

パラメトリック励起下におけるマグノン系カオスの $f(\alpha)$ スペクトル

岡山大・理 味野 道信 山 嵯 比 登 志
福岡工大・教養 中村 勝弘

(1) 始めに

マグノン（スピン波）系におけるカオスの研究は、Suhlがマグノンモード間の非線形相互作用を指摘して以来、実験と理論の両面から数多くの報告がなされている。マグノン系の特徴の一つは、モード間の微視的な相互作用が今までによく研究されており、計算機シミュレーションと実験との比較が容易な点である。これにより、モデルの妥当性の検証、さらにはパラメータの決定等も期待される。そこで今回は、実験で得られたストレンジアトラクタとシミュレーションのアトラクタの比較をマルチフラクタル $f(\alpha)$ を用いて行った。

(2) 実験 ¹⁾

実験は単結晶 YIG（イットリウム・鉄・ガーネット）円板をマイクロ波で平行励起することにより行った。これは、外部静磁場と平行にマイクロ波磁場を加える方法で、特定の波数ベクトルを持つマグノンを選択的に励起する事ができる。今回は、両磁場を円板の回転軸である結晶の [111] 方向に加え、外部静磁場 1935 Oe、マイクロ波周波数 8.9 GHz、温度 4.2 K で測定を行った。

マイクロ波電力を大きくすると、ある閾値 P_c より上でマイクロ波の吸収が雪崩現象的に増加する。そして、周期的発振、さらにはカオスが観測される。図(1)はこの時得られた信号のパワースペクトルと2次元に埋め込んだアトラクタである（励起パラメータ P は P_c に対する比で表記する）。図(1)に示した電力から更に励起を強くすると、周期 -4、周期 -2、周期 -1 と変化した後、アトラクタの次元が3から5の高次元カオスに移行する。

カオス発生点近くであると考えられる $P=2.20\text{dB}$, 2.79dB 、そしてバンドが融合した $P=3.60\text{dB}$ について $f(\alpha)$ を求めた。アトラクタ全体のデータ約4000点を4次元空間に埋め込み、各データ点における測度 $P_i(l)$ を（半径 l の超球内のデータ点の数）／（全データ点の数）とする。そして、

$$\tau(q) = \log \Gamma(q, l) / \log l$$

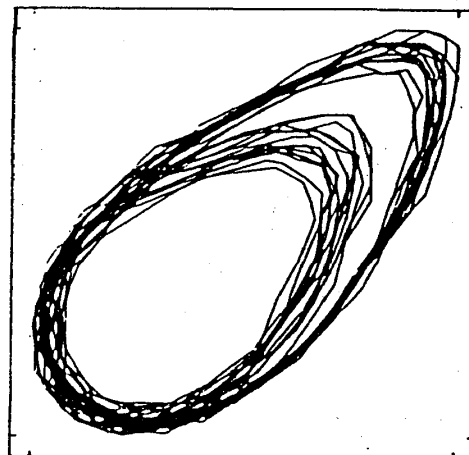
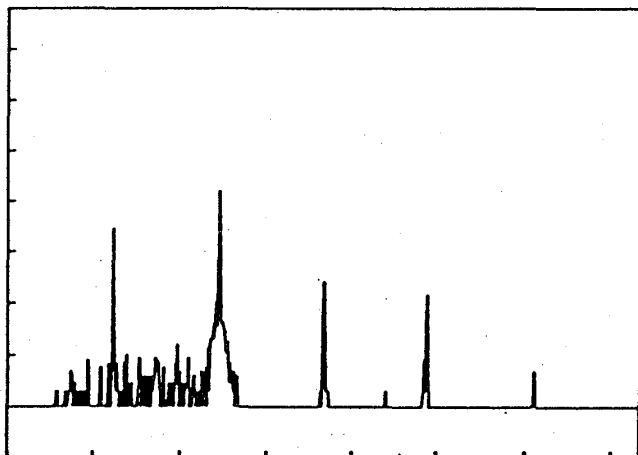
から τ を求め、下に示す Legendre 変換を用いて $f(\alpha)$ を求めた。

