

フラクタル的初期密度ゆらぎと宇宙の構造形成

早稲田大学 理工学部 立川 崇之*, 前田 恵†

現在の銀河分布の観測から銀河や銀河団の二点相関関数が距離のべきになるといった、スケール則が見い出されている。今までに様々なアプローチを用いたスケールフリーな構造形成が議論されているが、我々は一様・等方宇宙において初期にフラクタル的な密度ゆらぎがあった場合に、どのような非線形構造に成長するかを解析する。簡単な場合として次元無衝突シート系を取り扱い、非線形構造のフラクタル次元への初期密度ゆらぎの依存性や、背景時空の膨張則とフラクタル構造の関係を議論する。

I. INTRODUCTION

現在の銀河分布の観測から、銀河は一様に分布している訳ではない事が知られている。東辻 & 木原 [1] と Peebles [2] は空間二点相関関数 $\xi(r)$ が距離 r のべきに比例し、そのべきがおおよそ -1.8 である事を示した。最近の大規模な銀河分布に関する観測からも、このべきがおおよそ -1.8 である事が示されている [3-6]。この二点相関のべき則は銀河がフラクタル分布をしている可能性を示唆する。ただしこのべき則は大スケールでは成り立たないという事も示されている。最近なされた銀河分布のマルチフラクタル解析でも、大スケールでは一様分布に近づく事が示されている [7-9]。しかし一方 Sylos Labini らは、全ての観測データが非常に大スケール ($\sim 1000h^{-1}$ [Mpc]) に至るまでフラクタル次元 $D \sim 2$ を示していると主張している [10]。大スケールで宇宙が一様であるかどうかを判断するには、次世代の銀河分布の観測の結果をまたなければならない [11-14]。

では、現在の銀河分布がもし本当にフラクタル的であるとすると、そのような分布は一様な宇宙からどのようにして形成されたのであろうか。この問いに関して、密度ゆらぎが非常に小さい線形領域では、摂動を用いた解析が可能であるが、非線形領域については十分な解析法が確立されていない。Davis & Peebles は、統計的考察から一様等方宇宙での非線形領域における二点相関関数の自己相似解を与えている [15]。初期条件として特徴的なスケールをもたない、スペクトルが $P(k) \propto k^n$ という形で与えられる密度ゆらぎを与え、この密度ゆらぎに対してまず線形領域において解析的に二点相関関数を求める。非線形領域においても、スケールによらない解が存在するという仮定のもとに解を調べ、初期の密度ゆらぎのスペクトルに依存する形でべきの値 $\gamma = 3(n+3)/(n+5)$ を求めている。彼らはこの解の導出に高密度領域では速度が 0 になるなどの仮定を与えている。速度に関する仮定を緩めた場合として、Padmanabhan [16] と矢野 & 郷田 [17] らが解析を行い、やはり初期の密度ゆらぎのスペクトルに依存する形でべきの値を求めている。また、井口らはクラスター展開の方法を用いて宇宙膨張がない場合の自己重力系の性質を解析し、相関距離付近で二点相関関数のべきが -1.77 になることを示した [18]。ただ、これらの解が力学的に安定な解かどうかは分かっていないので、力学的な時間発展を考察する必要がある。

ゆらぎの時間発展としては、宇宙初期の微小な密度ゆらぎが重力不安定により成長して銀河などの構造を形成したと考える理論、つまり現在、標準的な構造形成論である、重力不安定説を採用する。重力不安定説にもとづく解析としては、 N 体シミュレーションがよく用いられ、さまざまなモデルに対して、非線形領域における二点相関関数がスケール則となる解も得られている [19-24]。しかし、本研究で考えているフラクタル次元を解析する場合には十分な解像度が得られないと思われる。Peebles [25] と Couchman & Peebles [26] によって繰り込み群を組み合わせた N 体シミュレーションが考案しているが、繰り込みの際に用いるスケーリング則として Davis & Peebles のスケーリング解の関係をを用いている。そのためにこの繰り込みが物理的に妥当なものであるかを注意する必要がある。

そこで本研究では高い解像度を得るために半解析的なアプローチを用いる。高い解像度を得る解析的な方法としては Lagrange 近似を用いる [27-31]。Lagrange 近似の一次の近似は Zel'dovich 近似と呼ばれる。Lagrange 近似ではゆらぎの振舞いを、ダスト粒子の Lagrange 座標における微小変位としてとらえ、この微小変位の線形近似を用いるため、密度ゆらぎそのものは線形近似にはなっておらず、非線形の領域でもよい近似となることが簡単な場合の厳密解との比較によって知られている [32-34]。特に、空間次元モデルにおいてこのアプローチを用いた場合、Zel'dovich 近似の解は厳密解となる。

一方で初期条件として考える時期の情報は、宇宙背景輻射の温度ゆらぎから得られる。宇宙背景輻射は、Penzias と Wilson によりいたる方向からもたらされるマイクロ波として発見され、長い間一様等方なものと思われていた。だが、観測衛星 COBE によりこの背景輻射の温度に 10^{-5} 程度のわずかなゆらぎが存在することが発見された。

*E-mail: tatekawa@gravity.phys.waseda.ac.jp

†E-mail: maeda@gravity.phys.waseda.ac.jp

このCOBEによる宇宙背景輻射の温度ゆらぎについて、輻射温度の等温線の周囲長と、その内部の面積との関係にフラクタル的なべき法則が見い出されたという解析も報告されている [35]。初期の密度ゆらぎとして断熱ゆらぎを考えると、温度ゆらぎと密度ゆらぎは比例関係にある。宇宙背景輻射にフラクタル的な関係が見い出されたならば、断熱ゆらぎを考慮した場合には再結合時に密度ゆらぎがフラクタル的であったことを示唆する。

また、初期宇宙にスカラー場や Yang-Mills 場が存在した時、その場の強さの振る舞いがカオス的になるという結果が提出されている [36-38]。質量密度ゆらぎは初期宇宙の量子ゆらぎと密接にからみ合っている事からも、初期条件として与えられる密度ゆらぎがフラクタル的である可能性がある。

そこで本研究では銀河分布のスケール則が生じた一つの可能性として、初期の密度ゆらぎにフラクタル性がある場合の構造形成問題を考察する。一様・等方で平坦な膨張宇宙において、初期の密度ゆらぎによる重力不安定から構造が形成されたと考え、解析的な方法による時間発展を追う [39]。

ここでは簡単なモデルとして、空間一次元モデルを扱う。フラクタル的な初期ゆらぎとして、線分を一定の比率で分割、除去する Cantor 集合を用いる。数学的にはこの操作を無限回くり返さなければならないが、実際の宇宙ではフラクタル的だとは考えられるスケールには下限が存在するので、途中でこの操作を打ち切って用いる。

時間とともに重力不安定により、銀河、銀河団などの非線形構造が形成されるが、密度の高い領域にこのような構造が出来ているとみなし、一定の密度以上になった領域に対し、フラクタル次元と二点相関関数の計算を行った。また構造が形成された時期の非線形構造のフラクタル次元と、初期条件として与えた密度ゆらぎのフラクタル次元との比較も行った。また、十分に時間が経過すると非線形構造のフラクタル次元は時間発展に対して一定値に落ちているように見え、その値は初期密度ゆらぎのフラクタル次元によらずほぼ同じ値 (~ 0.9) となった。この値は初期密度ゆらぎのフラクタルパターンにランダム性を取り入れても変わらないが、ホワイトノイズを与えた場合にはフラクタル構造が形成されなかった。初期条件がフラクタル的であるという事は、非線形構造の形成に大きな影響を与えていると思われる。

