

Réciprocité de Frobenius pour des groupes de Lie résolubles exponentiels

Hidénori FUJIWARA

Faculté de Technologie à Kyushu, Université de Kinki

§1. Désintégration d'une représentation induite

Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Cela signifie que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G : nous le notons $G = \exp \mathfrak{g}$. Nous commençons cette note par nous intéresser aux représentations monomiales de G . Soient H un sous-groupe connexe de G et χ son caractère unitaire. Notre but est de décrire dans le cadre de la méthode des orbites la désintégration centrale canonique de la représentation induite $\tau = \text{ind}_H^G \chi$. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H . Alors il existe $f \in \mathfrak{g}^*$, une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, telle que f s'annule sur l'algèbre dérivée $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ de $\mathfrak{h}$ et que χ s'écrive $\chi(\exp X) = e^{i f(X)}$ ($i = (-1)^{1/2}$, $X \in \mathfrak{h}$). Dans cette situation, χ se notera χ_f . Après que l'on avait vigoureusement étudié le cas essentiel où $\mathfrak{h}$ était une polarisation en f , vers '72 Grélaud [12] et Quint [22] ont mis fin au cas où $\mathfrak{h}$ était un idéal de $\mathfrak{g}$.

De plus, Quint a laissé des conjectures suivantes. Soit μ une mesure positive finie sur l'espace affine $E = f + \mathfrak{g}^\perp$, $\mathfrak{g}^\perp$ désignant l'annihilateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$, équivalente à la mesure de Lebesgue sur E . On regarde μ comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$ et prend son image ν par l'application de Kirillov-Bernat $\theta = \theta_G: \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{G}$, le dual unitaire de G . $\hat{G}$ s'obtient comme l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$ de G au moyen de l'isomorphisme borélien induite $\bar{\theta} = \bar{\theta}_G: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ (cf. [4], [12]). Pour $\pi \in \hat{G}$ on note $\Omega(\pi)$ l'orbite associée. Soit $Z(E)$ l'ensemble des $\zeta \in E$ telles que l'orbite $G \cdot \zeta$ atteint la dimension maximum parmi les orbites rencontrant E .

Conjectures de Quint [22]: (i) Pour toute $\zeta \in Z(E)$, chaque composante connexe de $E \cap G \cdot \zeta$ est une variété différentielle de dimension supérieure ou égale à $1/2 \dim G \cdot \zeta$.

(ii) $\tau = \text{ind}_{\mathfrak{g}}^G \chi_f = \int_{\mathfrak{g}}^{\oplus} m(\mathfrak{x}) \chi_f d\nu(\mathfrak{x})$. Ici la multiplicité $m(\mathfrak{x})$ est égale au nombre des composantes connexes de $\mathfrak{E} \cap \Omega(\mathfrak{x})$ si chaque composante est une variété de dimension $1/2 \dim \Omega(\mathfrak{x})$, sinon $m(\mathfrak{x}) = \infty$.

Depuis ont été faits des travaux fondamentaux, par Benoist [2], [3] pour le cas symétrique et par Corwin-Greenleaf/Grélaud [7], [13] pour le cas nilpotent, établissant les conjectures de Quint à condition d'une petite modification sans importance: dans (i), "toute $\zeta \in Z(\mathfrak{E})$ " doit être remplacé par " μ -presque toute $\zeta \in \mathfrak{E}$ ". On voit encore des résultats dus à Lipsman [15], [16], [17] qui contiennent la désintégration de τ pour le cas complètement résoluble. En plus ils ont montré que la multiplicité $m(\mathfrak{x})$ était retrouvée comme le nombre des H -orbites incluses dans $\mathfrak{E} \cap \Omega(\mathfrak{x})$. Ici nous nous proposons d'établir les conjectures.

Soient $G = \exp \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$. On note $S(f, \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnées à f , c'est-à-dire que $\mathfrak{f}$ est un sous-espace totalement isotrope pour la forme bilinéaire alternée B_f sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$.

Théorème 1 ([10]). Soient $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{k}^*$ et $\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{k})$. On note $\mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}$ l'annihilateur de $\mathfrak{f}$ dans $\mathfrak{k}^*$, μ mesure positive finie sur $\mathfrak{k}^*$ équivalente à la mesure de Lebesgue sur $f + \mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}$ et ν l'image de μ par l'application canonique de $\mathfrak{k}^*$ sur l'espace des G -orbites $\mathfrak{k}^*/G$. Pour ν -presque toutes les orbites $\Omega \in \mathfrak{k}^*/G$;

- (i) Chaque composante connexe C de $(f + \mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}) \cap \Omega$ est une variété.
- (ii) L'espace tangent de C au point $\zeta \in C$ est égal à $\mathfrak{g} \cdot \zeta \cap \mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}$.
- (iii) Si l'on désintègre μ par rapport à ν , $\mu = \int \mu_{\Omega} d\nu(\Omega)$, la mesure de fibre μ_{Ω} restreinte à une carte $(U; x_1, \dots, x_m)$ de C est équivalente à $dx_1 \cdots dx_m$.

Corollaire 1. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{E} = f + \mathfrak{f}^{\perp}$.

- (i) Pour ν -presque toutes les orbites coadjointes $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$, le support de la mesure μ_{Ω} est égal à $\mathfrak{E} \cap \Omega$ tout entier.
- (ii) Pour ν -presque toutes les orbites coadjointes $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$, chaque composante connexe C de $\mathfrak{E} \cap \Omega$ est une variété ayant la dimension supérieure ou égale à $1/2$

$\dim \mathfrak{Q}$.

(ii) On a $\dim C = 1/2 \dim \mathfrak{Q}$ si et seulement si $H \cdot \zeta = C$ pour toute $\zeta \in C$. S'il en est ainsi, $\mathfrak{f} + \mathfrak{q}(\zeta)$ est un sous-espace lagrangien pour B_ζ .

