

半正定値計画法を用いた構造最適設計

寒野 善博*, 藤澤 克樹†, 大崎 純‡, 加藤 直樹§

1. 序

数理解画法の分野では近年, 半正定値計画法 (SemiDefinite Programming, SDP) が注目を集めている. これは線形計画法などを含む, より大きな凸計画の枠組みであり, 線形制約に加えて対称行列の半正定値条件も考慮することができる. また, 主・双対内点法 [1] の適用により, 多項式時間で最適解を求めるアルゴリズムが開発され, 実用的で高速なソフトウェアも登場している [2].

一方, 建築構造物の設計において, 1 次固有振動数は地震荷重や風荷重との共振を避けるために適切に定められるべきであり, また, 動的な剛性の指標としても重要な意味を持つ. このため, 1 次固有振動数を指定した構造物のトポロジー最適化に対して, これまで多くの研究が行われてきた. ところで構造物の固有振動数 (固有円振動数の 2 乗) は, 一般固有値問題の固有値として定式化される. 従って, 1 次固有振動数を指定した構造物の最適設計問題は, 座屈荷重指定の問題などと共に, 固有値制約条件下での最適設計問題として位置づけられる.

ところが, 一般に構造物の固有値制約条件下での最適設計問題の最適解では, しばしば最小の固有値が重複することが知られている. この場合には, 最小固有値の設計変数に関する感度係数は不連続となり, 方向微分係数しか存在しないので, 従来用いられてきた非線形計画法によって最適トポロジーを求めることは極めて困難である. このため, 大域的な最適解を多項式時間で得ることができ, また最適解で固有値が多数重複する場合にも困難なく解を得ることができる手法は, 著者らの知る限り存在しない. 例えば文献 [3] では, 最適解が重複固有値を持つ場合の最適設計問題を解くアルゴリズムが述べられているが, この手法はトポロジー最適化問題を解く手法としては適切であるとは言えない. 実際に, 著者らは最適解に収束しない場合があることを示している. また, 文献 [4] に述べられている手法 (パラメトリック最適化手法) では, 固有値の重複度が大きくなると最適解を求めることが事実上困難になる.

本稿では, これらの困難を避けるために指定 1 次固有値を有するトラスのトポロジー最適化問題を SDP として定式化し, SDP に対する主・双対内点法ソフトウェアである SemiDefinite Programming Algorithm (SDPA) [2] を用いて最適解を求める手法について述べる. また, その解の特性と計算効率について考察する.

2. 半正定値計画法 (SDP) の概要

$R^{n \times n}$, $S^n \subset R^{n \times n}$ をそれぞれ, $n \times n$ の実行列および実対称行列の集合とする. また, 行列 $U, V \in R^{n \times n}$ の内積を記号 $U \bullet V$ で定義する. すなわち, U, V の (i, j) 成分をそれぞれ U_{ij} , V_{ij} とすると, $U \bullet V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} V_{ij}$ である. また, $X \in S^n$ が半正定値, 正定値であること

*京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生

†京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助手

‡京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助教授

§京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授

を, それぞれ $\mathbf{X} \succeq \mathbf{O}$, $\mathbf{X} \succ \mathbf{O}$ と書くことにする. このとき, 半正定値計画法 (SDP) とその双対問題の等式標準形は次のように表される.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}: \text{Minimize } \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{subject to } \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i y_i + \mathbf{X} = \mathbf{F}_0, \\ \mathbf{X} \in \mathcal{S}^n, \mathbf{X} \succeq \mathbf{O}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{D}: \text{Maximize } \mathbf{F}_0 \bullet \mathbf{Y} \\ \text{subject to } \mathbf{F}_i \bullet \mathbf{Y} = b_i \ (i = 1, \dots, m), \\ \mathbf{Y} \in \mathcal{S}^n, \mathbf{Y} \succeq \mathbf{O}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{F}_i \in \mathcal{S}^n$ ($i = 0, \dots, m$) は定数行列, $\mathbf{b} \in R^m$ は定数ベクトル, $\mathbf{X} \in \mathcal{S}^n$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{S}^n$ はそれぞれ変数行列, $\mathbf{y} \in R^m$ は変数ベクトルである. また, 主問題, 双対問題それぞれの目的関数 $\sum_{i=1}^m b_i y_i$, $\mathbf{F}_0 \bullet \mathbf{Y}$ と等式条件 $\sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i y_i + \mathbf{X} = \mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_i \bullet \mathbf{Y} = b_i$ は線形であるが, 半正定値条件 $\mathbf{X} \succeq \mathbf{O}$, $\mathbf{Y} \succeq \mathbf{O}$ は非線形である.