最近、小山 & 小西により、宇宙膨張のない一次元シート系でのフラクタル構造の形成が解析されている [40-42]。そこで今回、背景時空の膨張則と形成された非線形構造のフラクタル次元の関係も解析した。この結果、平坦な宇宙よりも速い膨張則で背景時空が膨張する場合にフラクタル構造が形成されず、逆に遅い膨張則では非線形構造のフラクタル次元が低くなる事がわかった。

II. 銀河・銀河団の分布

現在の銀河分布の観測では、Geller らの観測 [3] や Las Campanas Redshift Survey [4] による銀河団の天球上での分布を見ると、特に際立った分布の片寄りが見られない。宇宙は超銀河団を超えるような非常に大きいスケールでは、一様等方であるとみなせると考えられる。そこで、時空の振る舞いを見る際には第ゼロ次近似として、一様等方なモデルを考えることができる。このモデルは Robertson-Walker 計量で与えられる。

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1)$$

ここで現われた $a(t)$ および K は空間座標 (r, θ, ϕ) によらないパラメーターで、この2つのパラメーターにより宇宙のモデルが特定される。 $a(t)$ は宇宙のスケールファクターと呼ばれ、宇宙の大きさを表わす。 K は空間の曲率の符号を表わすパラメーターである。本研究では簡単のため平坦な宇宙を考える。この場合は $K = 0$ とする。時空の振る舞いを見る時には、宇宙に存在する物質でどのような物質が優勢であるかを考えなければならない。ここでは星や銀河を構成するような、運動エネルギーの大きさが静止質量エネルギーに比べて無視できる物質を考える事にする。このような物質が優勢である場合、スケールファクターは

$$a \propto t^{2/3} \quad (2)$$

と記述できる。つまり宇宙は永遠に膨張するが、その膨張速度は減速していくということである。このような時空における構造の形成を考える。

第ゼロ近似で宇宙は一様・等方とみなすことができると述べた。観測してみると銀河は宇宙に一様に分布しているように見えるが、統計的手法を用いて分布の特徴を解析してみると一様ではない。

銀河の分布を統計的に解析する手法として二点相関関数が用いられる。これはある微小領域 dV_1 と dV_2 が距離 r だけ離れている時に、双方に銀河が見い出される確率を

$$dP = n(1 + \xi(r))dV_1 dV_2 \quad (3)$$

と記述する。 n は銀河の平均個数密度である。この平均分布からのずれ $\xi(r)$ を二点相関関数という。銀河が全くランダムに分布していると $\xi = 0$ となる。

銀河分布については、かつては銀河の分布は天球上の二次元的な分布しか得られなかったため、個々の奥行きの情報得られなかった。よって天球面上に射影された二次元分布から実際の三次元分布を推測するしかなかった。天球面での二点の角度相関から三次元での分布を与える手法が考え出され、東辻 & 木原 [1]、Peebles [2] は二点相関関数が

$$\xi(r) \propto r^{-\gamma}, \gamma \simeq 1.8 \quad (4)$$

という距離のべきに比例することを明らかにした。

最近の観測においても、二点相関関数が距離のべきに従う事が示されている [3-6]。Davis & Peebles は、統計的考察から一様等方宇宙での非線形領域における二点相関関数の自己相似解を求め、このべき則を導いている [15]。彼らの方法は、まず一様等方宇宙で Newton 的な重力相互作用をおよぼす質量 m の質点からなる物質を考えこれらの物質に関して、相空間での質点の分布の時間変化を記述する BBGKY 方程式を導出し、それに対するスケーリング解を求める。その結果を使うと、 $\delta \equiv \rho - \langle \rho \rangle / \langle \rho \rangle$ という密度揺らぎを定義した際に、 $\delta > 1$ という物質が集中した領域で、二点相関関数

$$\xi(r) \propto r^{-\gamma} \quad (5)$$

のべき γ が、初期密度ゆらぎのパワースペクトル $P(k)$

$$P(k) \propto k^n \quad (6)$$

のべき n によって次のような関係で与えられるというものである。

$$\gamma = \frac{9 + 3n}{5 + n} \quad (7)$$

ただし、この解を求める際にいくつかの仮定を用いている。仮定の中で注目すべきものは、構造の固有運動と宇宙膨張による速度がつり合って、全体として速度が 0 になるというものである。また、三点相関関数は二点相関関数で全て書き下せるという仮定も用いている。この仮定が妥当なものかが分からないため、Padmanabhan [16] と矢野 & 郷田 [17] は固有速度を

$$h \equiv -a \frac{\langle \dot{x} \rangle}{\dot{a} x} \quad (8)$$

というパラメーターで記述し、

$$\gamma = \frac{3h(n+3)}{2+h(n+3)} \quad (9)$$

という結果を得ている。また井口らはクラスター展開の手法を用いて宇宙膨張のない場合の自己重力系を取り扱い、相関距離付近で二点相関関数のべきが -1.77 になることを示している [18]。しかし、これらの解が安定に存在するかわかっていない。そこで力学的に時間発展を行い、二点相関関数がべき則に従うかを調べる必要がある。

III. 宇宙の晴れ上がり時の初期密度ゆらぎ

1965 年に Penzias と Wilson によって、宇宙にはマイクロ波の背景放射が発見され、その電波は銀河系、太陽系などからの放射や宇宙背景放射に対する地球の固有運動の影響を取り除くと非常に等方的であり、2.7K のプランク分布を示していることがわかった。この背景放射は COBE によって精密に調査され温度が $2.728 \pm 0.004\text{K}$ であり、また固有運動の影響を取り除いた CMB の天球上での温度ゆらぎは、天球上の 7 度角の分解能において $\delta T/T \simeq 10^{-5}$ というものであったということが明らかにされた。

この背景放射の温度ゆらぎに対し、de Gouveia Dal Pino ら [35] は次のような解析を行った。背景放射の温度ゆらぎは銀河面などの一部を除いて、ほぼ全域に渡って観測されている。この観測結果により、天球上に等温線を引くことができる。この等温線の長さや等温線で囲まれる領域の面積との関係について解析した。つまり全天を非常に細かいメッシュで区切り、ある等温線に着目して、等温線を含むメッシュの数と等温線で囲まれる領域の関係を調べていった。等温線の周囲長と内部の面積の関係を調べた。

$$a^{1/2} = F p^{1/D} \quad (10)$$

a : 等温線で囲まれる領域の面積

p : 等温線の長さ

F : 比例定数

de Gouveia Dal Pino らの解析の結果、 $D = 1.43 \pm 0.07$ という値が得られ、温度ゆらぎにフラクタル性が存在する事を主張している。

宇宙初期の密度ゆらぎとして断熱ゆらぎを仮定すると

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (11)$$

なる関係が成り立つ。この関係は、電磁波と相互作用する物質であるバリオンに対してのみ成り立つ。ここから、背景放射がフラクタル的であったとすると宇宙初期のバリオンの密度ゆらぎもフラクタル的な分布であったことが示唆される。

また、宇宙初期のような輻射優勢の状況で、等方、あるいは非等方宇宙モデルにおける Yang-Mills 場の振る舞いを考慮したとき、場の非等方成分がカオス的に振る舞う事が調べられている [36,37]。また、二つのスカラー場を組み合わせた場合にも、場の振る舞いがカオス的になることが調べられている [38]。構造形成の種となる密度ゆらぎは、インフレーション時の量子揺らぎから派生したと考えられるため、カオス的な場の振る舞いはフラクタル的な密度ゆらぎを生成する可能性がある。

IV. 重力不安定による構造形成

A. 構造形成の基礎方程式

宇宙の構造の作る重力ポテンシャルが非相対論的で、物質が完全流体であると見なした時は、Newton 力学をもとにした次の三つの方程式が構造の進化に対する基礎方程式になる [30,43]。