Pour donner la désintégration des représentations monomiales de G , notre méthode sera différente de celle de Lipsman [17]. Dans ce qui suit, on confondra parfois les classes d'équivalence des représentations unitaires avec leurs représentants et liera deux représentations équivalentes par le symbole $\simeq$ ou même par le signe d'égalité. Avant d'énoncer le théorème, on se prépare un lemme concernant des groupes à petite dimension.

Lemme. (i) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} = RX + RY$: $[X, Y] = Y$. Soient $f \in \mathfrak{g}_2^*$, $\mathfrak{f} = RX$ et $H = \exp \mathfrak{f}$. Alors $\text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \chi_f \simeq \text{ind}_{\mathfrak{H}'}^G \chi_{Y^*} + \text{ind}_{\mathfrak{H}'}^G \chi_{-Y^*}$ avec $H' = \exp(RY)$.

(ii) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_3(a)$, $\mathfrak{g}_3(a) = \langle T, Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}}$: $[T, Y_1] = Y_1 - aY_2$, $[T, Y_2] = Y_2 + aY_1$ ($0 \neq a \in \mathbb{R}$). Soient $f \in \mathfrak{g}_3(a)^*$, $\mathfrak{f} = RT$ et $H = \exp \mathfrak{f}$. Alors

$$\text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \chi_f \simeq \int_{[0, 2\pi)}^{\oplus} \text{ind}_{\mathfrak{H}'}^G \chi_{\hat{\theta}} d\theta$$

avec $H' = \exp(RY_1 + RY_2)$, $\hat{\theta} = (\cos \theta)Y_1^* + (\sin \theta)Y_2^* \in \mathfrak{g}_3(a)^*$.

(iii) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_4 = \langle T, X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$: $[X, Y] = Z$, $[T, X] = -X$, $[T, Y] = Y$. Soient $f = \alpha T^* + \beta Z^* \in \mathfrak{g}_4^*$ ($\beta \neq 0$), $\mathfrak{f} = \langle T, X, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ et $H = \exp \mathfrak{f}$. Alors $\text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \chi_f \simeq \text{ind}_{\mathfrak{H}'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}' = \langle T, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$.

(iv) Soit $G = \exp \mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_6 = \langle T, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$: $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$ ($1 \leq i, j \leq 2$), $[T, X_1] = -X_1 - \alpha X_2$, $[T, X_2] = -X_2 + \alpha X_1$, $[T, Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2$, $[T, Y_2] = Y_2 + \alpha Y_1$ ($0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$). Soient $f = \beta T^* + \gamma Z^* \in \mathfrak{g}_6^*$ ($\gamma \neq 0$), $\mathfrak{f} = \langle T, X_1, X_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ et $H = \exp \mathfrak{f}$. Alors $\text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \chi_f \simeq \text{ind}_{\mathfrak{H}'}^G \chi_f$ avec $H' = \exp \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}' = \langle T, Y_1, Y_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$.

Revenant au cas général, nous reprenons les notations précédentes: soient $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie résoluble exponentiel, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{g})$, $H = \exp \mathfrak{f}$ et $\tau = \text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \chi_f$. Soient encore μ une mesure positive finie sur $\mathfrak{E} = f + \mathfrak{f}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure de Lebesgue et ν son image par l'application θ de Kirillov-Bernat.

Théorème 2 ([10]). La désintégration de τ s'écrit

$$\tau \simeq \int_{\mathcal{E}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi)$$

avec la fonction de multiplicités donnée à la façon suivante: $m(\pi)$ est le nombre des composantes connexes de $\mathcal{E} \cap \mathcal{Q}(\pi)$ si chaque composante est une variété de dimension égale à $1/2 \dim \mathcal{Q}(\pi)$. Lorsque cette condition n'est pas remplie, $m(\pi)$ est égale à $+\infty$. En tout cas $m(\pi)$ s'obtient comme le nombre des H-orbites contenues dans $\mathcal{E} \cap \mathcal{Q}(\pi)$.

Les groupes de Lie résolubles exponentiels étant monomiales, le théorème 2 nous permet de connaître la désintégration centrale canonique des représentations induites. Soit σ une représentation unitaire irréductible d'un sous-groupe connexe H de G. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de H et $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ l'application restriction. Il existe sur sous-variété $p^{-1}(\mathcal{Q}_K(\sigma))$ de $\mathfrak{g}^*$ une mesure μ bien déterminée par la mesure canonique sur $\mathcal{Q}(\sigma) = \mathcal{Q}_K(\sigma)$ et par la mesure de Lebesgue sur l'annihilateur $\mathfrak{g}^\perp$ (cf. [15]). On prend une mesure finie $\hat{\mu}$ sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à μ regardée comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$, et considère son image $\nu = \nu^G_\sigma = (\theta_G)_*(\hat{\mu})$ sur $\hat{G}$.

Théorème 3 ([11]). La représentation induite $\text{ind}_H^G \sigma$ de G se désintègre comme suit:

$$\text{ind}_H^G \sigma \simeq \int_{\mathcal{E}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi),$$

où la multiplicité $m(\pi)$ est donnée encore par le nombre des H-orbites contenues dans $\mathcal{Q}_G(\pi) \cap p^{-1}(\mathcal{Q}_H(\sigma))$.

§2. Désintégration d'une représentation restreinte

Soient π une représentation unitaire irréductible de G et H un sous-groupe connexe de G. Nous allons décrire la désintégration centrale canonique de la restriction de π à H, notée $\pi|_H$, et observer une réciprocité de Frobenius dans cette situation.

Dans le cadre de la méthode des orbites, le problème a été pris par Kirillov [

14], pleinement étudié par Corwin-Greenleaf [7] pour le cas nilpotent et par Lipsman [15], [18] pour le cas complètement résoluble. On introduit l'orbite coadjointe $\Omega_G(\pi) \subset \mathfrak{g}^*$ de G déterminée par π et une mesure finie μ_π sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure canonique sur $\Omega_G(\pi)$ (cf. [4]), regardée comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$. Enfin on considère la mesure $\nu = \nu_H^\pi = (\theta_H \cdot p)_*(\mu_\pi)$, l'image de μ_π par l'application $\theta_H \cdot p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{H}$.

