

Finite particle approximation of interacting Brownian motions corresponding to geometric universality

九州大学数理学府 河本陽介

Yosuke Kawamoto
Graduate School of Mathematics, Kyushu University
email : ma213014@math.kyushu-u.ac.jp

1 序論

$\mathbb{R}^d$ 上を相互作用ポテンシャル $\Psi(x, y)$ の下で運動する無限個の粒子 $\{X_t^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は、以下の無限次元確率微分方程式 (ISDE) で記述される。

$$dX_t^i = dB_t^i - \sum_{j \neq i} \nabla_x \Psi(X_t^i, X_t^j) dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

但し、 $\{B_t^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は独立な無限個の $\mathbb{R}^d$ 次元ブラウン運動を表す。

講演ではこの ISDE の有限粒子系からの近似を与え、さらに具体例として、特に逆温度 $\beta = 2$ の Dyson モデルの有限粒子近似を考察した。以下の N 次元 SDE に従う N 次元 Dyson モデルを考える。

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{1}{N} X_t^{N,i} dt - \theta dt \quad (1 \leq i \leq N). \quad (1.1)$$

ここで、 θ は $-\sqrt{2} < \theta < \sqrt{2}$ を満たす固定されたパラメーターである。(1.1) は、対数ポテンシャルで相互作用する N 個のブラウン粒子の運動 (e.g. one component plasma) を記述している。(1.1) に対応する無限系、つまり (1.1) の解の粒子数 N での極限が従う ISDE は、形式的には (1.1) の N を無限大にした (1.2) 式で与えられると思われる。

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt - \theta dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (1.2)$$

しかし、(1.1) の解の正しい極限の式は、(1.3) で与えられる。

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (1.3)$$

形式的な極限の式 (1.2) のドリフト項の θ は、正しい極限の式 (1.3) では消えている。言い換えると、有限系の SDE の形式的な極限と、実際の無限系の極限の式は異なる (SDE ギャップ)。

注意 1.1. SDE ギャップは、長距離相互作用を持つ確率力学に特有の現象である。例えば、無限遠方で良い可積分性を持つクラスである Ruelle クラスポテンシャルで相互作用するような場合、SDE ギャップは起こらず、形式的な極限と実際の極限は一致する。

この具体例を証明するために、2 章で ISDE の有限近似の一般論を与える。そして、3 章では SDE ギャップの背景であるランダム行列の普遍性と、証明の方針を述べる。これらの結果は九州大学の長田博文氏との共同研究に基づくものである。

2 ISDE への力学的収束 -一般論-

SDE ギャップの証明のために、一般論を用意する。 $S = \mathbb{R}^d$ を状態空間とし、 S を S の配置空間とする。

$$S = \{s = \sum_i \delta_{s_i}; s_i \in S, \text{任意のコンパクト集合 } K \text{ に対し, } s(K) < \infty\}.$$

S 上の確率測度 μ をのこを点過程という。また、 ρ^n が μ の n 相関関数であるとは、

$$\int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}} \rho^n(\mathbf{x}_n) \prod_{i=1}^n dx_i = \int_S \prod_{i=1}^m \frac{s(A_i)!}{(s(A_i) - k_i)!} d\mu$$

が $\sum_{i=1}^m k_i = n$ なる $k_i \in \mathbb{N}$ と任意のコンパクトな非交差集合 $A_i \in B(S)$ に対して成り立つことをいう。

点過程 μ に対し、 $S^k \times S$ 上の k -Campbell 測度 $\mu^{[k]}$ を $\mu^{[k]}(A \times B) = \int_A \mu_{\mathbf{x}_k}(B) \rho^k(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k$ で定義する。ここで、 ρ^k は μ の k -相関関数、 $\mu_{\mathbf{x}_k}$ は $\mathbf{x}_k = (x_1, \dots, x_k)$ に粒子がある条件付き確率 (Palm 測度)

$$\mu_{\mathbf{x}_k}(\cdot) = \mu(\cdot - \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} | s(\{x_i\}) \geq 1, 1 \leq i \leq k)$$