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)_r + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_r \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_r P + \frac{\mathbf{f}_{ex}}{\rho} \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_{ex} = -\nabla_r \Phi, \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (14)$$

時間微分の添字は、物理的な座標系での時間微分である。Hubble の法則より、宇宙は膨張しているので、宇宙膨張に乗った新しい座標系（背景宇宙の共動座標系）

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{a(t)}, a(t) : \text{scale factor} \quad (15)$$

で方程式を書き直すと、次のような基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \{\mathbf{v}(1 + \delta)\} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla \phi - \frac{1}{a\rho} \frac{d\rho}{dt} \rho_b \nabla \delta \quad (17)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_b a^2 \delta \quad (18)$$

$$\delta \equiv \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}$$

$$\phi = \Phi - \frac{2}{3} \pi G a^2 \mathbf{x}^2 \rho_b + \frac{1}{6} \Lambda a^2 \mathbf{x}^2$$

これらの方程式系において、次のような摂動を考える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \mathbf{S}(t, \mathbf{q}) \quad (19)$$

$\mathbf{x}$: 共動座標 (Euler 座標)

$\mathbf{q}$: 粒子の Lagrange 座標, $(\nabla \times \mathbf{S} = 0)$

つまり、粒子の一樣分布からの微小変位を摂動として与え、運動方程式を解く。この摂動による近似法を Lagrange 近似といい、特に一次まで摂動を考える近似法を Zel'dovich 近似という。本研究のような空間次元シート系では、Lagrange 近似の一次の近似である Zel'dovich 近似の解が厳密解となる。平坦な背景宇宙の場合、厳密解は

$$x = q + a(t) S_1(q) + a(t)^{-3/2} S_2(q) \quad (20)$$

で考えられる。 S_1, S_2 は初期条件から決まる。

ところで Lagrange 近似では shell crossing という問題が生じる。これは密度ゆらぎが成長していくと密度無限大の点が生じ、以降の時間発展が追えなくなるという問題である。その後の現象を扱うためには、今考えている一次元のシート系では、一般に N 体シミュレーションによりそのシート同士の相互作用を考慮する必要がある。本研究では簡単のため衝突に際してシート同士はすり抜けるものとして取り扱う。このようなモデルにおいては、シートが交差した時に密度無限大の点を生じるが、その後も解析的に取り扱う事ができ、十分な時間発展を行う事ができる [45,46]。

B. フラクタル的な初期密度ゆらぎ

我々は初期密度ゆらぎをフラクタル的にした場合に興味があるので、フラクタル的な初期条件を与える必要がある。一次元系でのフラクタル集合として Cantor 集合がある [44]。Cantor 集合は次のようにして与えられる。まず長さ L の線分の中央部を一定の比率 n_D で除去する。次に残った二本の長さ L/n_D の線分のそれぞれの中央部を、比率 n_D で除去する。数学的にはこの操作を無限に繰り返した結果として与えられるが、現実の宇宙にはフラクタル的な関係が無限のスケールであるとは限らない。そこでこの操作を途中でうち切る。うち切った結果、線分が残った領域を密度ゆらぎが正 (δ_+)、線分を取り除いたところを密度ゆらぎが負 (δ_-) であるとして初期条件を与える。 δ_+ と δ_- は一定値で $\delta_+ \simeq |\delta_-| \simeq 10^{-3}$ として与える。このゆらぎは非常に人為的であるが、我々はまず非常に簡単な場合としてこのようなゆらぎを用いる [39]。

1. 普通の Cantor 集合の場合

普通の Cantor 集合を用いる場合、我々は七通りの線分除去の比率 n_D を選択した。それぞれの密度ゆらぎのフラクタル次元は

$$D_0 = \frac{\log 2}{\log[2n_D/(n_D - 1)]} \quad (21)$$

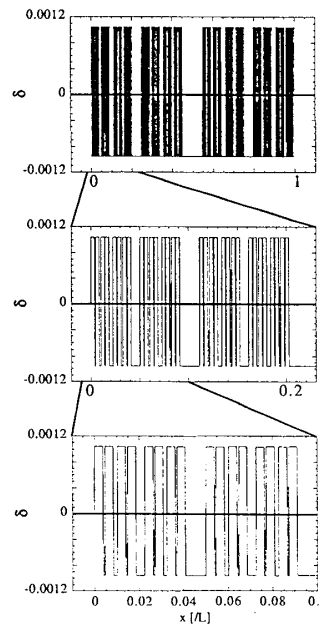
の様に与えられる。我々は $\delta_+ \sim |\delta_-|$ のもとで、解像度が同程度になるように線分を除去する回数 N_R を選んだ。この結果、初期条件は表 1 のようになる。

n_D	D_0	N_R	ℓ/L	δ_-
3	0.631	5	1/243	-0.152×10^{-3}
6	0.792	6	1/191.10	-0.504×10^{-3}
8	0.838	7	1/325.95	-0.647×10^{-3}
10	0.868	7	1/267.62	-0.917×10^{-3}
12	0.888	7	1/235.36	-1.19×10^{-3}
15	0.909	7	1/207.47	-1.61×10^{-3}
20	0.931	7	1/183.29	-2.31×10^{-3}

表 1:

Cantor 集合における線分の分割比 n_D 、フラクタル次元 D_0 、線分を取り除く回数 N_R 、解像度（モデル全体と最短の線分の長さの比 ℓ/L ）、負の密度ゆらぎ δ_- 。

例として Fig. 1 で $n_D = 10$ の場合の Cantor 集合を与えた場合の密度ゆらぎを示す。

FIG. 1. $n_D = 10$ の Cantor 集合を応用した初期密度ゆらぎ

フラクタル構造を詳細に解析するため、モデルのスケール L に対し 2^{17} 枚のシートを置く。フラクタル次元は Box-counting の方法を用い、 $2^{-16}L$ から $10^{-1}L$ までのスケールで解析を行う。

Cantor 集合は非常に規則的な集合であるので、この規則性故に特殊な非線形構造を形成する可能性がある。そこで異なる初期条件を与えた場合を考える。

2. ランダム性を取り入れた Cantor 集合の場合

ランダム性を取り入れた Cantor 集合は、普通の Cantor 集合の場合と同様に決められた比率 n_D で線分を分割、除去していくが、除去していく位置をランダムにしたものと定義する。このような定義で与えられる集合のフラクタル次元も、box-counting の方法による解析から、普通の Cantor 集合のフラクタル次元とほぼ同じになる事が分かる。

我々は三通りのランダム性を取り入れた Cantor 集合のモデルを解析した。二つは $n_D = 10$ であり、一つは $n_D = 12$ である。このような初期条件の例を Fig. 2 で示す。