$$\alpha(q) = d\tau / dq$$

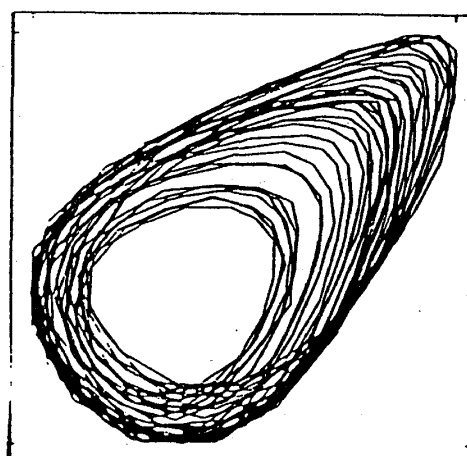
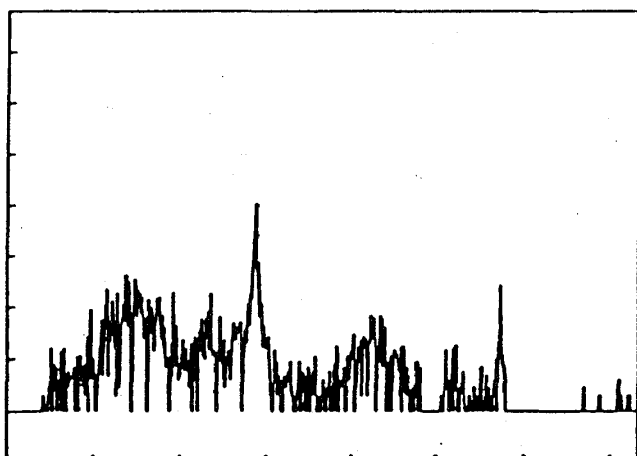
$$f(q) = q \cdot \alpha(q) - \tau(q)$$

図(2-a)は、 $P=2.20\text{dB}$ で得られた $f(\alpha)$ であり、 D_0 は約 1.5 である。 $P=2.97\text{dB}$ では、 $\tau(q)$ を決定するために l と Γ の両対数プロットをとると、直線に乗る範囲が2つある様に思われる（図2-b）。そこで、 l の大きい範囲の $\tau(q)$ から得た $f(\alpha)$ が黒く塗りつぶした点、 l の小さい範囲から得たものが白抜きの点で示したカーブである（図2-c）。 $P=3.60\text{dB}$ では両対数プロットからほぼ単一の τ

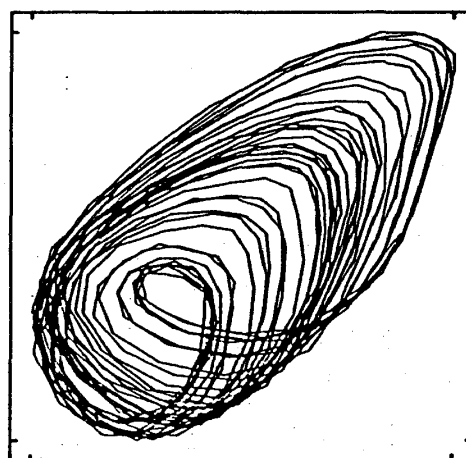
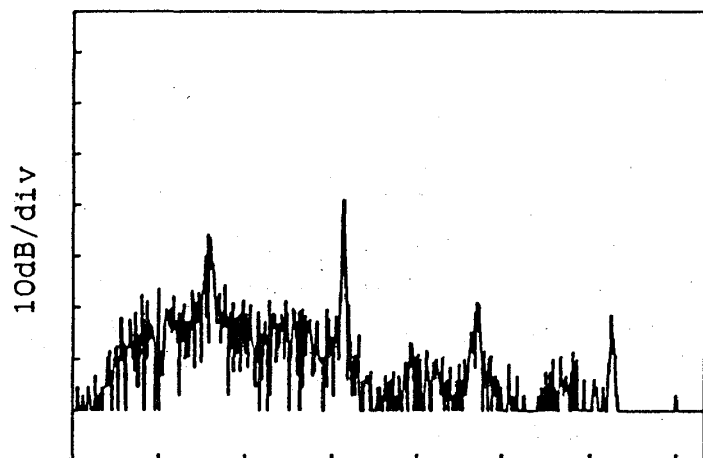
P=2.20 dB