このように SDP は, 線形制約に加えて, 非線形制約である対称行列の半正定値条件も考慮することができる. また, SDP は線形計画法の対称行列空間への拡張と考えられるため, 線形計画法に対して開発された主・双対内点法と呼ばれるアルゴリズムが SDP に対して適用されてきた. 主・双対内点法の適用により, 問題の入力サイズの多項式時間で問題(1), (2)の最適解を同時に求めることができ, 実用的にも高速なソフトウェアが開発されている. 特にここで用いる SDPA [3] は, C++言語で記述された, Mehrotra type の主・双対内点法 [1, 5] のソフトウェアである.

3. 最適化問題の定式化

本稿では ground structure method [6] に基づき, トラスの最適トポロジーを求める. この方法では, まず多くの存在可能部材を持ち, 節点位置が固定されたトラスを考える. 次に, 各部材断面積を連続な設計変数として最適化し, その中から断面積が 0 となる不要な部材を取り除くことで最適なトポロジーを得る. この手法を用いて, 全部材質量を最小化するトポロジー及び部材断面積を求める.

ここで, トラスとは建築構造物の力学的なモデルの一つであると考えられる. 建築物の力学性能を保持するために用いられる要素は構造部材と呼ばれるが, トラスにおいては個々の部材は線材として解析される. また, 部材は材軸方向のみの力を分担するものとモデル化されている. これは, 部材どうしの接合部 (節点) では, 節点周りに部材どうしが自由に回転できるという仮定に対応する. トラスは主に, アリーナやドームなどの大空間を覆う屋根を架構するための建築骨組として用いられている. ここでは, トラス構造物の自由振動について考察するため, 慣性力が大きな役割を果たす. ところが, 建築構造物では構造部材そのものが大きな質量を持つ. このため, 慣性力の要因となる質量として, 本来支持したいものの質量とともに, 部材そのものの質量を考慮しなければならない. 部材以外の質量は, 節点に存在する質点としてモデル化する.

部材断面積のベクトルを $\mathbf{A} = \{A_i\}$, 剛性行列を $\mathbf{K}$, 部材質量に関する質量行列を $\mathbf{M}_s$, 非構造質量に関する質量行列を $\mathbf{M}_0$, 変位の自由度を N^d とすると, r 次固有値 Ω_r および固有ベクトル Φ_r は, 次式で定められる.

$$\mathbf{K}\Phi_r = \Omega_r(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_0)\Phi_r, \quad (r = 1, 2, \dots, N^d). \quad (3)$$

第 i 部材の部材長を L_i , 部材断面積を A_i , 部材の総数を N^m , 固有値の最小制限値を $\bar{\Omega}$ とすると, 最適設計問題は次のように定式化できる.

$$\left. \begin{array}{l} \text{TOP: Minimize} \quad \sum_{i=1}^{N^m} A_i L_i, \\ \text{subject to} \quad \Omega_r \geq \bar{\Omega} \quad (r = 1, 2, \dots, N^d), \\ \quad \quad \quad A_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N^m) \end{array} \right\} \quad (4)$$

部材断面積を A_i を設計変数として問題 TOP を解き, $A_i = 0$ となった部材を取り除くことで最適トポロジーを得る.