Théorème 4 ([11]). On a

$$\pi|_H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} m(\sigma) \sigma d\nu(\sigma),$$

où la multiplicité $m(\sigma)$ est donnée par le nombre des H -orbites contenues dans $\Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_H(\sigma))$.

Soient π_j ($j = 1, 2$) deux représentations unitaires irréductibles de G . Le produit de Kronecker extérieur de π_1 et de π_2 , noté $\pi_1 \times \pi_2$, correspond à l'orbite $\Omega_{G \times G}(\pi_1 \times \pi_2) = (\Omega_G(\pi_1), \Omega_G(\pi_2)) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$. On identifie G au sous-groupe de $G \times G$ constitué par les éléments diagonaux.

Corollaire 2. Soit $p = p(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Alors

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi),$$

où $\nu = (\theta_G \cdot p)_*(\mu_{\pi_1 \times \pi_2})$ et où $m(\pi)$ s'obtient par le nombre des G -orbites incluses dans $(\Omega_G(\pi_1), \Omega_G(\pi_2)) \cap p^{-1}(\Omega_G(\pi))$.

Corollaire 3. La réciprocity de Frobenius s'établit dans ces situations.

Cette réciprocity avait été obtenue presque partout dans [19]. Ce qui est nouveau ici, c'est, comme déjà remarqué dans [7], de la constater partout.

§3. Problèmes et exemples

Concernant notre représentation monomiale $\tau = \text{ind}_H^G \chi_\tau$, nous laissons deux questions qui remontent à Penney [21]. Pour une représentation unitaire ρ de G , on

notera $H(\rho)$ son espace de Hilbert, $H(\rho)^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ muni de la topologie habituelle, et $H(\rho)^{-\infty}$ son antidual. Etant donnés un sous-groupe fermé K de G et son caractère c , nous posons

$$(H(\rho)^{-\infty})^{K, c} = \{a \in H(\rho)^{-\infty}; \rho(k)a = c(k)a, k \in K\}.$$

Reprenons notre représentation monomiale

$$\tau \simeq \text{ind}_H^G \chi_f = \int_G^\oplus m(\pi) \pi d\nu(\pi).$$

En désignant par e l'élément neutre de G , par Δ_G la fonction module de G , nous voyons que la mesure de Dirac

$$\delta_\tau: H(\tau)^\infty \ni \phi \mapsto \overline{\phi(e)} \in \mathbb{C}$$

définit un élément de $(H(\tau)^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$, où $\Delta_{H,G} = \Delta_H / \Delta_G$. Alors, suivant la désintégration de τ , δ_τ s'écrit

$$\delta_\tau = \int_G^\oplus \left(\sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k \right) d\nu(\pi)$$

avec $a_\pi^k \in (H(\pi)^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$ (cf. [5], [21]). Ce qui veut dire que, pour toute $\phi \in C_c^\infty(G)$,

$$\phi_H^f(e) = \int_G \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi),$$

où $\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh$ avec une mesure de Haar dh sur H .

Cela posé, voici nos questions.

- ① Réciprocité: Peut-on choisir $\dim (H(\pi)^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$ pour la multiplicité $m(\pi)$?
- ② Formule de Plancherel concrète: Explicitez les a_π^k intervenant dans la désintégration de δ_τ .

Depuis que les travaux de Benoist [2], [3] nous ont incités à étudier ces questions, nous en avons envisagé certains cas (cf. [8], [9]). Dans toute la suite on va y ajouter encore quelques exemples.

Exemple 1. $G = G_3(a) = \exp \mathfrak{g}_3(a)$; $(T, Y_1, Y_2): [T, Y_1] = Y_1 - aY_2, [T, Y_2] = aY_1 + Y_2$. Soient $f = Y_1^* \in \mathfrak{g}_3(a)^*$ et $\mathcal{F} = RY_1$. Ici a peut être supposé négatif. Vu que

$$e^t \begin{bmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos at - \lambda \sin at) \\ e^t(\sin at + \lambda \cos at) \end{bmatrix},$$

on a l'expression paramétrée de l'orbite passant

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \in RY_1 + RY_2 ;$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\cos at - \lambda \sin at) & \dots \textcircled{1} \\ y(t) = e^t(\sin at + \lambda \cos at) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

Si la ligne directe $x = 1$ est tangente à l'orbite de ζ , on voit

$$(dx/dt)_{t=0} = e^t(\cos at - \lambda \sin at - a \sin at - a \lambda \cos at)_{t=0} = 1 - a\lambda = 0,$$

ce qui donne $\lambda = 1/a$, noté λ_0 . Soit t^* le premier nombre positif t vérifiant

$$e^t\{\cos at - (1/a)\sin at\} = 1,$$

et la y -coordonnée du point d'intersection se notant λ_1 , nous prenant

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1,$$

comme représentant des orbites qui rencontrent l'espace affine $f + \mathfrak{g}^\perp$, où $\mathfrak{g}^\perp = \{\xi \in \mathfrak{g}^*; \xi|_{\mathfrak{g}} = 0\}$.

On utilise la paramétrisation de l'orbite $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$, et cherche, en posant $e^t(\cos at - \lambda \sin at) = 1$, des points d'intersection avec $f + \mathfrak{g}^\perp$. D'où $e^t(1 + \lambda^2)^{1/2} \cos(at + \theta) = 1$ avec θ tel que $\sin \theta = \lambda(1 + \lambda^2)^{-1/2}$, $\cos \theta = (1 + \lambda^2)^{-1/2}$, ce qui entraîne $e^t(\sin at + \lambda \cos at) = (1 + \lambda^2)^{1/2} e^t \sin(at + \theta) = \tan(at + \theta)$. On en trouve les points

$$\zeta_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \tan(at_n + \theta) \end{bmatrix}, \quad \zeta_0 = \zeta.$$

Choisissons arbitrairement des $g_n \in G$ tels que $g_n : \zeta \rightarrow \zeta_n$, et fabriquons l'application

$$a_n : \phi \longmapsto \int_{H/H \cap g_n B g_n^{-1}} \overline{\phi(hg_n)} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dv(h), \quad \phi \in H(\pi),$$

ce dernier n'est autre que

$$\overline{\phi(g_n)},$$

ici l'on a noté $B = \exp \mathfrak{b}$ associé à la polarisation $\mathfrak{b} = RY_1 + RY_2$, $\pi = \pi_\zeta = \text{ind}_B^G \chi_\zeta$ dont l'espace se notant $H(\pi)$. On voit ainsi que a_n est un vecteur généralisé H -semi-invariant.