である。 $\mathcal{D}_0$ を、 S 上の localかつ smooth な関数全体とする。

S 上の関数 f に対し、 f を $S^\infty(S \text{ の無限直積})$ 上の関数として表現したものを $\tilde{f}$ とする。 $f, g \in \mathcal{D}_0$ に対し、 $\mathbb{D}[f, g]: S \rightarrow \mathbb{R}$ を以下で定義する。

$$\mathbb{D}[f, g](s) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{m=1}^d \frac{\partial \tilde{f}(s)}{\partial s_{im}} \frac{\partial \tilde{g}(s)}{\partial s_{im}},$$

但し、 $s = \sum_i \delta_{s_i}$ 、 $s_i = (s_{i1}, \dots, s_{id}) \in S$ 、 $s = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ である。また、 $f, g \in C_0^\infty(S^k) \otimes \mathcal{D}_0$ に対し、 $S^k \times S$ 上の関数 $\nabla^{a,k}[f, g]$ を

$$\nabla^k[f, g](\mathbf{x}, s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^d \frac{\partial f(\mathbf{x}, s)}{\partial x_{jm}} \frac{\partial g(\mathbf{x}, s)}{\partial x_{jm}},$$

とする。ここで、 $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jd}) \in S$ としている。さらに、 $k \geq 1$ に対し、

$$\mathbb{D}^k[f, g](\mathbf{x}, s) = \nabla^k[f, g](\mathbf{x}, s) + \mathbb{D}[f(\mathbf{x}, \cdot), g(\mathbf{x}, \cdot)](s)$$

とし、これを用いて $L^2(\mu^{[k]})$ 上の双線形形式 $\mathcal{E}^k$ を

$$\mathcal{E}^k(f, g) = \int \mathbb{D}^k[f, g] d\mu^{[k]}$$

と定める。

定義 2.1. $d_\mu \in L_{\text{loc}}^1(\mu^{[1]})$ が μ の対数微分であるとは、任意の $f \in C_0^\infty(S) \otimes \mathcal{D}_0$ に対し、

$$\int_{S \times S} d_\mu f d\mu^{[1]} = - \int_{S \times S} \nabla_x f d\mu^{[1]}$$

が成り立つことをいう。

以下、必要な仮定を列挙する。

- (A1) μ の対数微分 d_μ が存在する。
- (A2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $L^2(\mu^{[k]})$ 上の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^k, C_0^\infty(S^k) \otimes \mathcal{D}_0)$ は可閉。
- (A3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 ρ^n は局所有界。
- (A4) 粒子同士は衝突しない。
- (A5) 各粒子は爆発しない (有限時間で無限遠点に発散しない)。

注意 2.2. (A4), (A5) は対応する Dirichlet 形式を用いて定式化されるが、ここでは省略する。

命題 2.3. ([1]) (A1)~(A5) を仮定する。このとき、 μ -a.s. s に対し、ISDE

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{1}{2}d_\mu(X_t^i, \sum_{i \neq j} \delta_{X_t^j}) \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.1)$$

$$(X_0^i)_{i \in \mathbb{N}} = l(s) \quad (2.2)$$

の解が存在する。

命題 2.3 の仮定で最も本質的なのは対数微分の存在性 (A1) である。しかし、無限個の粒子を持つ点過程 μ に対して直接対数微分を計算することは困難であり、実際には以下のように有限近似を用いて計算する。

N 個 ($N < \infty$) の粒子を持つ点過程の列 μ^N に対し、 $\{\rho^{N,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ をそれぞれ μ^N の相関関数としたとき、(2.3) と (2.4) を満たすとする。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^{N,n}(x) = \rho^n(x) \quad \text{uniformly on } S_r^n \text{ for all } n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S_r^n} \rho^{N,n}(x) \leq c_1^n n^{c_2 n}, \quad (2.4)$$

ここで、 $0 < c_1(r) < \infty$ と $0 < c_2(r) < 1$ は $n \in \mathbb{N}$ に依らない定数。(2.3) と (2.4) から、

$$\mu^N \rightarrow \mu \text{ weakly} \quad (2.5)$$

が成立するので、 μ^N は μ の有限粒子近似になっている。

μ^N の対数微分 d_μ^N を以下のように分解する。

$$d_\mu^N(x, s) = u^N(x) + g_r(x, s) + w_r(x, s).$$

ここで、 $u^N : S \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数、 $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は原点以外で滑らかな関数で、 $s = \sum_{i=1}^N \delta_{s_i}$ に対し、

$$g(x, s) = \sum_{|x-s_i| < r} g(x, s_i), \quad w(x, s) = \sum_{|x-s_i| \geq r} g(x, s_i).$$