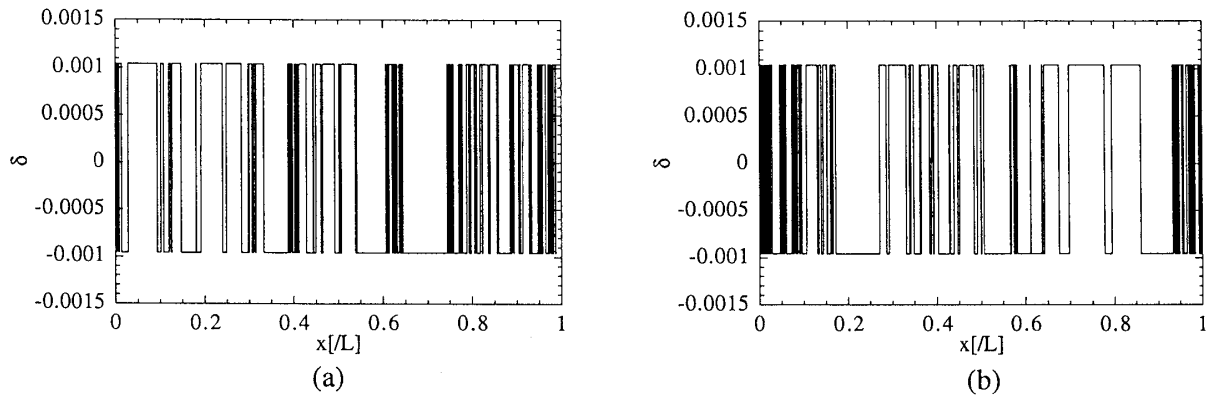


FIG. 2. ランダム性を取り入れた $n_D = 10$ の Cantor 集合を応用した初期密度ゆらぎ

3. ホワイトノイズの場合

初期密度ゆらぎがフラクタル的であるかどうか、非線形構造がフラクタル的になるかを決定する可能性がある。その対照実験として、ホワイトノイズを初期条件として与えた場合も解析する。ホワイトノイズの場合は、 $-10^{-3} \leq \delta \leq 10^{-3}$ である乱数で与えられた密度ゆらぎを初期条件とした。

V. 密度ゆらぎの時間発展

どのような非線形構造が形成されるかを調べるには、Lagrange 近似で用いている Lagrange 座標系ではなく、物理的に意味のある Euler 座標系で解析しなければならない。各時刻での構造を比較する際、宇宙膨張に乗った共動座標 x を用いると便利である。

初期時刻のスケールファクターを $a_0 = 1$ とする。初期密度ゆらぎは $\sim 10^{-3}$ なので、最初の shell crossing は $a = a_{\text{cross}} \simeq 10^3$ で起きる。ここで我々は $a = (2 \sim 3) \times 10^4$ まで時間発展を行う。

フラクタル構造を詳細に解析するため、モデルのスケール L に対し 2^{17} 枚のシートを置く。フラクタル次元は Box-counting の方法を用い、 $2^{-16}L$ から $10^{-1}L$ までのスケールで解析を行った。

A. 普通の Cantor 集合のモデルの場合

まず $n_D = 10$ の場合の Cantor 集合を用いたモデルでの時間発展を見る。Fig. 3 は密度ゆらぎの時間発展を示す。shell crossing 前には重力不安定の影響が及んでいるが、密度ゆらぎは初期条件を色濃く残す。shell crossing 後はシートの入れ替わりが頻繁に起きるために初期条件の規則性は徐々に消えていく。実際に密度ゆらぎを見てみると、 $a \simeq 5 \times 10^2$ で非線形構造と呼ばれる $\delta > 1$ の構造が現れる。 $a \simeq 1 \times 10^3$ で shell crossing を起こし、それ以後はシートの入れ替わりによって初期条件の影響が徐々に消えていく。しかしシートが衝突しても、それぞれのシートの速度がすぐに 0 にな

るわけではないので、非線形構造のパターンは時間発展により次々と姿を変えていく。十分に時間が経過した後の密度ゆらぎを見ると、一部を拡大しても全体と類似したパターンを示す (Fig. 4)。

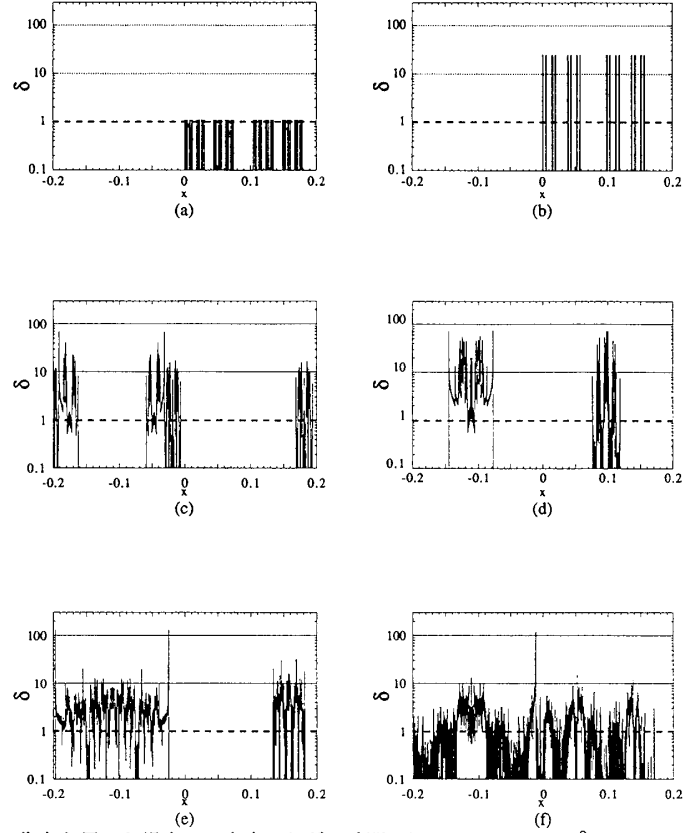


FIG. 3. $n_D = 10$ の Cantor 集合を用いた場合の、密度ゆらぎの時間発展: (a) $a = 5 \times 10^2$, (b) $a = a_{\text{cross}} \sim 10^3$, (c) $a = 6 \times 10^3$, (d) $a = 10^4$, (e) $a = 1.5 \times 10^4$, (f) $a = 2 \times 10^4$

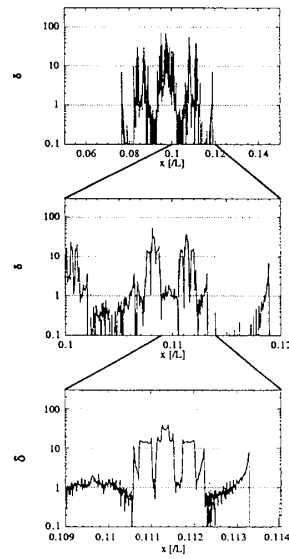


FIG. 4. $n_D = 10$, $a = 10^4$ での密度ゆらぎの拡大図

非線形構造がフラクタル的かどうかを判定するため、box-counting の方法によるものフラクタル解析を行う。 $\delta > 1$ の非線形構造の分布に対して解析を行うと、shell crossing 前にはフラクタル次元が初期値 $D_0 = 0.868$ から徐々にずれ、エラーバーも大きくなっていく (Fig. 5 (a))。初期のパターンの規則性は保たれているにもかかわらず、自己重力によって密度ゆらぎが正の領域が収縮するため、フラクタル構造そのものは崩れていく。しかし shell crossing 後はフラクタル次元が再び増加し、エラーバーもだんだん小さくなっていく。さらに驚くべき事に、 $a \simeq 1.5 \times 10^4$ では D_F は一定値 0.9 に落ち着いている (Fig. 5 (b))。この値は初期条件のフラクタル次元 $D_0 = 0.868$ に近い。

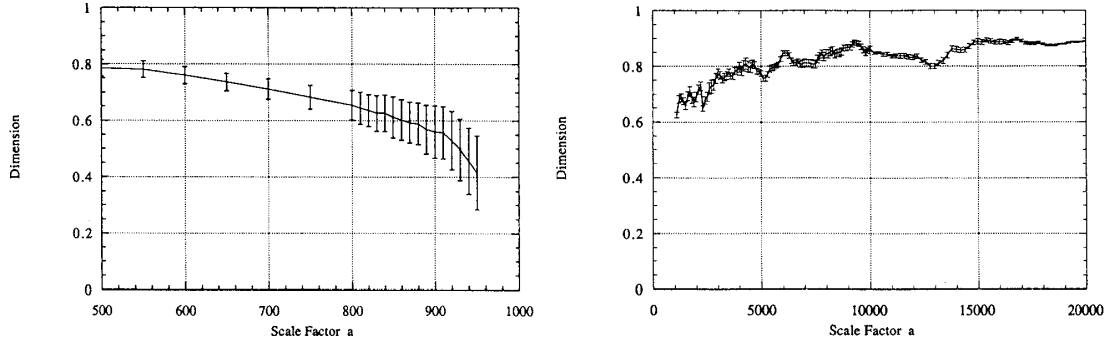


FIG. 5. $n_D = 10$ の Cantor 集合を用いた場合のフラクタル次元 : (a) shell crossing 前、(b) shell crossing 後