Par suite, pour $\phi \in C_c^\infty(G)$,

$$\begin{aligned}
\langle \pi(\phi)a_n, \xi \rangle &= \langle a_n, \pi(\phi^*)\xi \rangle = \overline{\pi(\phi^*)\xi(g_n)} = \int_G \phi(g) \overline{\pi(g^{-1})\xi}(g_n) dg \\
&= \int_G \phi(g) \xi(gg_n^{-1}) dg = \int_G \phi(gg_n^{-1}) \xi(g) \Delta_G^{-1}(g) dg \\
&= \Delta_G^{-1}(g_n) \int_{G/B} \dot{d}g \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \xi(\dot{g}b) db \\
&= \Delta_G^{-1}(g_n) \int_{G/B} \xi(\dot{g}) \dot{d}g \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \chi_\zeta(b) db.
\end{aligned}$$

Donc

$$(\pi(\phi)a_n)(g) = \Delta_G^{-1}(g_n) \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \chi_\zeta(b) db.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\langle \pi(\phi)a_n, a_n \rangle &= \Delta_G^{-1}(g_n) \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \chi_\zeta(b) db = \int_B \phi(b) \chi_\zeta(g_n^{-1}bg_n) db \\
&= \int_B \phi(b) \chi_{\kappa_n, \zeta}(b) db = \int_R \phi_H^f(\exp sY_2) \exp(\text{istan}(\alpha t_n + \theta)) ds.
\end{aligned}$$

Là, pour $g \in G$, $\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh$.

Les formules ① et ② entraînent, $y(t)$ s'écrivant simplement y ,

$$(1 - \alpha y)(dt/d\lambda) = e^t \sin \alpha t, \quad \text{--- ③}$$

$$(dy/d\lambda) - (y + \alpha)(dt/d\lambda) = e^t \cos \alpha t. \quad \text{--- ④}$$

D'autre part, d'après $e^{2t} = (1 + y^2)/(1 + \lambda^2)$,

$$\{(1 + \lambda^2)(dt/d\lambda) + \lambda\}(1 + y^2)/(1 + \lambda^2) = y(dy/d\lambda). \quad \text{--- ⑤}$$

Les égalités ③ et ④ impliquent

$$\lambda(dy/d\lambda) + (1 - \alpha y - \lambda y - \alpha \lambda)(dt/d\lambda) = y,$$

$$(dy/d\lambda) + (\lambda \alpha y - \lambda - y - \alpha)(dt/d\lambda) = 1,$$

donc $(\lambda - y)(dy/d\lambda) + (1 - \alpha \lambda)(1 + y^2)(dt/d\lambda) = 0$.

Par substitution de ⑤,

$$(\lambda - y)(dy/d\lambda) + (1 - \alpha \lambda)\{y(dy/d\lambda) - \lambda(1 + y^2)/(1 + \lambda^2)\} = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda(1 - \alpha y)(dy/d\lambda) = \lambda(1 + \alpha \lambda)(1 + y^2)/(1 + \lambda^2)$.

En conséquence, pour λ non nul,

$$(dy/d\lambda) = (1 - \alpha \lambda)(1 + y^2)/(1 - \alpha y)(1 + \lambda^2).$$

La formule à montrer revient à la suivante, $y_n = y_n(\lambda)$ désignant $\tan(\alpha t_n + \theta)$,

$$\begin{aligned}
\phi_H^f(e) &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi(\lambda) d\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n) \int_R \phi_H^f(\exp sY_2) \exp(\text{istan}(\alpha t_n + \theta)) ds \right) \\
&= (2\pi)^{1/2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n) (\phi_H^f)^\wedge(y_n) d\lambda
\end{aligned}$$

avec certaines fonctions mesurables $\xi(\lambda)$ et $\kappa(n) \geq 0$, car on multiplie au besoin a_n par un scalaire, et $(\phi_H^f)^\wedge$ signifiant la transformée de Fourier inverse de $\phi_H^f \circ \exp$.

En effet, soient $\xi(\lambda) = (1 - \alpha \lambda)/2\pi(1 + \lambda^2)$ et $\kappa(n) = (1 + y_n^2)/|1 - \alpha y_n|$, ce qui veut dire qu'on prend $\{(1 + y_n^2)/|1 - \alpha y_n|\}^{1/2} a_n$. Alors,

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1/2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\phi_H^f)^\wedge(y_n) \kappa(n) \right) \xi(\lambda) d\lambda \\
&= (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\phi_H^f)^\wedge(y_n) (1 - \alpha \lambda)(1 + y_n^2)/|1 - \alpha y_n| (1 + \lambda^2) d\lambda \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_R (\phi_H^f)(s) ds = (\phi_H^f \circ \exp)(0) = \phi_H^f(e).
\end{aligned}$$

Exemple 2. Soit $G = G_3(a) = \exp \mathfrak{g}_3(a)$ comme dans l'exemple 1. Etant donnée cette fois $\mathfrak{g} = RT$ et $f \in \mathfrak{g}_3(a)^*$ arbitraire. Alors $f + \mathfrak{g}^\perp = f(T)T^* + RY_1^* + RY_2^*$ et l'on y trouve que les orbites générales ont leur représentant $\lambda(\theta) = (\cos \theta)Y_1^* + (\sin \theta)Y_2^*$ à laquelle s'associe la représentation irréductible $\pi(\theta) = \text{ind}_B^G \chi(\theta)$ de G , où B est le sous-groupe analytique correspondant à la polarisation $\mathfrak{g} = RY_1 + RY_2$, et où $\chi(\theta)$ signifie le caractère unitaire fabriqué par $\lambda(\theta)$.