P=2.97 dB

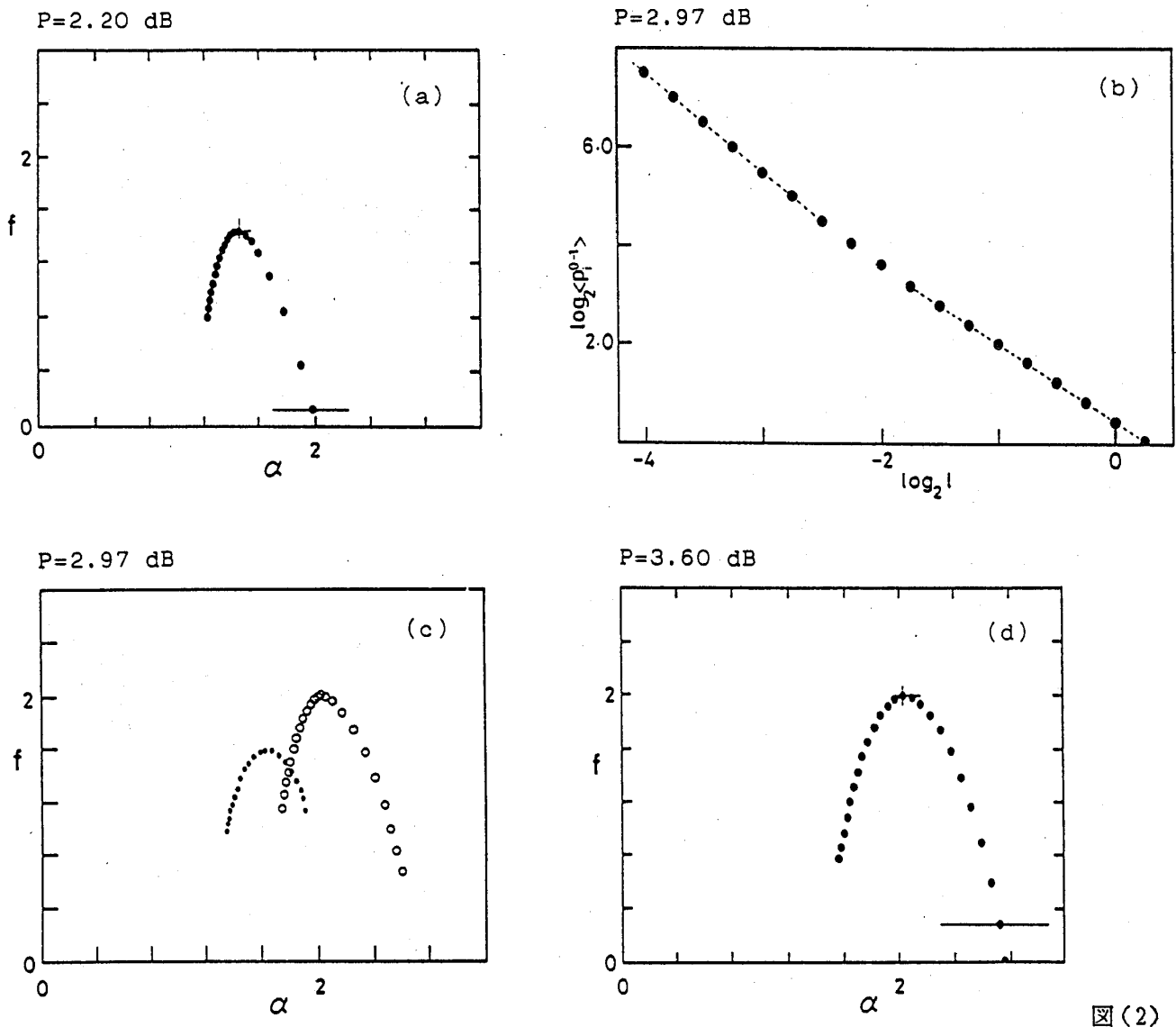


P=3.60 dB



図(1)

20kHz/div



図(2)