$n_D = 10$ の場合には shell crossing 後にフラクタル構造が形成されたが、このフラクタル次元は初期密度ゆらぎのフラクタル次元に近い値を取る。非線形構造のフラクタル次元は初期条件を反映しているのではなかろうか。この問いに答えるため、我々は異なる n_D 、すなわち $n_D = 3, 6, 8, 12, 15, 20$ の場合について解析を行った。それぞれの場合の初期密度ゆらぎのフラクタル次元は、表 1 の通りである。時間発展の様子はどのモデルでも似ており、フラクタル次元の時間変化は Fig. 6 の通りである。驚くべき事に $a = (2 \sim 3) \times 10^4$ において、全てのモデルでフラクタル次元が 0.9 に近づいた。フラクタル構造を詳細に調べるため、box-counting の方法での関係 ($x-N(x)$) を調べたところ、ほぼ全スケールでべき則に従うことが分かった。すなわち、たとえ初期条件のフラクタル次元が異なっても、時間発展によって形成された非線形構造のフラクタル次元は、我々の計算の精度では普遍的なものであることが分かった。

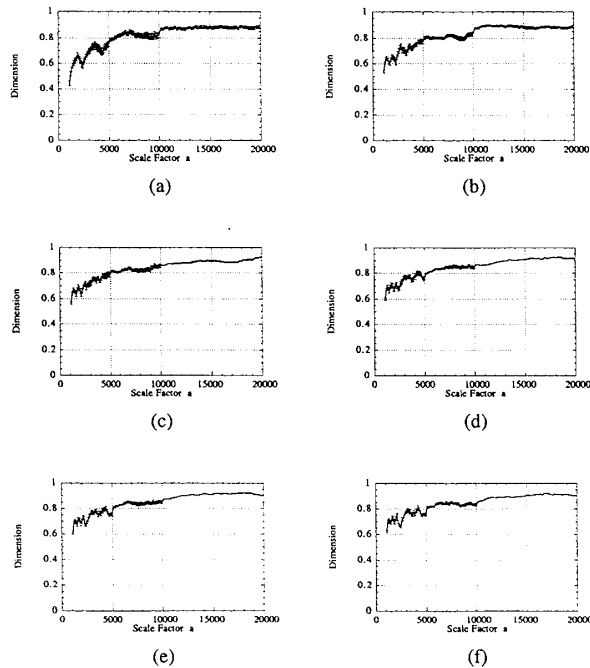


FIG. 6. Cantor 集合を用いた場合のフラクタル次元 : (a) $n_D = 3$ 、(b) $n_D = 6$ 、(c) $n_D = 8$ 、(d) $n_D = 12$ 、(e) $n_D = 15$ 、(f) $n_D = 20$

B. ランダム性を取り入れた Cantor 集合のモデルの場合

Cantor 集合は規則的に構成され、非常に対称性が高いので、この対称性が後の非線形構造の形成に大きく影響している可能性がある。つまり、普遍的なフラクタル次元は初期密度ゆらぎとして Cantor 集合を用いたために得られたかもしれない。この可能性を調べるため、我々はランダム性を取り入れた Cantor 集合を構成し、初期密度ゆらぎとして与えた場合の非線形構造を解析した。

我々は三つのモデルを解析した。二つは $n_D = 10$ であり、残りの一つは $n_D = 12$ である。この場合にも普通の Cantor 集合を用いたモデルの時と同じように、十分に時間が経つとフラクタル次元が 0.9 付近で落ち着いた (Fig. 7)。ここで用いたモデルはランダムに線分を分割、除去したため、最小の線分の長さは普通の Cantor 集合の場合に比べて短い。結果として、一定のフラクタル次元に落ち着くまでの時間は、Cantor 集合を用いた場合に比べて長くなった。例えば $n_D = 12$ の場合、 $a \simeq 2.3 \times 10^4$ 付近でフラクタル次元が 0.9 に落ち着くようになった。

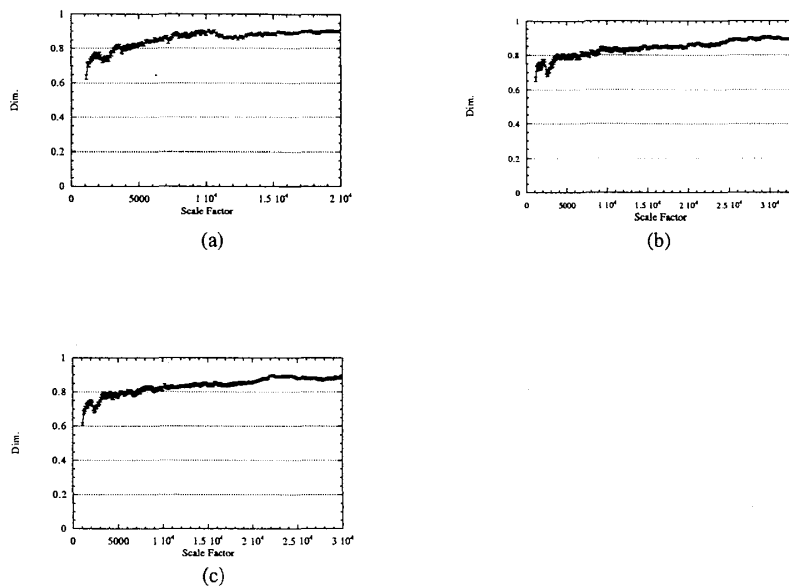


FIG. 7. ランダム性を取り入れた Cantor 集合を用いた場合のフラクタル次元 : (a) $n_D = 10$ 、モデル 1、(b) $n_D = 10$ 、モデル 2、(c) $n_D = 12$

C. ホワイトノイズを用いた場合

普遍的なフラクタル次元を持つ非線形構造は、初期条件に依存せず系の性質として現れるのだろうか。この問いに答えるため、我々は初期条件にホワイトノイズを与えた場合の構造を解析した。二つの初期条件を与えて解析を行ってみたが、Cantor 集合を用いた場合とは異なる次元 (~ 0.7) に落ち着いた (Fig. 8)。またエラーバーも大きくなった。box-counting の関係を注意深く調べたところ、べき則からずれていることがわかったので、形成された構造はフラクタル的でないといえる (Fig. 9)。