Dans ce cas, notre formule habituelle pour obtenir des vecteurs généralisés H-semi-invariants nous offre

$$a(\theta) : \phi \longmapsto \int_H \overline{\phi(h)} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh.$$

Des raisonnements analogues à ceux faits pour le cas $ax+b$ montrent que notre $a(\theta)$ possède les propriétés requises. Il est aisé de voir, pour $\phi \in C_c^\infty(G)$,

$$(\pi(\theta)(\phi)a(\theta))(g) = \int_B \phi_H^f(gb) \chi(\theta)(b) db.$$

Puis

$$\begin{aligned} \langle \pi(\theta)a(\theta), a(\theta) \rangle &= \int_H \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \int_B \overline{\phi_H^f(hb)} \chi(\theta)(b) db \\ &= \int_H dh \int_B \overline{\phi_H^f(hbh^{-1})} \chi(\theta)(b) db = \int_H \Delta_G(h) dh \int_B \overline{\phi_H^f(b)} \chi_f(b) db \\ &= \int_R e^{2t} dt \int_B \overline{\phi_H^f(b)} \chi_f(b) db, \end{aligned}$$

avec la notation $\zeta = h \cdot \lambda(\theta) = e^t \cos(at + \theta)Y_1^* + e^t \sin(at + \theta)Y_2^*$, $h = \exp tT$.

Ceci posé,

$$(2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \langle \pi(\theta)(\phi)a(\theta), a(\theta) \rangle d\theta = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_R e^{2t} dt \int_{R^2} \overline{\phi_H^f(\exp(b_1 Y_1 + b_2 Y_2))} \exp(i e^t (b_1 \cos(at + \theta) + b_2 \sin(at + \theta))) db_1 db_2.$$

Appliquons le changement de variables

$$\begin{cases} x = e^t \cos(at + \theta) \\ y = e^t \sin(at + \theta), \end{cases}$$

dont le Jacobien est

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)} &= \begin{vmatrix} e^t \cos(at + \theta) - a e^t \sin(at + \theta) & -e^t \sin(at + \theta) \\ e^t \sin(at + \theta) + a e^t \cos(at + \theta) & e^t \cos(at + \theta) \end{vmatrix} = e^{2t}, \\ dx dy &= e^{2t} dt d\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \langle \pi(\theta)(\phi)a(\theta), a(\theta) \rangle d\theta &= (2\pi)^{-2} \int_{R^2} dx dy \int_R (\phi_H^f)^*(b_1, b_2) \chi \\ &\quad \times \exp(i(xb_1 + yb_2)) db_1 db_2 = (\phi_H^f)^*(0,0) = \phi_H^f(e), \end{aligned}$$

où $(\phi_H^f)^*(b_1, b_2) = \phi_H^f \circ \exp(b_1 Y_1 + b_2 Y_2)$.

Exemple 3. $G = \exp \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = RT + RX + RY + RZ$; $[T, X] = X$, $[T, Y] = -Y$, $[X, Y] = Z$ (oscillateur complètement résoluble), $f(a, \beta) = aT^* + \beta Z^*$ et $O(a, \beta) = G \cdot f(a, \beta)$ pour $\beta \neq 0$. On se donne $f = f(a_0, \beta_0)$.

(i) Soit premièrement $\mathfrak{g} = RT + RX$. Alors

$$\text{ind}_H^G \chi_f = \int_R \theta(O(a_0, \beta)) d\beta.$$

Au moyen de $\zeta = f(a_0, \beta) \in O(a_0, \beta) \cap (f + \mathfrak{z}^\perp)$ et d'une polarisation $\mathfrak{z} = RT + RX + RZ$ en ζ , on construit $\pi(a_0, \beta) = \text{ind}_B^G \chi \simeq \overline{\theta}(O(a_0, \beta))$. Dans cette situation, la façon usuelle propose $a(\beta)$ par $\langle a(\beta), \phi \rangle = \phi(e)$, qui satisfait clairement aux conditions requises. Comme $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} + RZ$ et que Z est un élément central,

$$(H(\pi(a_0, \beta))^{-\infty})^H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2} = Ca(\beta).$$

Maintenant pour $\phi \in C_c^\infty(G)$, $\pi(a_0, \beta)(\phi)a(\beta) = \phi_B^5$ i.e.,

$$(\pi(a_0, \beta)(\phi)a(\beta))(g) = \int_B \phi(gb) \chi_f(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db,$$

par suite,

$$\langle \pi(a_0, \beta)(\phi)a(\beta), a(\beta) \rangle = \int_B \phi(b) \chi_f(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db.$$

De tout ce qui précède,

$$(2\pi)^{-1} \int_R \langle \pi(a_0, \beta)a(\beta), a(\beta) \rangle d\beta = (2\pi)^{-1} \int_R d\beta \int_R \phi_H^f(\exp wZ) \exp(i\beta w) dw = \phi_H^f(e).$$

(ii) Deuxièmement soit $\mathfrak{z} = RT + RZ$. Posons $\zeta = f(a, \beta_0) = aT^* + \beta_0 Z^*$, ce qui nous dit $(f(a_0, \beta_0) + \mathfrak{z}^\perp) \cap O(a, \beta_0) = a_0 T^* + xY^* + yZ^* + \beta_0 Z^*$; $xy = \beta_0(a - a_0)$. Si la valeur