最適解の最小固有値が重複しない場合には, 問題 TOP は比較的容易に解くことができる [7]. しかし, 固有値制約下での最適設計解では多くの場合, 最小固有値が重複することが知られている. このような場合には, 重複した固有値を設計変数について, 通常の意味では微分できない. このため, 固有値の重複を考慮した解法が考えられてきた. たとえば, Masur は固有値の重複度が 2 の場合について最適解が満たす必要十分条件を導いている [8]. また, Seyranian らは, 固有値が重複する場合の最適性必要条件を用いた最適化手法を提案している [3]. しかし, この手法では最適解に収束する保証がなく, また, 不等式制約条件を組み込むことが困難であるために, 最適解で断面積が 0 になるような部材が存在するようなトポロジー最適化問題に適用するには相応しいとは言えない. 実際に, 著者らは最適解に収束しない場合があることを示している. また, パラメトリック最適化手法 [4] と呼ばれる手法では, 最適設計解を最小断面積制限値を定めるパラメーターの関数と考えた最適化手法が提案されている. ここではまず, 全部材の断面積が最小断面積制限値に一致するような自明な最適設計解を考え, 次に最小断面積制限値を順次 0 まで減少させることにより, 固有値が重複する場合にも最適解を得られることを示している. しかし, 固有値の重複度が大きくなると最適解を求めることは事実上困難になる.

以下では, 問題 TOP を SDP として定式化し, これを SDPA を用いて解くことにより, 最適トポロジーを得る方法について述べる. SDPA で用いられている主・双対内点法では, 固有値の設計変数に関する微分係数は必要でないため, SDP として解く場合には固有値の重複の有無は問題の難易度に本質的に影響しない.

さて, ここで構造物が $\Omega_r \geq \bar{\Omega} \quad (r = 1, 2, \dots, N^d)$ を満たしているとする, Rayleigh の原理より,

$$\psi^T [\mathbf{K} - \bar{\Omega}(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_0)] \psi \geq 0 \quad (5)$$

が成り立つ. ただしここで ψ は, 構造物の幾何学的な制約条件を満足する任意の変位ベクトルを表す. また, 不等式(5)は行列 $\{\mathbf{K} - \bar{\Omega}(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_0)\}$ が半正定値であることと同値である.

トラスの剛性行列 $\mathbf{K}$ および構造質量行列 $\mathbf{M}_s$ はともに部材断面積 A_i の線形関数である。従って、 $\mathbf{K}_i$ および $\mathbf{M}_i$ を

$$\mathbf{K}_i = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i}, \quad \mathbf{M}_i = \frac{\partial \mathbf{M}_s}{\partial A_i} \quad (6)$$

と定義すると、 $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}_s$ は次のように表現される。

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N^m} A_i \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{i=1}^{N^m} A_i \mathbf{M}_i. \quad (7)$$

(5), (7) より、問題 TOP の固有値に関する制約条件は、次の条件と同値である。

$$\sum_{i=1}^{N^m} A_i (\mathbf{K}_i - \bar{\Omega} \mathbf{M}_i) - \bar{\Omega} \mathbf{M}_0 \succeq \mathbf{O}. \quad (8)$$

節点位置を固定したトラスに対しては、行列 $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}_0$ は定数行列であるので、(8) は線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality : LMI) であることが分かる。そこで、問題 TOP は次のように半正定値計画問題 (1), (2) に帰着される。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}' : \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{N^m} A_i L_i, \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N^m} A_i (\mathbf{K}_i - \bar{\Omega} \mathbf{M}_i) - \bar{\Omega} \mathbf{M}_0, \\ & \mathbf{X} \in S^{N^d}, \mathbf{X} \succeq \mathbf{O}, \\ & A_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, N^m). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

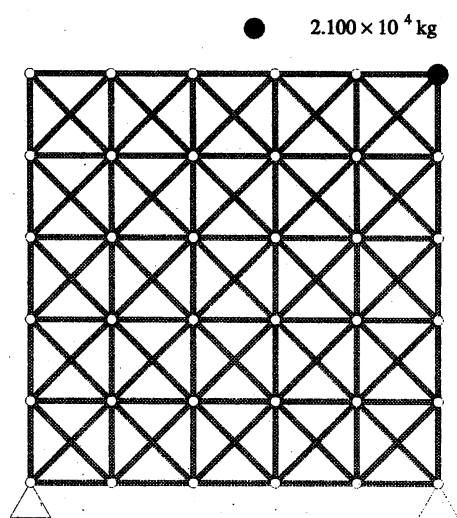
$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}' : \text{Maximize} \quad & \bar{\Omega} \mathbf{M}_0 \bullet \mathbf{Y}, \\ \text{subject to} \quad & (\mathbf{K}_i - \bar{\Omega} \mathbf{M}_i) \bullet \mathbf{Y} \leq L_i, \\ & \mathbf{Y} \in S^{N^d}, \mathbf{Y} \succeq \mathbf{O}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

