 予備定理 2) により

$$(\partial/\partial t)^n U(t, s) = I + II + III + IV,$$

$$I = (\partial/\partial t)^n \exp(-(t-s)A(s))$$

$$II = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^{i-1-j} Q_i(t, \lambda_i) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^j U(\lambda_i, s),$$

$$III = \sum_{i=0}^n \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \sum_{\substack{j=0 \\ i < n}}^i \binom{i}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{i-j} Q_i(t, \tau) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^j U(\tau, s) d\tau,$$

$$IV = \int_{\lambda_n}^t Q_i(t, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^n U(\tau, s) d\tau.$$

予備定理 1) により

$$\|I\| \leq N_0 M_0 N^n M_n (t-s)^{-n}. \quad (7)$$

H を十分大にとつて

$$H \geq \max\{2N, 2NT\} \quad (8)$$

とすると, 予備定理 1) と (8), (ii), 及び帰納法の仮定に

よって

$$\|II\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \frac{N_0 N^{n-1-j} M_{n-i} M_{i-1-j}}{(t-\lambda_i)^{n-i}} \frac{H_0 H^j M_j}{(\lambda_i-s)^j}$$

$$\leq \alpha_1 N_0 H_0 N^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{M_{i-1} M_{n-i}}{(t-\lambda_i)^{n-i}} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{H}{N}\right)^j \frac{1}{(\lambda_i-s)^j}$$

$$\leq 2\omega N_0 H_0 N^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{M_{i-1} M_{n-i}}{(t-x_i)^{n-i}} \left(\frac{H}{N}\right)^{i-1} \frac{1}{(x_i-s)^{i-1}}$$

$$\leq 2\omega_1^2 N_0 H_0 H^{n-1} M_{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)!(n-i)!}{(n-1)!} (t-x_i)^{i-n} (x_i-s)^{i-1} \left(\frac{N}{H}\right)^{n-i}$$

ここで $x_i = s + i(t-s)/(n+1)$, $i=1, \dots, n$, とする. そうすると
上の不等式の最後にある和 $\sum_{i=1}^n \dots$ は (5) を用いて

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} (t-s)^{1-n} \left(\frac{H}{N}\right)^{n-1} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} (t-s)^{1-n} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^2 \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{i-1}{i}\right)^{i-1} \left(\frac{n-i}{n+1-i}\right)^{n-i} \left\{ \frac{(i-1)(n-i)}{n-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{H}\right)^{n-i} (t-s)^{1-n} \\ & \leq e(t-s)^{1-n} 2^{1-n} + e(t-s)^{1-n} \\ & + \omega^2 e^2 (t-s)^{1-n} 2^{-1} \sqrt{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-n} \\ & \leq \omega^3 e^{2\sqrt{n-1}} (t-s)^{1-n} \end{aligned}$$

とあるから n を代入して

$$\|II\| \leq C_1 H_0 H^{n-1} M_n (t-s)^{1-n} \quad (9)$$

を得る. 同様の計算を行なうと

$$\|III\| \leq C_2 H_0 H^{n-1} M_n (t-s)^{1-n} \quad (10)$$

を得る. (7), (9), (10) により

$$\|(\partial/\partial t)^n U(t,s)\| \leq N_0 M_0 N^n M_n (t-s)^{-n} + C_3 H_0 H^{n-1} M_n (t-s)^{1-n}$$

$$+ N_0 M_0^2 \int_{s_n}^t \|(\partial/\partial \tau)^n U(\tau,s)\| d\tau$$

を得るがここに両辺に $(t-s)^n$ をかけて

$$Y(t,s) = (t-s)^n \| (\partial/\partial t)^n U(t,s) \|$$

とおくと $t_n < \tau < t$ のとき

$$(t-s)^n < (1+n^{-1})^n (t-s)^n < e(t-s)^n$$

となることに注意すると *

$$Y(t,s) \leq H_0 H^* M_n \exp(-N_0 M_0^2 eT) + N_0 M_0^2 e \int_s^t Y(\tau,s) d\tau$$

を得る. これを積分すれば

$$Y(t,s) \leq \exp(N_0 M_0^2 e(t-s)) \exp(-N_0 M_0^2 eT) \leq H_0 H^* M_n$$

となる.

定理 2. 常数 L_0, L が存在して任意の $n, m \geq 0$ に対し

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^l U(t,s) \right\| \leq L_0 L^{n+m+l} M_{n+m+l} (t-s)^{n-l}$$

証明 $n=l=0$ のときは前定理によって示された. l

$=0$ の場合は $n+m+l$ に関する帰納法による. $n=0$ のときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m U(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^m \exp(-(t-s)A(s))$$

$$+ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_s^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{m-k} \exp(-(t-\tau)A(\tau)) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^k U(\tau,s) d\tau$$

に注意して証明出来る. $n > 0$ のときは上式右辺の各項に前

定理の証明法を適用する. これで $l=0$ のときの証明は終る

が 一般の場合は $(\partial/\partial s)^l = \{(\partial/\partial t + \partial/\partial s) - \partial/\partial t\}^l$ に注意す

れば $l=0$ の場合に戻される.

定理 3. $f(t)$ は X の値をとる C^∞ 函数で各 $n \geq 0$ に対し

$$\|d^n f(t)/dt^n\| \leq F_0 F^n M_n, \quad s \leq t \leq T$$

となる常数 F_0, F が存在するとする. 初期条件 $u(s) = u_0$ を満足する (1) の解 $u(t)$ に対して

$$\|d^n u(t)/dt^n\| \leq H_0 H^n M_n \|u_0\| (t-s)^{-n} + \overline{F}_0 \overline{F}^n M_n (t-s)^{1-n}$$

を成立せしめる様な常数 $\overline{F}_0, \overline{F}$ が存在する.

証明.

$$u(t) = U(t, s) u_0 + \int_s^t U(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma$$

であるから定理 1 と

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_s^t U(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)^{i-1-j} U(t, s) f^{(j)}(s) \\ &+ \int_s^t \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)^{n-j} U(t, \sigma) f^{(j)}(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

に注意すれば容易に定理の結論が得られる.

参考文献

- [1] T. Kato and H. Tanabe: On the abstract evolution equation, Osaka Math. J., 14 (1962), 107-133.
- [2] H. Komatsu: Abstract analyticity in time and unique continuation property of solutions of a parabolic equation, J. Sci.

Univ. Tokyo, Section I, 9, part I (1961), 1-11.

[3] J. L. Lions and E. Magenes: Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques, Ann. Mat. pura appl., 68 (1965), 341-418.

[4] J. L. Lions and E. Magenes: Espaces de fonctions et problèmes aux limites pour diverses classes d'équations d'évolution, Ann. Mat. pura appl., 72 (1966), 343-394.

$$* \quad H_0 H \geq 2 M_0 N_0 N \exp(N_0 M_0^2 e T),$$

$$H \geq 2 C_3 T \exp(N_0 M_0^2 e T)$$

$\varepsilon < \varepsilon_0 < \delta < \dots$