$(\exp(aX)\exp(bY) \cdot \zeta)(T) = (\exp(bY) \cdot \zeta)(T + aX) = \zeta(T + aX - bY + abZ) = a + ab\beta_0$ est égale à $f(T)$, il vient $a + ab\beta_0 = a_0$ i.e., $ab\beta_0 = a_0 - a$. En modifiant les bases par des scalaires convenables, on peut supposer que $\beta_0 = 1$. L'égalité obtenue ci-dessus devient $ab = a_0 - a$. Par conséquent, pour $f(a, \beta_0)$ telle que $a \neq a_0$, $g_j \cdot f(a, \beta_0) \in f + \mathfrak{z}^\perp$ ($j = 1, 2$) avec $g_1 = \exp(X)\exp((a_0 - a)Y)$, $g_2 = \exp(-X)\exp((a - a_0)Y)$. Pareillement au cas (i), on réalise la représentation $\pi(a, \beta_0) = \text{ind}_B^G \chi(a, \beta_0) \simeq \overline{\theta}(O(a, \beta_0))$. Pour $\phi \in H(\pi(a, \beta_0))^\infty$, nous rappelons la formule familière;

$$\begin{aligned} \langle a_1(a), \phi \rangle &= \int_{H/H \cap \mathfrak{g}_1 B \mathfrak{g}_1^{-1}} \overline{\phi(hg_1)} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) dh \\ &= \int_R \overline{\phi(\exp(tT)\exp(X))} \exp(-it a_0) dt = \int_R \overline{\phi(\exp(e^t X)\exp(it(a - a_0)))} e^{t^2/2} dt \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(\exp(sX))} s^{i(a - a_0) - 1/2} ds. \end{aligned}$$

L'intégrand de ce dernier est bien intégrable et il est immédiat que

$$a_1(a) \in (H(\pi(a, \beta_0))^{-\infty})^H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2}.$$

De même la formule

$$\begin{aligned} \langle a_2(a), \phi \rangle &= \int_{H/H \cap \mathfrak{g}_2 B \mathfrak{g}_2^{-1}} \overline{\phi(hg_2)} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) dh \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(\exp(-sX))} s^{i(a - a_0) - 1/2} ds \end{aligned}$$

définit un élément non nul

$$a_2(a) \in (H(\pi(a, \beta_0))^{-\infty})^H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2}.$$

Soit a un élément quelconque de celui-ci. La semi-invariance de a par rapport à $h = \exp(tT)$, $t \in \mathbb{R}$, nous donne

$$\langle \exp(it(a_0 - a)) e^{-t^2/2} a, \phi(\exp(xX)) \rangle = \langle a, \phi(\exp(e^t x X)) \rangle,$$

car $\langle \pi(\alpha, \beta_0)(h)a, \phi \rangle = \langle a, \pi(\alpha, \beta_0)(h)^{-1}\phi \rangle = \langle a, \phi(\text{hexp}(xX)) \rangle = \langle a, \exp(-iat)e^{i/2}\phi(\exp(xe^tX)) \rangle$. On en déduit que

$$\langle a, \phi \rangle = c_1 \int_{\mathbb{R}_+} \phi(\exp(xX)) x^{i(\alpha - \beta_0) - 1/2} dx \quad (c_1: \text{constante})$$

si $\text{supp } \phi \subset \mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R}; s > 0\}$, c'est-à-dire que $a = c_1 a_1(\alpha)$ (c_1 : constante) sur $\mathbb{R}_+$. De même, $a = c_2 a_2(\alpha)$ (c_2 : constante) sur $\mathbb{R}_- = -\mathbb{R}_+$.

Supposons maintenant $\text{supp } a \subset B$, et écrivant

$$a = \sum_{j=0}^m \lambda_j D_j, \text{ où } \langle D_j, \phi \rangle = (d^j \phi^{\wedge} / dx^j)(0), \quad \phi^{\wedge}(x) = \phi(\exp(xX)).$$

Alors en considérant la semi-invariance de a pour $h = \exp(tT)$, on a

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_0 t) \sum_{j=0}^m (d^j \phi^{\wedge} / (dx^j))(0) &= \langle \pi(\alpha, \beta_0)(h)a, \phi^{\wedge} \rangle = \langle \sum_{j=0}^m \lambda_j D_j, \phi^{\wedge}(e^t x) e^{i/2} \exp(-iat) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^m \lambda_j (d^j \phi^{\wedge} / (dx^j))(0) e^{(j+1/2)t} \exp(i\alpha_0 t). \end{aligned}$$

Si l'on y choisit ϕ vérifiant $(d^j \phi^{\wedge} / (dx^j))(0) = \delta_{jm}$, il s'ensuit que

$$\lambda_m \exp(i\alpha_0 t) = \lambda_m e^{(m+1/2)t} \exp(i\alpha_0 t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ceci posé, on conclut que $\lambda_m = 0$, ce qui veut dire que $a = 0$.

En somme,

$$(H(\pi(\alpha, \beta_0))^{-\infty})^{H, \pi_f} \Delta_{H, G}^{1/2} = Ca_1 + Ca_2.$$

Passons à la formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale $\text{ind}_H^G \chi_f$, $f = f(\alpha_0, \beta_0)$. Pour alléger les notations, $\pi(\alpha, \beta_0)$, examinée de près pour le moment, sera notée π . Soient $\phi \in C_c^\infty(G)$ et $\psi \in H(\pi)$ vecteur différentiable à support compact modulo B . On calcule: $a_j(\alpha)$ ($j = 1, 2$) se notant simplement a_j .

$$\begin{aligned} \langle \pi(\psi) a_1, \phi \rangle &= \langle a_1, \pi(\phi^*)(\psi) \rangle = \int_{H/H_0 \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\pi(\phi^*)(\psi)}(hg_1) \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) dh \\ &= \int_{H/H_0 \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h)} dh \int_G \phi(g) \overline{\psi(g h g_1)} dg \\ &= \int_{H/H_0 \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_G^{-1}(h)} dh \int_G \phi(g g_1^{-1} h^{-1}) \overline{\psi(g)} dg \\ &= \int_{H/H_0 \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_G^{-1}(h)} dh \int_{G/B} dg \int_B \phi(g b g_1^{-1} h^{-1}) \overline{\psi(g b)} \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db \\ &= \int_{H/H_0 \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_{G/B} dg \int_B \phi(g b g_1^{-1} h^{-1}) \overline{\psi(g)} \Delta_{B, G}(b) \chi_f(b) \overline{\chi_f(h) \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h)} db \\ &\quad \dots \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

L'ordre des deux intégrales au dernier membre s'échange, ce qu'on va voir dans la suite. Remarquons tout d'abord $\Delta_G(h) = \Delta_{H, G}(h) = 1$ et qu'à l'expression $\textcircled{1}$ g se met comme $g = \exp(xX)$, x parcourant un certain intervalle fini J . On note $\Xi(h, g, b)$ l'intégrand dans $\textcircled{1}$ et écrit $h = \exp(tT)$, $b = \exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)$. Alors $\int_B \Xi(h, g, b) db = \phi^{\wedge}(x) \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\exp(xX)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha - \alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT)) \times$
 $\times e^{-s/2} \exp(i(w + \alpha s - \alpha_0 t)) ds dy dw$.