問題 $\mathcal{P}'$ および $\mathcal{D}'$ は、SDPA を用いて解くことができる。この時に固有値の設計変数に対する感度係数を必要としないため、最適解で固有値が重複しても、解法に本質的に影響しない。従って本手法を用いると、固有値が多数重複するような比較的大規模な構造物に対しても、困難なく最適解を得ることが出来ると思われる。

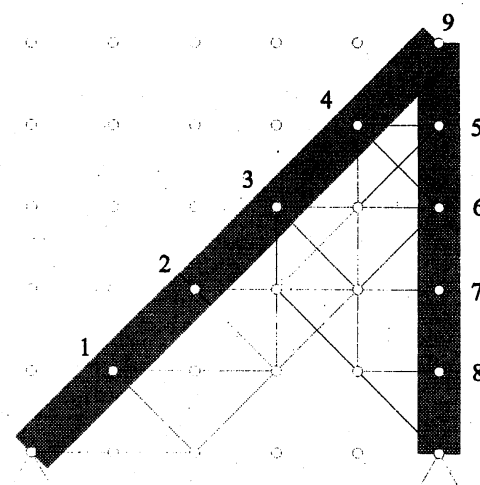
ところで、トラスの部材剛性行列 $\mathbf{K}_i$ と部材質量行列 $\mathbf{M}_i$ はそのほとんどの成分が 0 である疎行列である。また、実際には問題(9) 中の不等式制約 $A_i \geq 0$ を含めて問題(1) のような等式標準形として定式化するため、問題(1) の行列 $F_i \in S^{n^d+n^m}$ はブロック対角 [11] の構造を持つ。ここで用いた SDPA では疎行列のもつ特徴とブロック対角のデータ構造を有効に用いるため、SDP の他の解法と比べても極めて効率よく最適解を求めることができる [11]。

4. 例題

以上で提案した手法の有効性を示すために種々の例題を SDPA を用いて解き、パラメトリック最適化手法 (PP) [4] 及び逐次 2 次計画法 (SQP) [9] との比較を行った (表 1, [10])。これらの例題では、部材は鋼材としてヤング率を $E = 205.8 \text{ GPa}$ 、密度を $\rho = 7.86 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ と

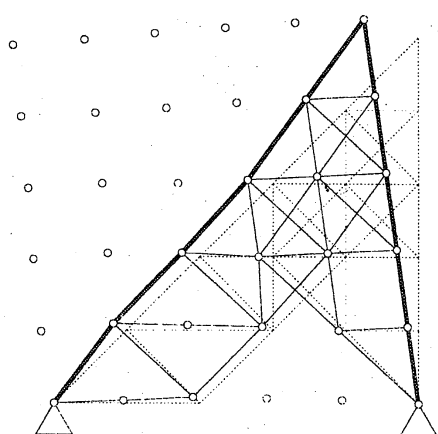


(a) 5 × 5 正方形平面トラス

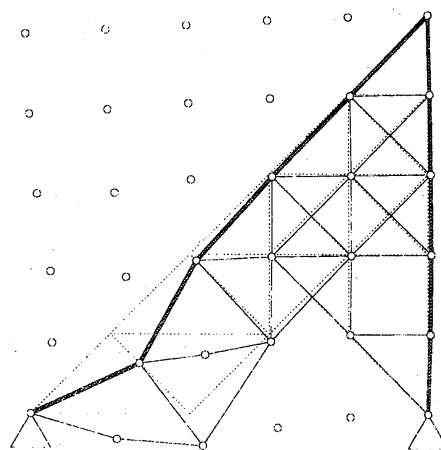


(b) 最適トポロジー

図 1: 5 × 5 正方形平面トラス



Mode (a)



Mode (b)

図 2: 5 × 5 正方形平面トラスの最適解の 1 次固有モード

した。ただし SDPA に関しては、実行可能解を探索する過程で双対問題の目的関数の発散を防ぐために $E = 1000.0$ となるようにスケーリングを行なった。また $\bar{\Omega} = 1000 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ とし、断面積の最小制限値は表 1 に $\bar{A}_i$ として示す。数値実験には Sun Ultra II (Ultra SPARC II 300MHz : 256 MB メモリ) を用いた。