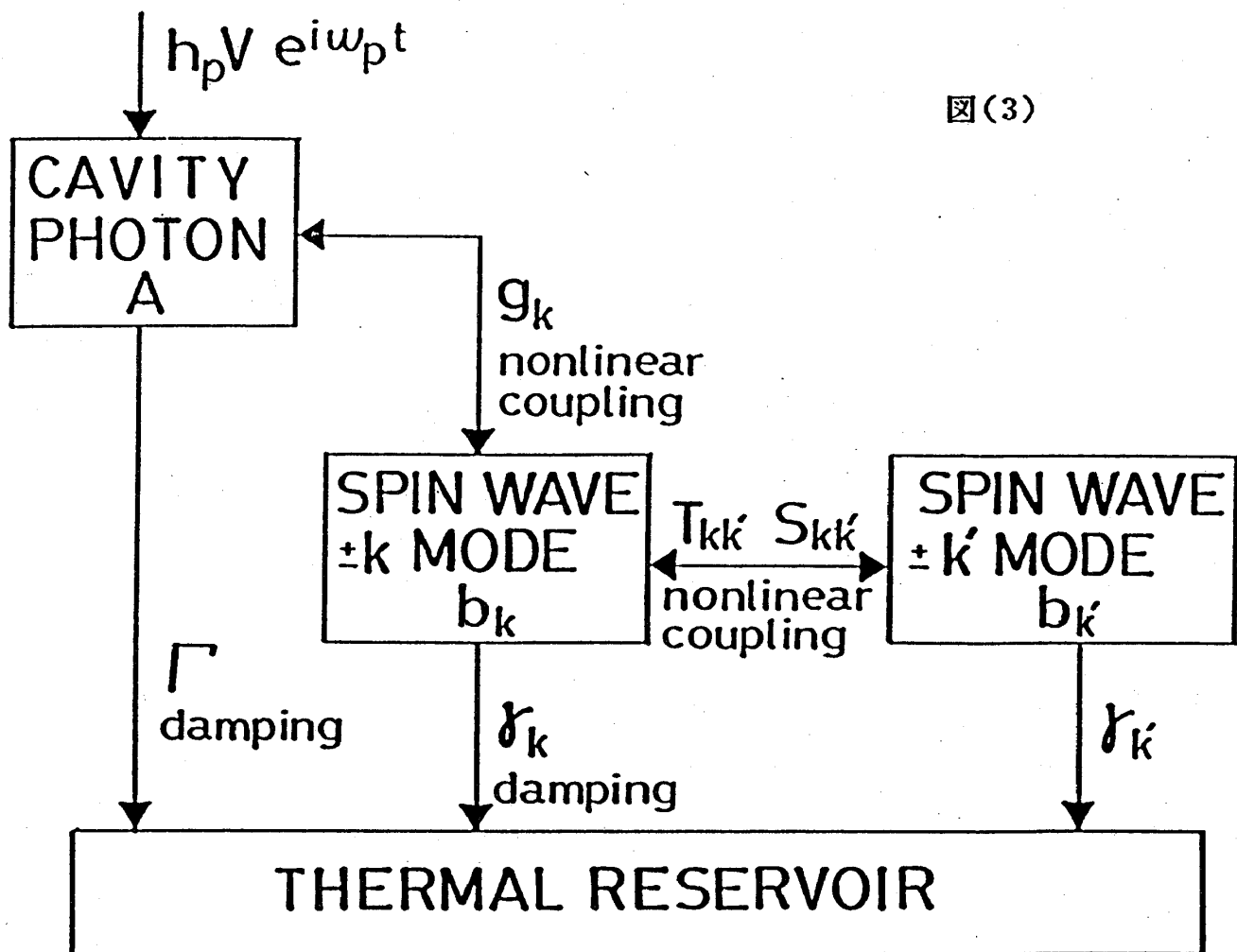
(q)を見積ることができ、 $D_0=2.0$ のカーブを得た(図2-d)。ただし、カーブの右下の領域は両対数プロットの直線性があまり良くないために誤差が大きくなっている。