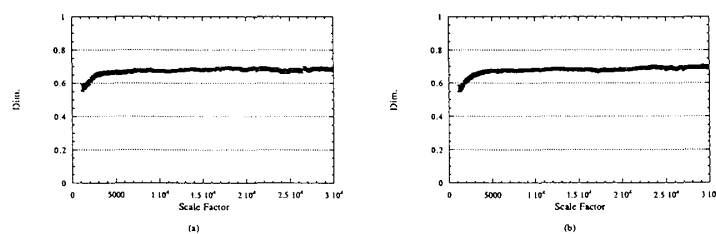


FIG. 8. ホワイトノイズを用いた場合のフラクタル次元 : (a) モデル 1、(b) モデル 2

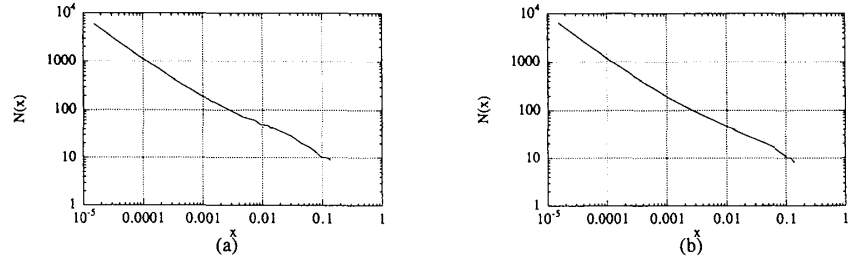
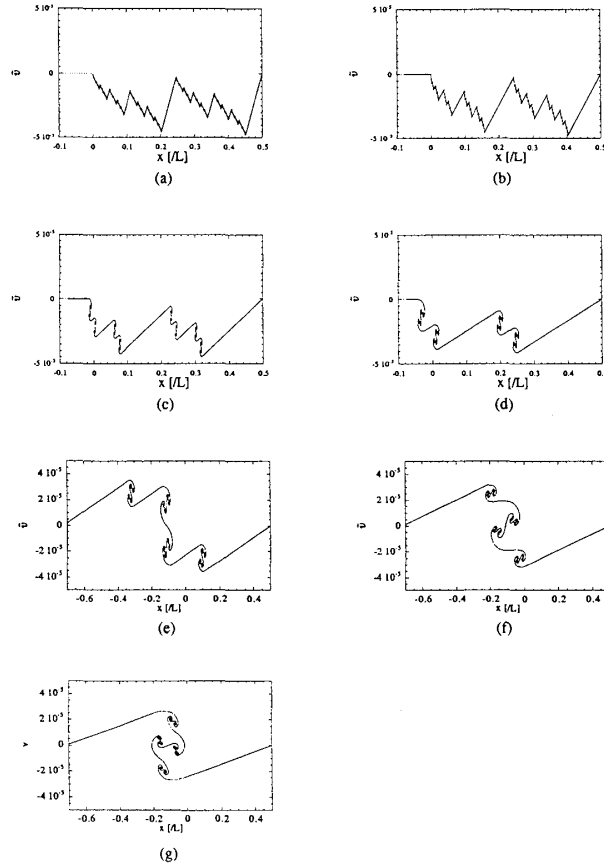


FIG. 9. ホワイトノイズを用いた場合の box-counting の関係 : (a) モデル 1、(b) モデル 2

VI. 相空間での解析

box-counting の方法による解析の結果、フラクタル的な初期密度ゆらぎから普遍的なフラクタル次元を持つフラクタル構造が形成されることが分かった。この構造についてさらに情報を得たい。そこで速度分布も含めた相空間での解析を行う。

$n_D = 10$ とした普通の Cantor 集合のモデルで時間発展を見てみる (Fig. 10)。 δ_+ と δ_- を一定値にしたため、初期の相空間での分布はギザギザした折れ線として表される。初期条件は Cantor 集合を用いて与えているため、この図を拡大すると相似の図形が現れる。この様子は shell crossing 前までは大きく変わらず、折れ線の傾きが変わるだけである。shell crossing の後は、この線は非常に複雑な動きを示す。重力により二枚のシートが入れ替わるという現象が繰り返され、shell crossing 以前には折れ線だったものが、だんだんと渦を巻くようになってくる。構造が発展するにつれて、小さな渦が組み合わさって大きな渦を形成していく。

FIG. 10. $n_D = 10$ のモデルの、相空間での構造形成 : (a) $a = 1$ 、(b) $a = 10^3$ 、(c) $a = 3 \times 10^3$ 、(d) $a = 5 \times 10^3$ 、(e) $a = 10^4$ 、(f) $a = 1.5 \times 10^4$ 、(g) $a = 2 \times 10^4$

「フラクタル」次元が 0.9 付近に落ち着いたとき、大きな渦はいくつもの小さな渦から構成されていることが分かるようになる (Fig. 11)。

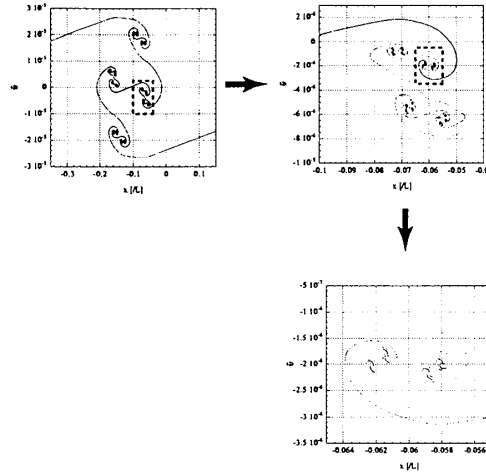


FIG. 11. $n_D = 10$ のモデルの $a = 2 \times 10^4$ での、シートの分布。点線部を拡大していくと、大きな渦を似た小さな渦が構成している事がわかる。

この離散的な自己相似性は、Cantor 集合を用いた他の初期条件の場合にも見られる。たとえフラクタル的な密度ゆらぎのパターンが崩れても、相空間では痕跡を残す。

おのおののシートに着目すると、それぞれのシートは何度も渦を巻くような複雑な行動をとらないにも関わらず、全体としてだんだんと渦を巻いていくようになる (Fig. 12)。

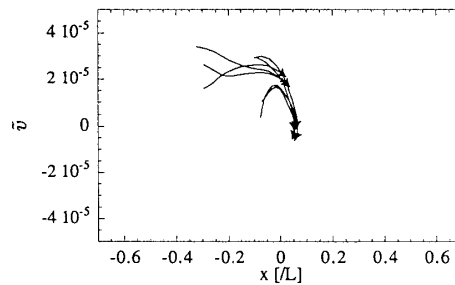


FIG. 12. $n_D = 10$, $6000 \leq a \leq 20000$ での七枚のシートの運動

ランダム性を取り入れた Cantor 集合のモデルの場合にも、同様に大きな渦を小さな渦の集団が構成するという様子が見られる。しかし普通の Cantor 集合ほどは、はっきりした離散的な自己相似性を示していない (Fig. 13)。

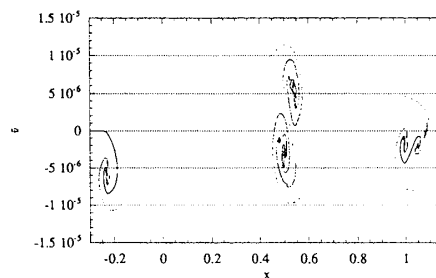


FIG. 13. ランダム性を取り入れた Cantor 集合 ($n_D = 12$) の場合の、相空間でのシートの分布 ($a = 30000$)。

ホワイトノイズの場合には、このような関係は見いだされなかった (Fig. 14)。

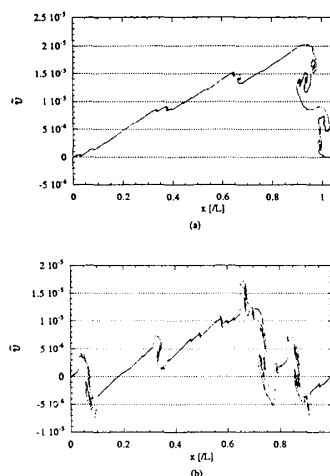


FIG. 14. ホワイトノイズの場合の、相空間でのシートの分布 ($a = 30000$): (a) モデル 1, (b) モデル 2

VII. 背景時空の膨張則を変えた場合

我々は平坦な宇宙モデルにおける一次元シート系の時間発展を行い、初期密度ゆらぎがフラクタル的であった場合には、形成される非線形構造のフラクタル次元が 0.9 付近に落ち着くことをみた。この普遍的なフラクタル次元、さらにはフラクタル構造の形成は背景時空の膨張則に依存するのだろうか。