まず、4 種類の正方形平面トラスに対して 3 つの手法での比較を行った。どの場合も非構造質量は右上の節点に存在し、その質量は $2.1 \times 10^4 \text{ kg}$ である。トラスの 1 グリッドの長さは 200.0 cm であり、右下および左下の節点で単純支持されている。

5 × 5 正方形平面トラス (図 1(a)) に対して SDPA により得られた最適設計解を図 1(b) に示す。ここでは、最適化の結果 $A_i < 2.0 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$ となった部材を除いて最適トポロジーを得

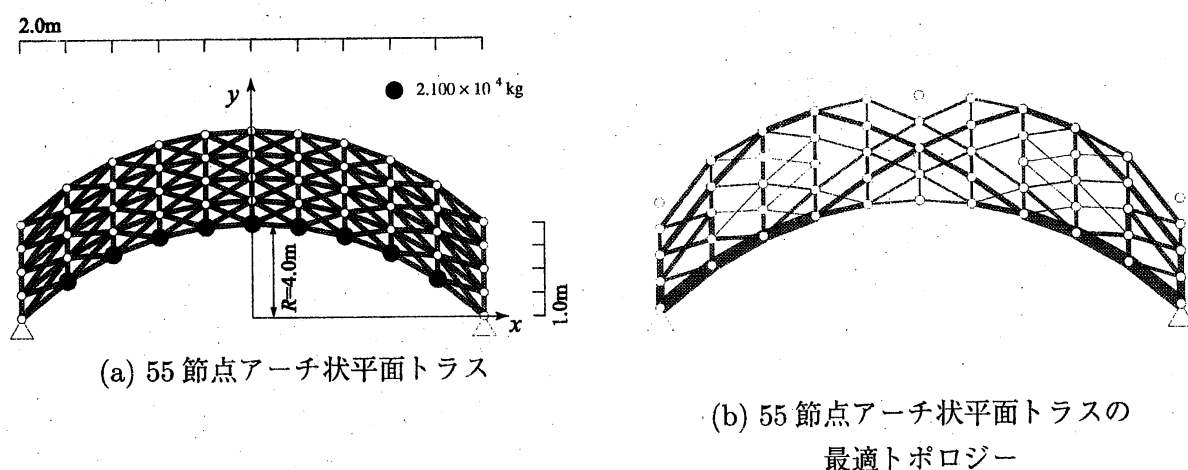


図 3: 55 節点アーチ状平面トラス

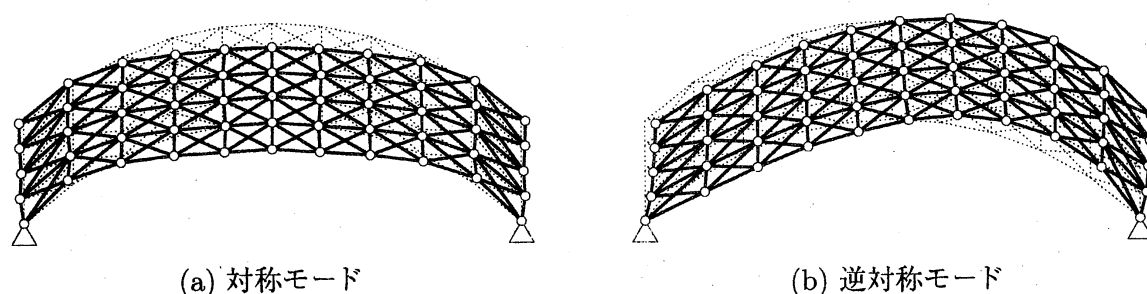
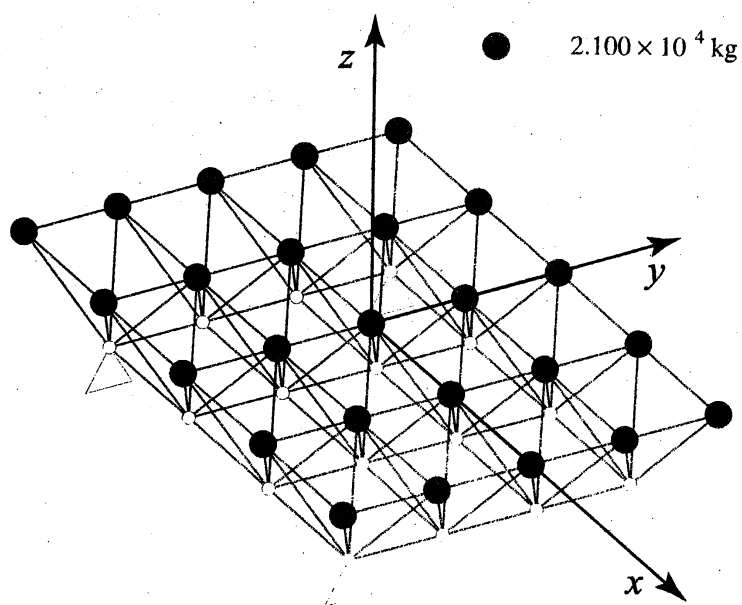