(3) シミュレーション ²⁾

シミュレーションに用いたモデルを図(3)に示す。マグノン波は波数ベクトル k 、 k' の2モードの存在を仮定する。各モードは振幅、位相の2次元の自由度を持つので、系全体では4次元となる。一方の k モードのみが、マイクロ波の光子と g_k の強さで結合している。そして、マグノンモードは、互いに $T_{kk'}$ 、 $S_{kk'}$ の強さで非線形に結合しており、時定数 γ で減衰する。S理論によるハミルトニアンは、

$$H = \omega_p A^\dagger A + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \frac{1}{2} \sum_k (g_k A b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \text{h.c.}) \\ + \langle \hbar \nabla_p e^{-i\omega_p t} A^\dagger + \text{h.c.} \rangle + H_{int}$$

図(3)



$$H_{int} = \sum_{kk'} \langle T_{kk'} b_k^\dagger b_k b_{k'}^\dagger b_{k'} + \frac{1}{2} S_{kk'} b_k b_{-k} b_{k'}^\dagger b_{-k'}^\dagger \rangle \quad (\hbar=1)$$

ここで、 ω_p は励起周波数、 A はキャビティ内フォトンの演算子、 ω_k は k モードマグノンの振動数、 b_k は k モードマグノンの演算子である。 H_{int} は非線形の4マグノン相互作用を表す項である。現象論的に導入したマグノンの減衰定数 γ 、フォトンの減衰定数 Γ を用いて、演算子 b_k の低周波成分を表す c_k ($b_k = c_k \cdot \exp(-i\omega_p t/2)$)の時間変化は、