On y trouve

$$\begin{aligned} &\exp(xX)\exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha - \alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT) \\ &= \exp(xX)\exp(wZ)\exp(e^{-s}(y + \alpha - \alpha_0)Y)\exp(-e^s X)\exp((s - t)T) \\ &= \exp((w + e^{-s}x(y + \alpha - \alpha_0))Z)\exp(e^{-s}(y + \alpha - \alpha_0)Y)\exp((x - e^s)X)\exp((s - t)T). \end{aligned}$$

Compte tenu de cela,

$$\begin{aligned}
& \int_B \mathbb{E}(h, g, b) db \leq | \hat{\phi}(x) | \int_{R^3} | \phi(\exp(wZ)\exp(e^{-s}yY)\exp((x - e^s)X) \times \\
& \quad \times \exp((s - t)T) | e^{-s/2} ds dy dw \\
& = | \hat{\phi}(x) | \int_{R^3} | \phi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp((x - e^s)X)\exp((s - t)T) | e^{-s/2} ds dy dw \\
& = | \hat{\phi}(x) | \int_{R^3} | \phi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp((x - e^{s+t})X)\exp(sT) | e^{(s+t)/2} ds dy dw. \dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

Puisque x parcourt l'intervalle fini J , $\textcircled{2}$ est intégrable relativement à t et l'on peut bien échanger l'ordre des deux premières intégrales, ce qu'on vient de chercher.

Nous arrivons ainsi à

$$\langle \pi(\phi)a_1, \phi \rangle = \int_{G/H} dg \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_B \phi(gbg_1^{-1}h^{-1}) \overline{\phi(g)} \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) \chi_\zeta(b) \overline{\chi_f(h)} \times \\
\times \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) db.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\pi(\phi)a_1)(g) &= \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_B \phi(gbg_1^{-1}h^{-1}) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) \chi_\zeta(b) \overline{\chi_f(h)} \times \\
&\quad \times \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) db \\
&= \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)} \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} db \int_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi(gbb_0 g_1^{-1}h^{-1}) \times \\
&\quad \times \Delta_{B,G}^{-1/2}(bb_0) \chi_\zeta(bb_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1, B}(b_0) db \\
&= \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \overline{\chi_f(h)} \chi_\zeta(b) \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(b) db \times \\
&\quad \times \int_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi(gbb_0^{-1}g_1^{-1}h^{-1}) \Delta_{B,G}^{1/2}(b_0) \chi_\zeta(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1, B}(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1}(b_0) db_0.
\end{aligned}$$

Des arguments tout à fait analogues à ceux employés plus haut constatent que ces deux premières intégrales sont échangeables. Finalement,

$$\begin{aligned}
(\pi(\phi)a_1)(g) &= \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \chi_\zeta(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h)} \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \times \\
&\quad \times \int_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi(gbb_0^{-1}g_1^{-1}h^{-1}) \chi_\zeta(b_0) \Delta_{B,G}^{1/2}(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1, B}(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1}(b_0) db_0,
\end{aligned}$$

dont la dernière intégrale est égale à

$$\begin{aligned}
& \int_{H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \phi(gbg_1^{-1}b'^{-1}h^{-1}) \chi_{\kappa_1^{-1} \zeta}(b') \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1}, G}^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1} \cap H, \kappa_1 B \kappa_1^{-1}}(b') \times \\
& \quad \times \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H}(b') db'.
\end{aligned}$$

Pourvu que l'égalité

$$\Delta_H^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H}(b') = \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1}}^{-1/2}(b') \quad (b' \in g_1 B g_1^{-1} \cap H)$$

s'établisse, ce qui est aisé à constater dans notre cas, on aurait

$$\begin{aligned}
& \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1}, G}^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1} \cap H, \kappa_1 B \kappa_1^{-1}}(b') \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H}(b') \\
& = \Delta_H^{-1}(b') \Delta_{H,G}^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H, H}(b'),
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
(\pi(\phi)a_1)(g) &= \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) \chi_\zeta(b) db \int_H \phi(gbg_1^{-1}h) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \\
&= \int_{B/B \cap \kappa_2^{-1} H \kappa_2} \phi_H^f(gbg_1^{-1}) \chi_\zeta(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db.
\end{aligned}$$

De même façon,

$$(\pi(\phi)a_2)(g) = \int_{B/B \cap \kappa_2^{-1} H \kappa_2} \phi_H^f(gbg_2^{-1}) \chi_\zeta(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db.$$

De tout ce qui précède,

$$\langle \pi(\phi)a_1, a_1 \rangle = \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \chi_\zeta(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi_H^f(hg_1 bg_1^{-1}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \chi_{I_2}(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(e^t X) \exp(xT) \exp(yY) \exp(-X)) \exp(iax) \chi \\
& \quad \chi e^{-x/2} dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(e^t X) \exp(ye^{-x} Y) \exp(-e^x X)) \chi \\
& \quad \chi \exp(ix(a - a_0)) e^{-x/2} dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp((e^t - e^x) X) \exp(ye^{-x} Y) e^{-iyx}) \chi \\
& \quad \chi \exp(ix(a - a_0)) e^{-x/2} dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(i(t - x)(a_0 - a)) e^{(t+x)/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp((e^t - e^x) X) \exp(yY)) \chi \\
& \quad \chi \exp(-iye^x) dx dy.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t \mapsto t + x$, $e^x = s$, on obtient

$$\langle \kappa(\phi) a_1, a_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \phi_H^f(\exp(s(e^t - 1)X) \exp(yY)) \chi e^{-iy^s} dy ds.$$