図 4: 最適設計解の固有モード

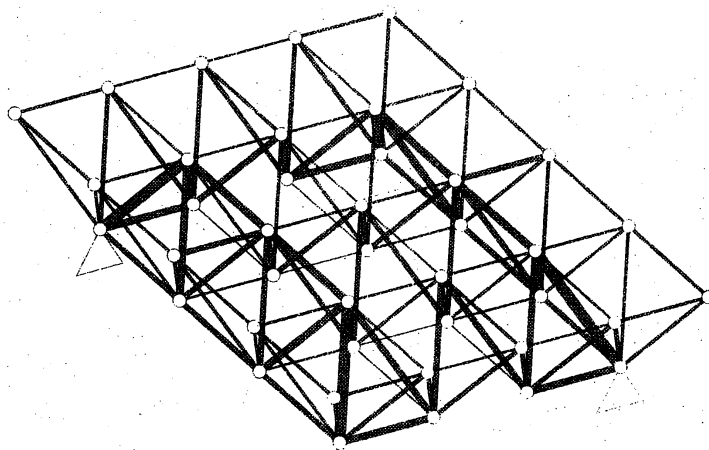
ている．図 1(b) 中の部材の太さが，最適設計解における断面積に比例するように描いている．この時，1 次固有値の重複度は 2 であり，対応する固有モードは図 2 に示す通りである．即ち，図 2(a) は非構造質量が存在する節点 9 が大きく変位するモードであり，図 2(b) は最適化の結果形成された長い部材が局所的に振動するモードである．図 1(b) に示した微小な断面積をもつ部材は，図 2(b) の局所振動モードの固有振動数の低下を防ぐために必要であることが分かる．2 次固有値はこのような細い部材の断面積に極めて大きく影響されるが，SDPA 以外の手法では 1 次固有値に一致するような精度の良い結果は得られていない．実用的にはこのような微小な部材が存在することは好ましくないため，実用的な設計解を得るためには，微小な部材を除き，その結果不安定となる節点 1-8 を固定すればよい．また，表 1 より本手法の計算時間は固有値の重複の有無に影響されないことが分かる．

次に，図 3(a) に示すようなアーチ状平面トラスの例を示す．非構造質量は最下層の各節点に存在し，その質量はそれぞれ 2.1×10^4 kg である．またこの問題での初期トラス図 3(a) は， y 軸に対して存在可能部材，支持条件，非構造質量の全てが対称である．この問題に対して，SDPA を用いて得られた最適設計解を図 3(b) に示す．最適解の 1 次固有値の重複度は 2 であり，それぞれ図 3(a) 中の y 軸に関する対称モード図 4(a) と逆対称モード図 4(b) に対応する．さらに，本手法を用いると，部材断面積の対称性に関する制約条件を特に与えなくても， y 軸に対して最適設計解を得ることができた．

