

Prime graph components of finite groups

筑波大学 飯寄 信保
Nobuo Iiyori
筑波大学 八牧 宏美
Hiroyoshi Yamaki

有限群 G の prime graph $\Gamma(G)$ とは、

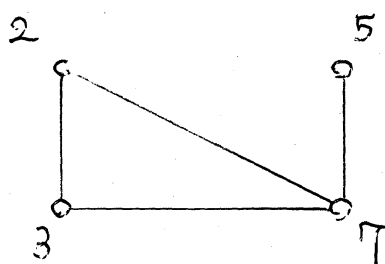
頂点集合 $V(\Gamma(G)) = \pi(G) = \{p \mid p = \text{prime}, p \mid |G|\}$

辺集合 $E(\Gamma(G))$, $pq \in E(\Gamma(G)) \Leftrightarrow$

$\exists g \in G$, $\text{order } g = pq$, $p \neq q$

で定義される graph のことである。 $\omega(G)$ を $\Gamma(G)$ の連結成分の個数とする。

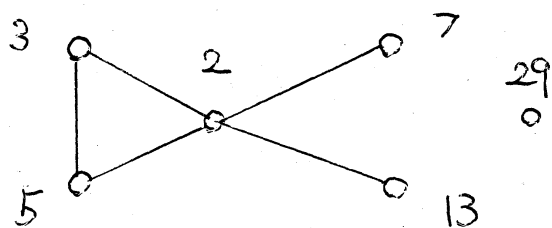
例 $G = \mathbb{Z}_7 \times S_5$



$\Gamma(\mathbb{Z}_7 \times S_5)$

$\omega(\mathbb{Z}_7 \times S_5) = 1$

$G = R_n$ Ruchvalis 群



$\Gamma(R_n)$

$\omega(R_n) = 2$

Prime graph は有限群論においていろいろと応用されてい

る。例えば Frobenius 予想 (i.e. 有限群 G とその位数を割る自然数 e に対して群上の方程式 $x^e = 1$ が丁度 e 個の解をもてば解集合は群となるであろうと云う予想) の検証にも有効に用いられている [I-Y, 1, 2, Y]。Thompson の予想 [Sh] やいろいろな群の特徴づけ [B-Sh] にも応用されている。連結成分の個数 $\omega(G)$ に対してはいろいろな結果がある。 π_1 は 2 を含む $\Pi(G)$ の連結成分とする。

定理 1 (Gruenberg-Kegel)

$\omega(G) \geq 2$ となる有限群 G は次の構造をもつ。

- (1) Frobenius 群 又は 2-Frobenius 群.
- (2) $G \triangleright H \triangleright K$ で K は π_1 群 H/K は単純群
 G/H は π_1 群.

但し 2-Frobenius 群とは次の構造をもつ群 G のことである。

$1 \subset H \subset K \subset G$, K は H を核とする Frobenius 群

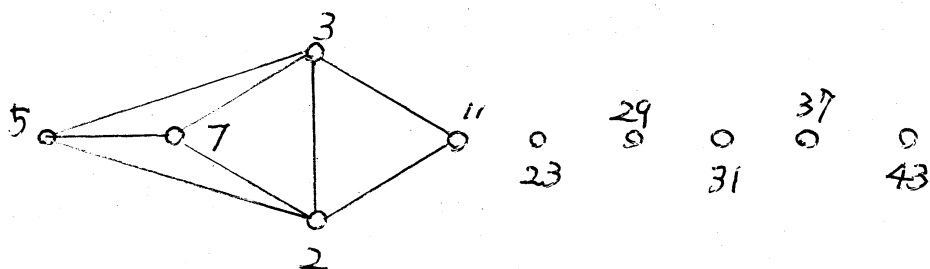
G/H は K/H を核とする Frobenius 群、なる部分群列をもつ。

定理 1 より $\omega(G)$ は単純群の分類に帰着される。従って [LW], [I-Y 3] の単純群 G についての $\omega(G)$ の分類を用いると、すべての有限群に対して成立する非常に一般的な結果が得られる。

定理 2

有限群 G に対して $\nu(G) \leq 6$.

例 $G = J_4$; 最大の Janko 群



$$\Gamma(J_4), \quad \nu(J_4) = 6.$$

注意 $[W], [I-Y 3]$ では $\nu(G)$ ばかりでなく $\pi(G)$ の連結成分が完全に分類されている。

さて $\nu(G) \geq 2$ となる群は表現論など他の言葉で言い換えることができる。

定理 3 ($[I], [W]$)

(1), (2), (3) は同値である。

(1) $\nu(G) \geq 2$

(2) G は 2-connected sharp character χ をもつ。すなわち $\chi(G^\#) = \{p, q\}$, $(\chi(1) - p, \chi(1) - q) = 1$ かつ $|G| = (\chi(1) - p)(\chi(1) - q)$.

(3) G は次の性質をもつ Hall 部分群 H を含む。

$$(i) \quad C_G(x) \subseteq H, \quad x \in H^\#,$$

$$(ii) \quad H \cap H^g = 1 \text{ or } H, \quad g \in G$$

References

- [B-Sh] R. Brandl and W. Shi, Finite groups whose element orders are consecutive integers, *J. Algebra* 143 (1991), 388-400.
- [I] N. Iiyori, Sharp characters and prime graphs of finite groups, To appear in *J. Algebra*.
- [I-Y,1] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, *Bull. Amer. Math. Soc.* 25 (1991), 413-416.
- [I-Y,2] _____, A conjecture of Frobenius and the simple groups of Lie type, III, *J. Algebra* 145 (1992), 329-332.
- [I-Y,3] _____, Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, To appear in *J. Algebra*.
- [Sh] W. Shi and J. Bi, A characteristic property for each finite projective special linear group, *Lecture Notes in Mathematics*, 1456 (1990), 171-180, Springer.
- [W] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups, *J. Algebra* 69 (1981), 487-513.
- [Y] H. Yamaki, A conjecture of Frobenius and the simple groups of Lie type, I. *Arch. Math.* 42 (1984), 344-347, II. *J. Algebra* 96 (1985), 391-396.