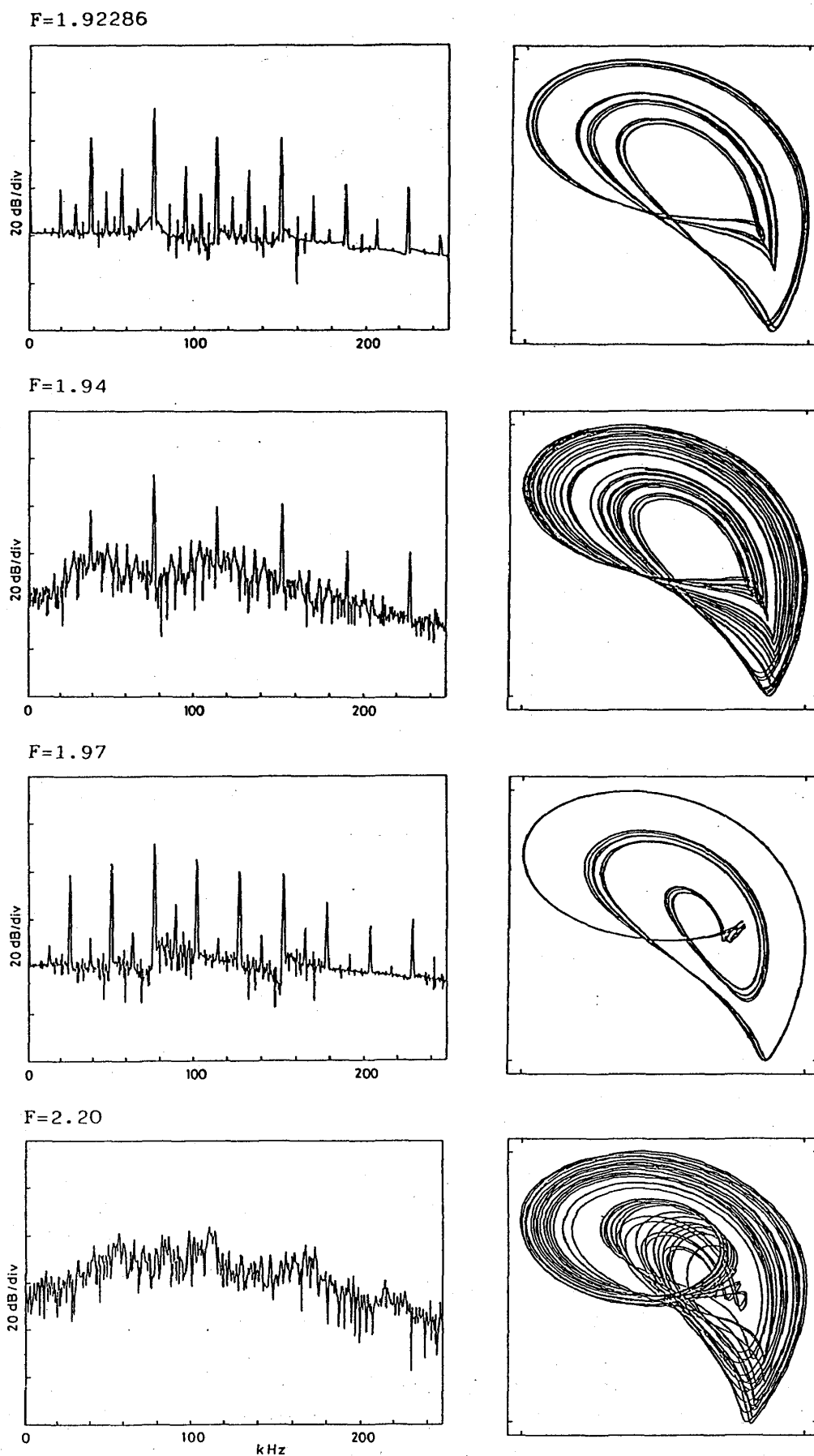
$$\frac{dc_k}{dt} = -\gamma_k \cdot c_k - i \cdot \Delta \Omega_k \cdot c_k - i \cdot Q \cdot F \cdot g_k \cdot c_k^* - i \left\{ 2 \sum_{k'} T_{kk'} |c_{k'}|^2 c_k + \sum_{k'} (S_{kk'} + E \cdot g_{k'} \cdot g_k^*) c_{k'}^2 \cdot c_k^* \right\}$$

で与えられる。なお、 $\Delta \Omega_k = \omega_k - 1/2 \omega_p$ 、 $Q = -i/\Gamma$ 、 $E = -i/2\Gamma$ 、 $F = h_p V$ (マイクロ波強度)である。以下のパラメータを用いてマイクロ波の強度に相当する F を変化させた時、周期倍分岐を経てカオスが発生する。なお、 F は $10^7 (\text{SEC}^{-1})$ の単位で表記してある。