最後に，図 5(a) に示すような 2 層平板状立体トラスに対して得られた最適設計解を図 5(b) に



(a) 2層平板状立体トラス



(b) 2層平板状立体トラスの最適トポロジー

図 5: 2層平板状立体トラス

表 1: SDPA, PP, SQP の比較実験結果

		SDPA [2]	PP [4]	SQP [9]
正方形平面トラス 2 × 2 ($N^m = 20$) ($N^d = 14$)	Volume (cm ³)	1.6355×10^4	1.6368×10^4	1.6357×10^4
	Ω_1 (rad ² /s ²)	1000.0	999.55	1000.0
	Ω_2 (rad ² /s ²)	2145.3	5977.8	2000.3
	$\bar{A}_i$ (cm ²)	0.0	0.01	0.001
	CPU (s)	0.10	0.83	1.21
正方形平面トラス 3 × 3 ($N^m = 42$) ($N^d = 28$)	Volume (cm ³)	3.6886×10^4	3.6905×10^4	3.6890×10^4
	Ω_1 (rad ² /s ²)	1000.0	999.44	1000.0
	Ω_2 (rad ² /s ²)	1045.7	2531.6	1011.9
	$\bar{A}_i$ (cm ²)	0.0	0.01	0.001
	CPU (s)	0.43	2.65	5.93
正方形平面トラス 4 × 4 ($N^m = 72$) ($N^d = 46$)	Volume (cm ³)	6.5776×10^4	6.6126×10^4	6.5841×10^4
	Ω_1 (rad ² /s ²)	1000.0	999.49	1000.0
	Ω_2 (rad ² /s ²)	1005.0	4551.5	1903.0
	$\bar{A}_i$ (cm ²)	0.0	0.05	0.01
	CPU (s)	1.67	5.76	15.96
正方形平面トラス 5 × 5 ($N^m = 110$) ($N^d = 68$)	Volume (cm ³)	1.0320×10^5	1.0371×10^5	1.0446×10^5
	Ω_1 (rad ² /s ²)	1000.0	999.39	1000.0
	Ω_2 (rad ² /s ²)	1000.0	3052.9	5219.3
	Multiplicity	2	1	1
	$\bar{A}_i$ (cm ²)	0.0	0.01	0.1
	CPU (s)	4.50	14.76	44.31
平面アーチ ($N^m = 174$) ($N^d = 106$)	Volume (cm ³)	6.4493×10^5	6.4497×10^5	
	Ω_1 (rad ² /s ²)	1000.0	998.93	
	Ω_2 (rad ² /s ²)	1000.0	999.42	
	Multiplicity	2	2	
	$\bar{A}_i$ (cm ²)	0.0	0.01	
	CPU (s)	15.04	382.09	
2層平板状立体トラス ($N^m = 128$) ($N^d = 111$)	Volume (cm ³)	8.7110×10^5		
	$\Omega_1, \dots, \Omega_5$ (rad ² /s ²)	1000.0		
	Multiplicity	5		
	$\bar{A}_i$ (cm ²)	0.0		
	CPU (s)	13.52		

示す。非構造質量は上層の各節点に存在するものとする。また部材長さは、 x , y 方向の上・下弦材がそれぞれ 300.0 cm, 200.0 cm で、上層と下層の距離が 200.0 cm である。最適解での 1 次固有値の重複度は 5 であり、本手法では困難なく解を得ることができたが、他の 2 つの手法では解は得られていない。

また、この問題は図 5(a) に示すように、 x - z 平面および y - z 平面に対して、存在可能部材、支持条件、非構造質量の全てが対称なトラスを対象にしている。現実の建築構造物は、このような対称性を有する場合が少なくない。対称なトラスに対しては、最適設計解（トポロジー及び部材断面積）はやはり対称であるものと従来より予想されてきた。また、対称でない設計解は実用上の価値は低い。ところが、既往の最適化手法を用いて対称なトラスに対する最適設計解を求めた場合、実際には、対称性を満たさない解しか得られないことが知られている。そこで従来は、等しくなると予想される設計変数に対して等式制約を設けたり、対称性を考慮してあらかじめ設計変数を減らして定式化するなどしの対処がなされてきた。ところが、最適設計を行うに際して、トラスが対称な場合に限ってその対称性を考慮しながら特別なデータを作るというのは、実際には大変複雑で手間がかかる。また、そもそも最適解が本当に対称であるかどうかについては、理論的な根拠は何も示されていなかった。