最近、小山&小西により、宇宙膨張のない一次元シート系におけるフラクタル構造の形成が議論されている [40–42]。彼らの結果によると、フラクタル的な非線形構造を形成するのに、フラクタル的な初期条件は必要ではない。しかし初期条件として $v = 0$ という条件が課されている。

彼らの結果と我々のモデルを比較する際、大きな違いは宇宙膨張があるかどうかである。それでは背景として扱っている宇宙が平坦な宇宙モデルでないときには、非線形構造はどのように形成されるだろうか。

一様等方宇宙モデルを仮定すると、現在の観測から開いた宇宙モデルである可能性は低く、宇宙項の存在が示唆されている。このようなモデルでの構造形成を考えた場合、空間曲率、宇宙項の影響が新たに付け加わる。曲率や宇宙項が背景時空の膨張に大きく影響するような時刻になると、密度ゆらぎの成長は非常にゆるやかになり止まってしまう。それ以前の時刻では平坦な宇宙モデルの場合と振る舞いがあまり変わらない。現実的なモデルを考えた場合には、宇宙モデルの違いによる非線形構造の違いがあまり見えない。さらに密度ゆらぎの成長が止まってしまうので、フラクタル次元が安定になるのは重力系の性質か宇宙膨張の影響かという区別が不可能になる。

そこで実際の観測とは離れて膨張則を与えることにする。仮定として宇宙膨張は時間のべきに従うとする。

$$a(t) \propto t^n \quad (22)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (23)$$

$n = 2/3$ の場合が、平坦な宇宙モデルの場合である。このような膨張則のもとで圧力の影響を無視したダスト流体の振る舞いを考える。このような膨張則が与えられた場合にも、Lagrange 近似を用いて厳密解を得ることが出来る。

1/6 から 1 まで、1/6 刻みで六通りの n を与えた。まず $n > 2/3$ の場合を解析すると、 $n = 1$ の場合にはフラクタル構造が形成されない。構造形成は背景時空の膨張に局所的な重力がうち勝つことによってなされるので、背景時空の膨張が速すぎることがフラクタル構造が出来ない原因と思われる。 $n = 5/6$ の場合にはフラクタル次元は 0.9 付近に落ち着いた。一方 n が 2/3 より小さい場合を解析すると、フラクタル構造が形成され、その次元は $n = 2/3$ の場合よりも低く 0.7 または 0.8 になった。

これらの結果から、非線形構造のフラクタル次元は背景時空の膨張則に大きく依存することがわかった。

VIII. CONCLUSION

我々は背景時空の膨張を取り入れた一次元シート系において、フラクタル的な初期密度ゆらぎの非線形成長について解析を行った。平坦な宇宙の中での発展を考えた場合には、普通の Cantor 集合を応用した七つのモデル、ランダム性を

取り入れた Cantor 集合を応用した三つのモデル、そして二つのホワイトノイズのモデルを扱った。ホワイトノイズを用いた場合を除いて、ゆらぎが非線形構造に成長した時には普遍的なフラクタル次元 (0.9) が、ある種のアトラクターになっている事を我々は見出した。ホワイトノイズの場合にはフラクタル次元が 0.7 付近で落ち着くように見えるが、フラクタル次元を決める時の誤差が他の場合に比べて大きく、box-counting の方法からは明らかなべき則が見い出されなかった。つまり、ホワイトノイズを初期条件として与えた場合には、フラクタル構造が形成されないだろうという事である。相空間の解析から我々は、大きな渦巻きが類似の小さな渦巻きから成り立つという、入れ子構造となった非線形構造を見つけた。特に普通の Cantor 集合を用いた場合には、密度分布は規則性を牛なっているにも関わらず、モデルの離散的な自己相似性を保っている事を見た。

それではなぜフラクタル次元は 0.9 に近づくのだろうか。この構造は本当にアトラクターなのだろうか。この問いに対するヒントを与える仕事が、過去になされている。郷田と中村は初期条件としてパワースペクトルを与えた際の、宇宙膨張の入った一次元シート系の時間発展を解析している [45,46]。最初に shell crossing が起きた時、Euler 座標と Lagrange 座標の関係は

$$x = q_c + \beta(q - q_c)^3 + \dots, \quad (24)$$

のようになり、その後 shell crossing が起きた際には

$$x = q_c + \beta(q - q_c)^2 + \dots. \quad (25)$$

という形で記述される。Arnold のカタストロフィーの分類によると、それぞれ A3 と A2 という種に分類される。A3 は構造不安定であるので膨張宇宙では一時的に現れるものだが、A2 は構造安定で初期のパワースペクトルに対し普遍的に現れるものである。この A2 のカタストロフィーは

$$\begin{aligned} \delta_k &= \int \delta(x) e^{ikx} dx \\ &\propto \int (\beta x)^{-1/2} e^{ikx} dx \\ &= (\beta k)^{-1/2} \int \eta^{-1/2} e^{i\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (26)$$

つまり、 $P(k) \sim k^{-1}$ というスペクトルを与える。これは二点相関関数のべき $\gamma = 0$ と関係付くので、つまりフラクタル次元 $D_F = 1$ と結びつく。この次元は、我々の「普遍的」次元 0.9 に近い。

たしかにフラクタル次元は近いが、我々は新しい別のタイプの安定構造を見ている可能性がある。矢野と郷田はより現実的なモデル、つまりカットオフのあるべき的なパワースペクトルを初期条件として与えた場合を考え、波数空間で特徴的な五つの領域が現れる事を示した [47]。

このうち、領域 1 は線形成長により現れるものである。領域 2 は single-caustic regime と呼ばれ、前述の $P(k) \sim k^{-1}$ を与える。領域 3 は multi-caustic regime と呼ばれ、 $P(k) \sim k^{-\mu}$ と与えられた時の μ は初期条件のスペクトルのべきに依存する。カットオフ以下では二つの領域が現れる。この二つの領域の小さい方は $P(k) \sim k^{-1}$ を与え、A2 タイプの安定解に対応する。領域 3 と 5 に挟まれた領域で。彼らは $k^{-\nu}$ を与える領域を見出ししている。 ν は初期条件に独立で 1 より少し小さい値を取る。彼らはこの領域を virialized regime と呼んでいる。この領域こそが新たな安定構造を示す領域と考えられる。

そこで我々は普遍的な次元 0.9 を示す領域は、領域 4 の virialized regime に対応し、ホワイトノイズの場合に現れる 0.7 という値は領域 3 に対応すると予想する。box-counting の方法を用いた我々の再解析によると、四通りの初期条件で $\nu \sim 0.9$ を示した。また我々の Cantor 集合を応用したモデルでは、どのスケールでもゆらぎに大小がないため、 $P(k) \propto k^0$ なるモデルと対応をつけた。 $P(k) \propto k^0$ の場合の解析から $\mu \sim 0.7$ となった。また Cantor 集合を応用したモデルを見ると、 $n_D = 15, 20$ の場合には大スケールの領域で 0.7 に対応するべきを与えたので、0.7 という値は領域 3 に対応すると推測できる。

ここで推測されたフラクタル次元は、背景時空の膨張が「平坦な宇宙モデル」に従う場合に得られる値である。非線形構造は背景時空によって引きずられる膨張に自己重力による収縮が打ち勝つてできる。つまり膨張が速ければ非線形構造が出来ない訳である。宇宙膨張を速くした時にフラクタル構造が形成されないのも、このためと思われる。逆に宇宙膨張を遅くした時、非線形構造のフラクタル次元は下がる傾向にあった。なぜこのような傾向が見られるのかという理由は、今後明らかにすべきと思われる。