命題 2.4. ([1]) (2.3)、(2.4) を仮定する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u^N = u \text{ in } L_{\text{loc}}^2(dx), \quad u \text{ は連続}, \quad (2.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \int_{S_R \times S} |w_r(x, s) - w(x)|^2 d\mu^{N, [1]} = 0, \quad w \in L_{\text{loc}}^2, \quad w \text{ は連続}, \quad (2.7)$$

が成り立つとき、 d_μ が存在して以下のように書ける。

$$d_\mu = u(x) + \lim_{r \rightarrow \infty} g_r(x, s) + w(x).$$

アンラベル関数 $u : \cup_N \mathbb{R}^N \cup \mathbb{R}^\infty \rightarrow S$ を $u((s_i)) = \sum_i \delta_{s_i}$ で定義する。 $l^N : S \rightarrow \mathbb{R}^N$, $l : S \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ が可測関数で、 $u \circ l$, $u \circ l^N$ がそれぞれ恒等写像になるとき、 l^N , l をラベル関数と言う。さらに、与えられたラベル l , l^N に対して、 $l^{N,m} = (l^{N,1}, \dots, l^{N,m})$, $l = (l^1, \dots, l^m)$ でそれぞれラベルの最初の m 個を表す。

N 粒子系の確率力学 $X_t^N = (X_t^{N,1}, X_t^{N,2}, \dots, X_t^{N,N})$ を、 $X_0^N \stackrel{d}{=} \mu^N \circ (l^N)^{-1}$ を満たす

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \frac{1}{2}d_\mu^N(X_t^{N,i}, \sum_{1 \leq j \leq N} \delta_{X_t^{N,j}}), \quad 1 \leq i \leq N$$

の解とし、無限粒子系の確率力学 $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots)$ を、 $X_0 \stackrel{d}{=} \mu \circ (l)^{-1}$ を満たす

$$dX_t^i = dB_t^i + \frac{1}{2}d_\mu(X_t^i, \sum_{i \neq j} \delta_{X_t^j}) \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (2.8)$$

の解とする。

定理 2.5. 命題 2.4 の条件を仮定する。また、ISDE (2.8) に一意的な強解があるとする。ラベル i を固定すると、 $(\int_0^\cdot g_r(X_u^i, \sum_{i \neq j} \delta_{X_u^j}) du)_{i \in \mathbb{N}}$ は $C([0, \infty); S)$ の汎関数と見なせる。 $(\int_0^\cdot g_r(X_u^i, \sum_{i \neq j} \delta_{X_u^j}) du)_{i \in \mathbb{N}}$ の不連続点が P^∞ に対して測度 0 とする。ここで、 P^∞ は N 粒子系から得られる拡散測度 P^N の極限である。任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N \circ (\Gamma^{N,m})^{-1} = \mu \circ (\Gamma^m)^{-1} \text{ weakly} \quad (2.9)$$

が成立するとき、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (X^{N,1}, X^{N,2}, \dots, X^{N,m}) = (X^1, X^2, \dots, X^m) \text{ weakly in } C([0, \infty), \mathbb{R}^m).$$

注意 2.6. アンラベルな意味での初期条件の収束は (2.5) で仮定されている。(2.9) は、 m 個ラベルをつけた $(X^{N,1}, X^{N,2}, \dots, X^{N,m})$ の初期条件が収束するように、ラベルを取るということを意味している。よって、(2.9) はラベル関数の取り方だけの条件であり、強い仮定ではない。

無限次元確率力学の先行研究である時空間相関関数を用いた方法は、状態空間が 1 かつ逆温度 $\beta = 2$ の場合に制限される。しかし、定理 2.5 は状態空間の次元や逆温度 β の値に依らず適用可能である。