D'une façon analogue,

$$\begin{aligned}
\langle \kappa(\phi) a_2, a_2 \rangle &= \oint_{H/H_0 \cap \kappa_2 B \kappa_2^{-1}} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \oint_{B/B_0 \cap \kappa_2^{-1} H \kappa_2} \phi_H^f(hg_2 bg_2^{-1}) \chi \\
& \quad \chi_{I_2}(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(-e^t X) \exp(xT) \exp(yY) \exp(X)) \chi \\
& \quad \chi \exp(iax) e^{-x/2} dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(i(t - x)(a_0 - a)) e^{(t+x)/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp((e^x - e^t) X) \exp(yY)) \chi \\
& \quad \chi \exp(iye^x) dx dy \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \phi_H^f(\exp(s(1 - e^t)X) \exp(yY)) e^{iy^s} dy ds.
\end{aligned}$$

Ces calculs se terminent donc à

$$\begin{aligned}
& \langle \kappa(\phi) a_1, a_1 \rangle + \langle \kappa(\phi) a_2, a_2 \rangle \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(s(1 - t)X) \exp(yY)) e^{iy^s} dy ds.
\end{aligned}$$

Si l'on y pose

$$\Psi(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(s(1 - e^t)X) \exp(yY)) e^{iy^s} dy ds,$$

cette fonction est infiniment différentiable pour t non nulle car, dans ce cas, l'intégrale serait effectuée sur un compact. D'ailleurs, la fonction $\mathbb{R}^2 \ni (s, y) \mapsto \phi_H^f(\exp(sX) \exp(yY))$ appartenant à $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, dont on fait des L^1 -approximations par des fonctions de la forme $\sum_j \xi_j(s) \eta_j(y)$ ($\xi_j, \eta_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$), pour un nombre positif ε quelconque, on peut choisir des ξ_j, η_j de telle manière que

$$|\Psi(t) - (2\pi)^{1/2} \sum_j \int_{\mathbb{R}} \xi_j(s(1 - e^t)) (\eta_j)^\wedge(s) ds| < \varepsilon$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}$, où $(\eta_j)^\wedge$ désigne la transformée de Fourier inverse de η_j . Compte tenu du fait que la limite, lorsque t tend vers zéro, de

$$\int_{\mathbb{R}} \xi_j(s(1 - e^t)) (\eta_j)^\wedge(s) ds$$

est égale à $(2\pi)^{1/2} \xi_j(0) \eta_j(0)$, $\Psi(t)$ est continue même en $t = 0$.

Nous considérons à la fin la fonction $e^{t/2} \Psi(t)$, lorsque $t \mapsto -\infty$, elle décroît

rapidement grâce au facteur $e^{t/2}$. Examinons son comportement quand t tend vers $+\infty$. Un changement de variables mène à

$$e^{t/2}\Psi(t) = e^{t/2}(1 - e^t)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^r(\exp(sX)\exp(yY)) \exp(iys(1 - e^t)^{-1}) ds dy,$$

et à

$$|e^{t/2}\Psi(t)| \leq e^{t/2}(1 - e^t)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_H^r(\exp(sX)\exp(yY))| ds dy,$$

ce qui prouve que $e^{t/2}\Psi(t)$ est à décroissance rapide, t tendant vers $+\infty$.

Il en découle que la formule d'inversion de Fourier peut nous amener à la notre formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale $\tau = \text{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} \chi_{\tau}$:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}} (\langle \pi(\phi) a_1(\alpha), a_1(\alpha) \rangle + \langle \pi(\phi) a_2(\alpha), a_2(\alpha) \rangle) d\alpha \\ = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \phi_H^r(\exp(yY)) e^{iys} ds dy = \phi_H^r(e). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] L. Auslander and C.C. Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. Amer. Math. Soc. No 62, 1966.
- [2] Y. Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, J. Func. Anal., 59(1984), 211-253.
- [3] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, Mém. Soc. Math. France, 15(1984), 1-37.
- [4] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.
- [5] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, J. Func. Anal., 55(1984), 220-246.
- [6] L. Corwin, F.P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 304(1987), 549-583.
- [7] L. Corwin and F.P. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups, Pacific J. Math., 135(1988), 233-267.
- [8] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Pacific J. Math., 127(1987), 329-352.
- [9] H. Fujiwara et S. Yamagami, Certaines représentations monomiales d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Advanced Studies in Pure Math., 14(1988), 153-190.
- [10] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles expon-

entiels, à paraître.

- [11] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, à paraître.
- [12] G. Grélaud, Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels, Thèse de 3^e cycle, Univ. de Poitiers, 1973.
- [13] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, Thèse, Univ. de Poitiers, 1984.
- [14] A. A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Uspekhi Mat. Nauk*, 17(1962), 57-110.
- [15] R. Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representations, à paraître dans *Trans. Amer. Math.*.
- [16] R. Lipsman, Harmonic analysis on exponential solvable homogeneous spaces: The algebraic or symmetric cases, à paraître.
- [17] R. Lipsman, Induced representations of completely solvable Lie groups, à paraître.
- [18] R. Lipsman, Restricting representations of completely solvable Lie groups, à paraître.
- [19] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups II: the Frobenius Reciprocity Theorem. *Annals of Math.*, 58(1953), 193-221.
- [20] G. W. Mackey, The Theory of Unitary Group Representations, Chicago Lectures in Math., 1976.
- [21] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. Func. Anal.*, 18(1975), 177-190.
- [22] S. R. Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1973.
- [23] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), *Math. J. Okayama Univ.*, 7(1957), 151-161.
- [24] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 3(1970), 353-384.