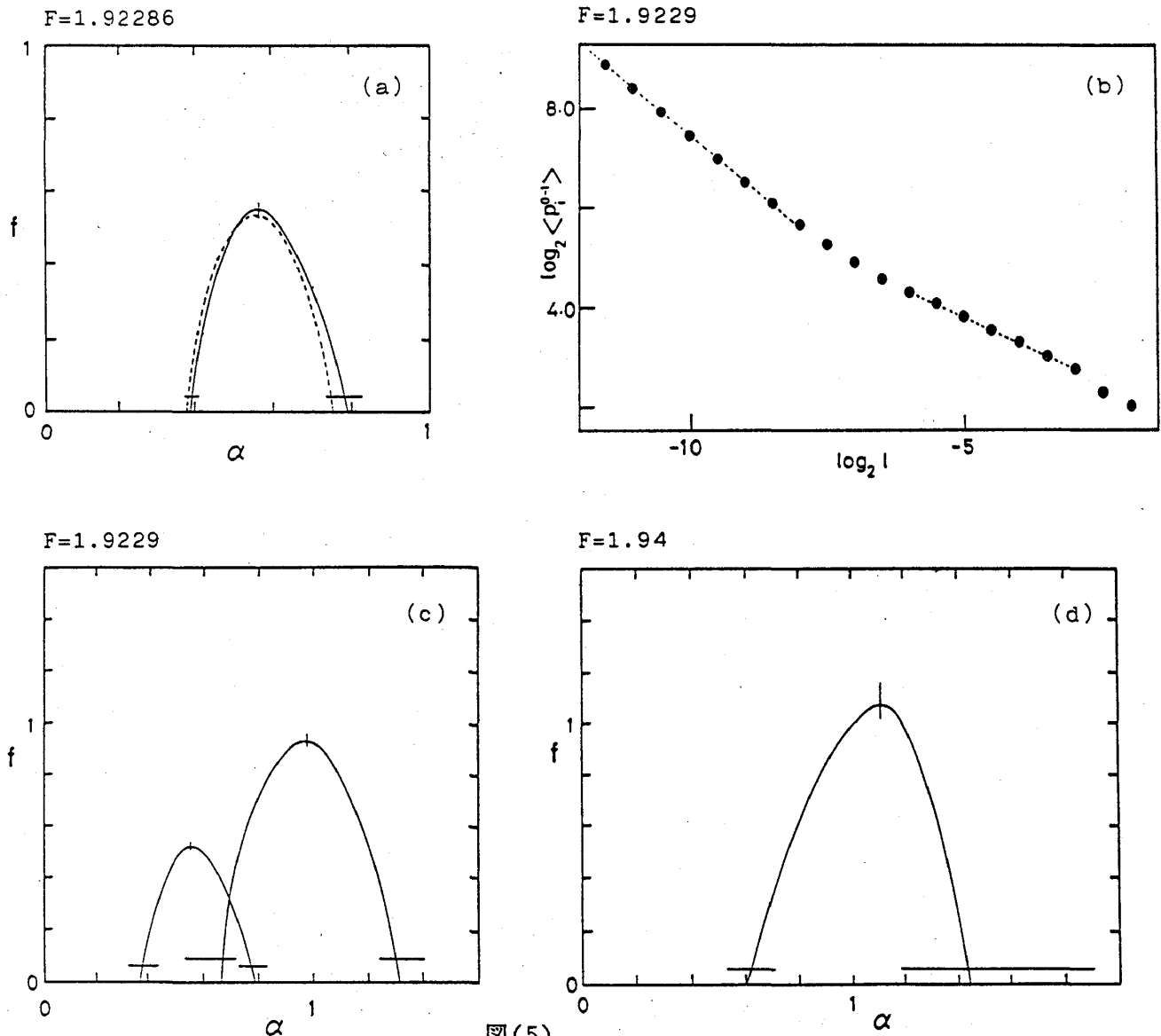
$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k1} &= 0.21 \times 10^6, & \varepsilon_{k2} &= 0, & \Gamma &= 1.0 \times 10^8, & r_{k1} &= 0.1 \times 10^5, \\
r_{k2} &= 0.2 \times 10^5, & T_{11} &= -0.5 \times 10^{-8}, & T_{22} &= 0.25 \times 10^{-8}, & T_{12} &= T_{21} = 2.0 \times 10^{-8}, \\
S_{11} &= -0.5 \times 10^{-8}, & S_{22} &= 0.25 \times 10^{-8}, & S_{12} &= S_{21} = 4.5 \times 10^{-8}, \\
\Delta\Omega_1 &= \Delta\Omega_2 = 0 \quad (\text{sec}^{-1}).
\end{aligned}$$