我々は密度ゆらぎのパターンを非常に簡単なものにした。もし Cantor 集合以外のパターンを密度ゆらぎに応用した場合、非線形構造はフラクタル的になるのだろうか。また、今回のモデルでは密度ゆらぎはスケールによらなかった。すなわち、 $\delta_+ = \delta_- =$ をそれぞれ一定値にした。実際には例えばスペクトルが波数のべきに従うといった事が考えられる。スケールに依存するフラクタル的な密度ゆらぎを与えた場合、非線形構造はどのように形成されるだろうか。現在の構造形成のシナリオでは、大きな構造が出来て分裂すると考えるトップダウンシナリオと、小さな構造が合体していくボトムアップシナリオが考えられている。より現実に近いフラクタル的な密度ゆらぎを与えた場合、どちらのシナリオに従うだろうか。

また、今回は密度ゆらぎが $\delta > 1$ の領域のみに着目し、モノフラクタル解析のみを行った。この結果、初期条件によらずフラクタル次元が一定値に落ち着く事が示された。もし密度ゆらぎのパターンをより一般化するならば、解析法もマルチフラクタルを用いたものに拡張すべきである。マルチフラクタル解析により、初期条件の違いによる非線形構造の違いも見えてくるだろうと期待できる。

我々のモデルは、一様等方宇宙モデルのもとで物質の運動を Newton 的に扱った。この結果として非線形構造がフラクタル的になった。ところで、初期に与えた『一様等方』という仮定は、非線形のフラクタル構造が形成された時も妥当だろうか。一様等方モデルからのずれを考慮するには、物質の運動に対する時空への反作用の効果を解析しなければならない [48]。もしこの反作用の効果が十分に小さければ現在のモデルは妥当であるが、そうでなければ反作用の効果を考慮した構造形成の理論を構築し、その中で非線形構造がどのように形成されていくかを解析する必要がある。時空への反作用の効果を考慮する事により、非線形構造の形成のシナリオが変更を受ける可能性がある。

実際の宇宙の観測と照らし合わせるには、やはり空間三次元モデルを適用すべきである。しかし三次元モデルでは、Zel'dovich 近似はもはや厳密解を与えない。そのために新たな時間発展の方法を考える必要がある。高い解像度が得られ、なおかつ誤差の少ない時間発展の方法として、Couchman & Peebles [26] によって実行された、繰り込み群を N 体シミュレーションに組み合わせる方法がヒントを与えるだろう。

-
- [1] H. Totsuji and T. Kihara, Pub. Astron. Soc. Japan, **21** (1969), 221.
 - [2] P.J.E. Peebles, Astron. Astrophys., **32** (1974), 197.
 - [3] M.J. Geller and J.P. Huchra, Science, **246** (1989), 897.
 - [4] Y.P. Jing, H.J. Mo, and G. Börner, Astrophys. J., **494** (1998), 1.
 - [5] L. Guzzo, L. et al., "Wide Field Surveys in Cosmology" (eds. S. Colombi & Y. Mellier, Paris), 85.
 - [6] L. Guzzo et al., Astron. Astrophys., **355** (2000), 1.
 - [7] T. Kurokawa, M. Morikawa, and H. Mouri, Astron. Astrophys., **344** (1999) 1.
 - [8] S. Bharadwaj, A.K. Gupta, and T.R. Seshadri, Astron. Astrophys. **351** (1999) 405.
 - [9] J. Pan and P. Coles, Mon. Not. R. Astron. Soc., **318**(2000) L51.
 - [10] F. Sylos Labini, M. Montuori, and L. Pietronero, Phys. Rep., **293** (1998), 61.
 - [11] S. Maddox, "Large Scale Structure: Tracks and Traces" (eds. V. Mueller et.al, Singapore), 91.
 - [12] J. Loveday and J. Pier, "Wide Field Surveys in Cosmology" (eds. S. Colombi & Y. Mellier, Paris), 317.
 - [13] Knapp, J. et al., 1999 The Sloan Digital Sky Survey Project Book
<http://www.astro.princeton.edu/PBOOK/welcome.htm>
 - [14] M.M. Colless, Publ. Astron. Soc. Australia, **17** (2000) in press.
 - [15] M. Davis and P.J.E. Peebles, Astrophys. J. Supp., **34** (1977), 425.
 - [16] T. Padmanabhan, Mon. Not. R. Astr. Soc., **278** (1996) L29.
 - [17] T. Yano and N. Gouda, Astrophys. J., **495** (1998), 533.
 - [18] O. Iguchi et al, Phys. Lett. **A260** (1999), 4.
 - [19] K. Miyoshi and T. Kihara, Pub. Astron. Soc. Japan, **27** (1975) 333.
 - [20] G. Efstathiou, Mon. Not. R. Astr. Soc., **187** (1979), 117.
 - [21] S.J. Aarseth, J.R. Gott III, and E.L. Turner, Astrophys. J., **228** (1979), 664.
 - [22] C.S. Frenk, S.D.M. White, and M. Davis, Astrophys. J., **217** (1983), 417.
 - [23] M. Davis, G. Efstathiou, C.S. Frenk, and S.D.M. White, Astrophys. J., **292** (1985), 371.
 - [24] Y.P. Jing, Astrophys. J., **503** (1998), L9.
 - [25] P.J.E. Peebles, Astrophys. J., **297** (1985), 350.
 - [26] H.M.P. Couchman and P.J.E. Peebles, Astrophys. J., **497** (1998), 499.
 - [27] Ya.B. Zel'dovich, Astron. Astrophys., **5** (1970), 84.
 - [28] F.R. Bouchet, R. Juszkiewicz, S. Colombi, and R. Pellat, Astrophys. J., **394** (1992), L5.
 - [29] F.R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz, Astron. Astrophys., **296** (1995) 575.
 - [30] P. Coles and F. Lucchin, Cosmology (1995, John Wiley & Sons).
 - [31] P. Catelan, Mon. Not. R. Astr. Soc., **276** (1995), 115.
 - [32] D. Munshi, V. Sahni, and A.A. Starobinsky, Astrophys. J., **436** (1994), 517.
 - [33] V. Sahni and S. Shandarin, Mon. Not. R. Astr. Soc., **282** (1996), 641.
 - [34] A. Yoshisato, T. Matsubara, and M. Morikawa, Astrophys. J., **498** (1998), 49.
 - [35] E.M. de Gouveia Dal Pino et al., Astrophys. J., **442** (1995), L45.
 - [36] B.K. Darian and H.P. Kunzle, Class. Quantum. Grav., **13** (1996) 2651.
 - [37] J.D. Barrow and J. Lavín, Phys. Rev. Lett., **80** (1998), 656.
 - [38] R. Easther and K. Maeda, Class. Quantum Grav., **16** (1999), 1637.
 - [39] T. Tatekawa and K. Maeda, Astrophys. J., **547** (2001), 531.
 - [40] H. Koyama and T. Konishi, Phys. Lett., **A 279** (2001) 226

- [41] H. Koyama and T. Konishi, astro-ph/0008507
- [42] H. Koyama and T. Konishi, astro-ph/0010030
- [43] P.J.E. Peebles, The Large Scale Structure of the Universe (1980, Princeton University Press).
- [44] K. Falconer, Fractal Geometry (1990, John Wiley & Sons).
- [45] N. Gouda and T. Nakamura, Prog.Theor.Phys., **79** (1988), 765.
- [46] N. Gouda and T. Nakamura, Prog.Theor.Phys., **81** (1989), 633.
- [47] T. Yano and N. Gouda, Astrophys. J. Supp., **118** (1998) , 267.
- [48] T. Buchert, M. Kerscher, and C. Sicka, Phys. Rev., **D 62** (2000) 043525