3 ランダム行列と Dyson モデル

$N \times N$ の Hermite 行列で、各成分が (Hermite 対称性を除いて) 独立同分布な Gauss 分布に従うものを Gaussian Unitary Ensemble (GUE) という。GUE の固有値 $\mathbf{x}_N = (x_1, \dots, x_N)$ の分布 m^N は、 Z を正規化定数とすると次の確率密度関数を持つ。

$$m^N(d\mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j}^N |x_i - x_j|^2 \prod_{k=1}^N e^{-|x_k|^2} d\mathbf{x}_N.$$

行列のサイズ N の無限大への極限をとった時の GUE の固有値 $\mathbf{x}_N$ の統計的性質として、古典的な結果である Wigner の定理が知られている。

命題 3.1. $\mathbf{x}_N$ が $m^N(d\mathbf{x}_N)$ に従うとする。このとき、固有値を $\sqrt{N}$ で割った経験分布

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\frac{x_i}{\sqrt{N}}}$$

は、Wigner の半円分布

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2} dx$$

に弱収束する。

Wigner の半円分布の熱力学極限を考える。 θ を中心としてバルクスケールリングを取る、つまり m^N の x_i を $\frac{s_i + N\theta}{\sqrt{N}}$ に変えたものを考える。 $\mathbf{s}_N = (s_1, \dots, s_N)$ に関する確率測度を μ_θ^N とすると、 μ_θ^N の確率密度関数は、定義より

$$\mu_\theta^N(ds_N) = \frac{1}{Z} \prod_{i < j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N e^{-\frac{|s_k + N\theta|^2}{N}} ds_N.$$

点過程 μ の相関関数 $\{\rho^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対し、2 変数関数 $K(x, y)$ があって、任意の n に対し、

$$\rho^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1, \dots, n}$$

と書けるとき、 μ は K を核とする行列式点過程という。 μ_θ^N は行列式点過程であり、その核は

$$K_\theta^N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k\left(\frac{x + N\theta}{\sqrt{N}}\right) \psi_k\left(\frac{y + N\theta}{\sqrt{N}}\right)$$

である。ここで、 ψ_k は k 次の oscillator wave function を表す。この有限粒子系の熱力学極限として、次のように無限粒子系であるサイン点過程を得られる。

$$K_\theta(x, y) = \frac{\sin\{\sqrt{2 - \theta^2}(x - y)\}}{\pi(x - y)}$$

を核として持つ行列式点過程をサイン点過程と呼び、 μ_θ と表す。

命題 3.2. 任意の $-\sqrt{2} < \theta < \sqrt{2}$ に対し、 μ_θ^N は μ_θ に分布収束する。

K_θ を見れば分かるように、サイン点過程は平行移動不変な点過程である。

注意 3.3. 極限のサイン点過程において、単位区間あたりに存在する粒子の平均個数（粒子の密度）は θ に依存している。しかし、粒子同士は、 θ に無関係なクーロンポテンシャル $\Psi(x, y) = -\log|x - y|$ で相互作用する。この意味で、 μ_θ^N のバルクスケール極限は普遍性を持つ。

この確率幾何的普遍性の力学的対応物を考えたい。

無限粒子系の Dyson モデル (1.3) と、上記のサイン点過程を用いて構成される。実際、次の結果が知られている。

命題 3.4. ([1], [2])

μ_θ -a.s. s に対し、

$$\begin{aligned} dX_t^i &= dB_t^i + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j| < r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt \quad (i \in \mathbb{N}), \\ (X_0^i)_{i \in \mathbb{N}} &= l(s), \end{aligned} \quad (3.1)$$

は一意的な強解を持つ。

μ_θ^N の対数微分 $d_{\mu_\theta^N}$ は容易に求まる。実際、 μ_θ^N の対数を取って s_i で微分すれば、

$$\frac{1}{2} d_{\mu_\theta^N}(s_i, \sum_{j \neq i} \delta_{s_j}) = \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{1}{s_i - s_j} - \frac{1}{N} s_i - \theta.$$

よって、これに対応する N 次元 SDE は、

$$dX_t^{N,i} = dB_t^i + \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{1}{N} X_t^{N,i} dt - \theta dt \quad (1 \leq i \leq N). \quad (3.2)$$