一方で本手法を用いると、設計変数に対称性を考慮した制約を与えなくても、図 5(b) のように、 x - z 平面および y - z 平面に対して対称な最適設計解を得ることができた。ここで最適化手法として用いた SDPA は、SDP に対する主・双対内点法と呼ばれるアルゴリズムが実装されたソフトウェアの一つである。主・双対内点法の多くは、実行可能領域内で定義された中心パスを追跡することで、中心パスの極限として大域的な最適解を得ることが特徴である。著者らは、図 5(a) のような対称なトラスに対するトポロジー最適化問題 TOP を SDP として定式化した場合、中心パス上で得られる設計解は必ず対称であることを理論的に証明した [12]。従って、中心パスの極限として最適解を得るようなアルゴリズムでは、特別な制約を付け加えることなしに、対称な最適解が得られることが保証されている。このため、対称なトラスに対する問題を解くに際して、対称性を考慮した特別な処理を一切必要としない。これは、主・双対内点法の実用上の利点の一つであると言える。図 3(b) および図 5(b) に示す結果は、この性質を例証している。また、対称なトラスに対する最適設計問題に実行可能解が存在するならば、その最適解にはかならず対称な解が含まれていることが、中心パスの対称性より理論的に明らかになった。

表 1 の全ての例題を通じて、本手法が他の 2 つの手法と比べ、精度と計算速度の面で優れていることが分かる。即ち、本手法で得られた結果はどの例題でも、すべての固有値が $\bar{\Omega} = 1000 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 以上であるという制約条件を厳密に満たしている。それに加えて、SDP を用いた解法では固有値の感度係数を計算する必要があるため、固有値の重複の有無は問題の難易度に本質的に影響しない。実際、1 次固有値が多く重複度を有する場合にも容易に最適解を求めることができ、重複しない場合と比べて計算時間は変わらないことを例題を通じて明らかにした。

5. 結論

指定 1 次固有値を有するトラスの最適設計問題を SDP として定式化し、SDPA を用いて最適なトポロジーを求めた。最適解で 1 次固有値が重複する場合でも、SDPA を用いると他の手法のような問題を生じることなく解くことができることを例証した。このため、本手法では既往

の方法では解くことができなかった大規模な問題も解くことが可能である。また、提案したアルゴリズムが既往の手法と比べて、精度と計算速度の面で優れていることを数値実験を通して明らかにした。さらに、構造物が対称な場合には、その対称性を維持した最適解に収束することを数値実験によっても示すことができた。

参考文献

- [1] M. Kojima, S. Shindoh and S. Hara, Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, **7**, 1997. pp. 86-125,
- [2] K. Fujisawa, M. Kojima and K. Nakata, SDPA (Semidefinite Programming Algorithm) -User's Manual-, *Tech. Report B-308, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Japan*, 1998.
- [3] A.P. Seyranian, E. Lund and N. Olhoff, Multiple eigenvalues in structural optimization problems, *Structural Optimization*, Vol.8, pp. 207-227, 1994.
- [4] Tsuneyoshi Nakamura and M. Ohsaki, A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **94**, pp. 113-129, 1992.
- [5] S. Mehrotra, On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on Optimization*, **2**, pp. 575-601, 1992.
- [6] U. Kirsch, Optimal topologies of truss structures, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 42, pp. 223-239, 1989.
- [7] V.B. Venkayya and V.A. Tishler, Optimization of structures with frequency constraints, in: *Computer Methods in Nonlinear Solids Structural Mechanics ASME-AMD-54*, ASME, New York, pp. 239-259, 1983.
- [8] E. F. Masur : Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints, *Int. J. Solids Structures*, 1984.
- [9] J.S. Arora and C.H. Tseng, IDESIGN User's Manual Ver. 3.5, *Optimal Design Laboratory, The University of Iowa*, 1987.
- [10] M. Ohsaki, K. Fujisawa, N. Katoh and Y. Kanno, Semi-Definite Programming for Topology Optimization of Truss under Multiple Eigenvalue Constraints, to appear in *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1999.
- [11] K. Fujisawa, M. Kojima and K. Nakata, Exploiting Sparsity in Primal-Dual Interior-Point Methods for Semidefinite Programming, *Mathematical Programming*, **79**, pp. 235-253, 1997.
- [12] Y. Kanno, M. Ohsaki, K. Fujisawa and N. Katoh, Symmetricity of the solution of Semidefinite Program, submitted to *SIAM Journal on Optimization*, 1999. Available at <http://is-mj.archi.kyoto-u.ac.jp/~fujisawa/symmetric.ps.gz>.