図(4)は、各励起パラメータでのパワースペクトラムとフェイズポートレートである。 $F=1.92286$ がカオスのオンセットであり、 $F=1.94$ ではバンドがマージしている。 $F=1.97$ 付近で 3×2^N のウィンドウが現れた後、 $F=2.20$ 以上でパワースペクトラムに特徴的なピークを持たないカオスに移行する。

シミュレーションでは、ポアンカレ断面データの約8000点から実験と同様な方法により $f(\alpha)$ を求めた。オンセット $F=1.92286$ で得られたスペクトルを図(5-a)に示す。なお、点線は、周期倍分岐ルートのオンセットで予測されている普遍カーブであり、 D_0 、 $D(q \rightarrow \infty)$ 、 $D(q \rightarrow -\infty)$ 付近でのエラーバーも図中に示してある。励起がオンセットを少し越えた $F=1.9229$ では、実験の場合と同様に $\tau(q)$ を求めるための両対数プロットに直線部分が2つ有り(図5-b)、この結果1の大きい範囲に対応する左下の $f(\alpha)$ と、1の小さい範囲に対応する大きい $f(\alpha)$ カーブが得られている(図5-c)。カオスがある程度まで発達した $F=1.94$ の $f(\alpha)$ が図(5-d)である。この場合も、 q の小さい値、つまりカーブの右下は収束が悪く正確な値は求まりにくい。 $F=2.20$ 以上のカオスについては、今までの所、 $\tau(q)$ がはっきりせず(両対数プロットの直線性がよくない) $f(\alpha)$ は、得られていない。



図(4)



図(5)

(4) 議論

実験データから得られた $f(\alpha)$ は、アトラクタ全体から求めたものであるから、軌道の時間発展方向の 1 次元を差し引いたものと、ポアンカレ断面から得られた $f(\alpha)$ スペクトルを比較することができる。実験で得られたカオスが周期倍分岐ルートによるものならばオンセットでの普遍カーブが期待される。今回は、データ数の問題などのため明確には判断できないが、実験データと普遍カーブは比較的一致していると思われる。従って、安定な周期-4、周期-8等が観測されていないのは、実験パラメータの揺らぎによると考えられる。また、 $P=3.60\text{dB}$ での $f(\alpha)$ は、低次元カオスの発達したもの ($a=4$ のロジスティックモデル) に近い値が得られている。³⁾

励起がオンセットより少し大きい領域で 2 つの $f(\alpha)$ が存在する様に見える理由は、1 の大きい範囲はオンセットでの島の分布の痕跡を残しているためであろう。したがって、バンドがマージした $P=3.60\text{dB}$ では、オンセットの痕跡が消え、

単一の $f(\alpha)$ が得られている。

シミュレーションについてもほぼ同様な結果が得られている。しかし、今回の解析は、低次元カオス ($D_0 \leq 2$) の範囲なので、ほぼロジスティックモデルで記述される。従ってモデルと実験の明らかな差は見られない。そこで、より励起の強いパラメータ域での比較が必要であろう。また、実験では準周期からのカオスなども見つかっており、これとシミュレーションとの対比も今後の課題の1つである。

参考文献

- 1) M.Mino and H.Yamazaki: J.Phys.Soc.Jpn. 55(1986)4168.
- 2) K.Nakamura, M.Mino and H.Yamazaki: J.de Physique (to be published).
- 3) D.Katzen and I.Procaccia :Phys.Rev.Lett. 58(1987)1169.