μ_θ^N, μ_θ を平衡分布として持つ SDE はそれぞれ (3.2), (3.1) である。そして、 μ_θ^N は μ_θ に弱収束する。よって、それらの対応物である (3.2) の解も (3.1) に収束すると考えるのが自然であり、これが SDE ギャップである。以下、主結果を定式化する。

N 粒子系の確率力学 $\mathbf{X}_t^N = (X_t^{N,1}, X_t^{N,2}, \dots, X_t^{N,N})$ を (3.2) の解で $\mathbf{X}_0^N \stackrel{d}{=} \mu_\theta^N \circ (l^N)^{-1}$ を満たすものとし、無限粒子系の確率力学 $\mathbf{X}_t = (X_t^1, X_t^2, \dots)$ を (3.1) の解で $\mathbf{X}_0 \stackrel{d}{=} \mu_\theta \circ (l)^{-1}$ を満たすものとする。

定理 3.5. $-\sqrt{2} < \theta < \sqrt{2}$ を満たす θ を固定する。任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_\theta^N \circ (l^{N,m})^{-1} = \mu_\theta \circ (l^m)^{-1} \text{ weakly}$$

が成り立つとする。この時、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (X^{N,1}, X^{N,2}, \dots, X^{N,m}) = (X^1, X^2, \dots, X^m) \text{ weakly in } C([0, \infty), \mathbb{R}^m).$$

注意 3.6. $\theta = 0$ の場合には、定理 3.5 と同様の主張は時空間相関関数を用いた方法でも証明されている ([3]).

定理 3.5 の証明の概略

定理 2.5 を適用して定理 3.5 を証明する。定理 2.5 の仮定の内、命題 2.4 の条件以外は [1],[2] で示されている。よって、

$$\begin{aligned} u^N(x) &= -\frac{2x}{N} - 2\theta, \\ u(x) &= -2\theta, \\ g(x, y) &= \frac{2}{x-y}, \\ w(x) &= 2\theta, \end{aligned}$$

として、(2.6) と (2.7) を確かめればよい。(2.7) の十分条件として、以下の補題が知られている。

補題 3.7 ([1]). $S_r = \{y \in S; |y| < r\}$, $S_{s\infty}^x = \{y \in S; s \leq |x-y| < \infty\}$ とする。 $\rho_x^{N,n}$ を、Palm 測度 μ_x^N の n 次相関関数とする。ある $r \in \mathbb{N}$ が存在して、以下の (3.3)–(3.6) が満たされるとする。このとき、(2.7) が成立する。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in S_r} \left| \int_{S_{s\infty}^x} g(x, y) \{ \rho_x^{N,1}(y) - \rho^{N,1}(y) \} dy \right| = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in S_r} \left| \int_{S_{s\infty}^x} |g(x, y)|^2 \{ \rho_x^{N,1}(y) - \rho^{N,1}(y) \} dy \right. \\ \left. - \int_{(S_{s\infty}^x)^2} g(x, y) \cdot g(x, z) \{ \rho_x^{N,2}(y, z) - \rho^{N,2}(y, z) \} dy dz \right| = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in S_r} \left| \int_{S_{s\infty}^x} g(x, y) \rho^{N,1}(y) dy - w(x) \right| = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in S_r} \left| \int_{S_{s\infty}^x} |g(x, y)|^2 \rho^{N,1}(y) dy \right. \\ \left. - \int_{(S_{s\infty}^x)^2} g(x, y) \cdot g(x, z) \rho^{N,2}(y, z) dy dz \right| = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

μ_θ^N の相関関数は oscillator wave function で与えられた。oscillator wave function の漸近展開である Plancherel-Rotach の公式を用い、(3.3)–(3.6) を確かめればよい。

4 参考文献

- [1] Osada, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices, Probability Theory and Related Fields, Vol 153, (2012)
- [2] Osada, H., Tanemura, H., Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ -fields, arXiv:1412.8674.
- [3] Osada, H., Tanemura, H., Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels, arXiv:1412.8678.
- [4] Kawamoto, Y., Osada, H.: Finite particle approximations of interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials. (in preparation)
- [5] Kawamoto, Y., Osada, H.: Universality of Dyson's model in infinite dimensions and SDE gap. (in preparation)