

自己重力ポアソン方程式の数値計算

早大理工 伊藤健一郎、相澤洋二

1 モデル

エネルギー h をもつ粒子が、ポテンシャル $\phi(r)$ 内を運動するとき、十分な時間経過後、位置 r にその粒子の見出される確率 $p(r)dr$ は、

$$p(r)dr \propto \left[\int \int \int \delta(h - \frac{1}{2}v^2 - \phi(r)) dv^3 \right] dr \propto (h - \phi(r))^{1/2} dr$$

で表される。さらに、粒子のエネルギー分布関数を $\rho(h)$ とすると、球対称ポアソン方程式は以下ようになる。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} \cong n(r) = \int_{\phi(r)}^0 (h - \phi(r))^{1/2} \rho(h) dh$$

本研究では $\rho(h)$ の関数形を与えたときの方程式の解を数値的に詳しく調べた。初期条件は $r=0$ で $\phi(0) = -1.0$, $\frac{d\phi(0)}{dr} = 0.0$ とした。

2 結果

(1) $\rho(h) = (-h)^{n-\frac{3}{2}}$ の場合

このとき、(1.1) 式は Lane-Emden 方程式と等価になる。この方程式は、

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = (-\phi(r))^n$$

で表され、解の振る舞いが解析的に調べられている。それによると、 $n < 5$ のとき解は有限の半径 r で零点をもち、 $n \geq 5$ のとき $r \rightarrow \infty$ で $\phi(r) \rightarrow 0$ に漸近する。ただし $n=5$ のとき系の全質量は有限であり、 $n > 5$ では無限の質量をもつ。今回の計算でも同じ結果が得られたが、とくに $n \geq 5$ の場合の $r \gg 1$ の領域で、解がベキで近似できるかどうかを調べてみた。すると n の値が 5 に近い値では非常にベキに収束しにくく、5 よりある程度大きな値では $r \gg 1$ でベキ近似が成り立つという結果を得た。(図 1 参照) ($n=5$ の時は厳密解が存在し、 $r \gg 1$ で $\phi \sim r^{-1}$ である。)

(2) $\rho(h) = (-h)^{n-\frac{3}{2}} \cdot e^{-h}$ の場合

(1) のエネルギー分布に e^{-h} を掛け、同様に n をパラメータとして調べた。やはり $n < 5$ では有限の r で零点を持ち、 $n \geq 5$ で無限遠まで延びるような結果を得たが、厳密に $n=5$ が境界となっているかはさらに調べてみる必要がある。(1) と異なり、 $n=5$ のときでも非常にベキに収束しにくいという結果を得た。(図 2 参照) 従って、(1) との類推から、 $n=5$ より少し小さな値でベキとなる解が存在するかもしれないが、今回の計算ではそのような結果は得られなかった。

(3) $\rho(h) = (-h)^{5-\frac{3}{2}} \cdot e^{-ah}$ の場合

(2) のパラメータ n を 5 に固定し、 $\exp$ の指数 a をパラメータとして調べた。まず、 $a > 0$ としてパラメータの値を大きくしてゆくと、 a の値が大きいほど良くベキに近似できるという結果が得られた。 $a \geq 7$ での数密度 $n(r)$ の指数は -2.5 程度である。(図 3 参照)

さらに a の値を負にして計算を進めた。 a は -1 から -10 までの整数値) すると、全ての a に対して有限の半径で $\phi = 0$ となる結果が得られた。 $\rho(h)$ の項の中に $(-h)^{5-\frac{3}{2}}$ より低次の項がないにもかかわらず解が有限の r で 0 となる結果が得られたことは興味深い。ま

た、今回は $r=0$ での初期値 $\phi(0)$ の値を固定して計算したが、この値もパラメータとして扱う必要がある。今後計算を進めて定量的な結果を出してゆきたい。

参考文献

Binney and Tremaine, Galactic Dynamics(1987),princeton
K.F.Ogorodnikov,Dynamics of Stellar Systems(1965),PERGAMON PRESS

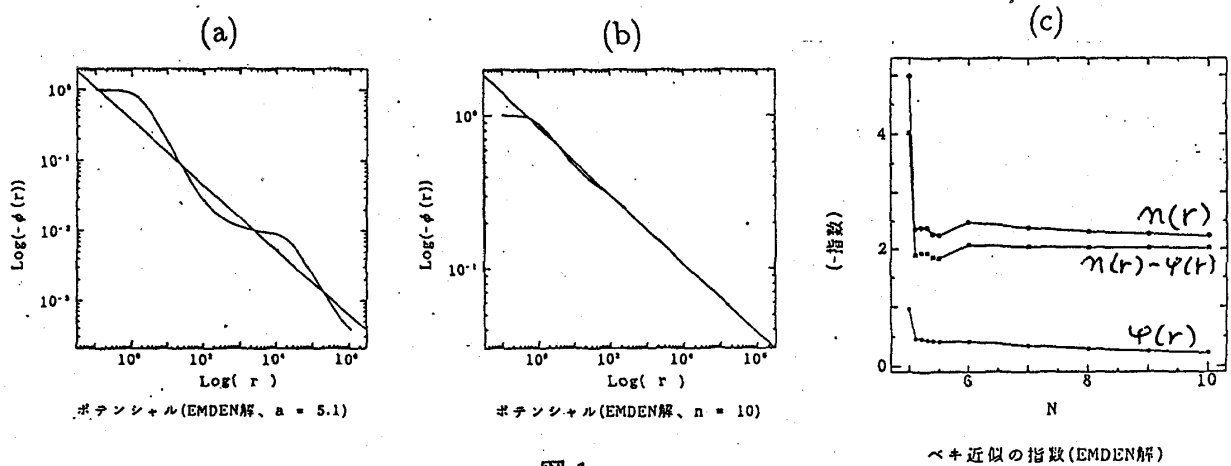


図 1

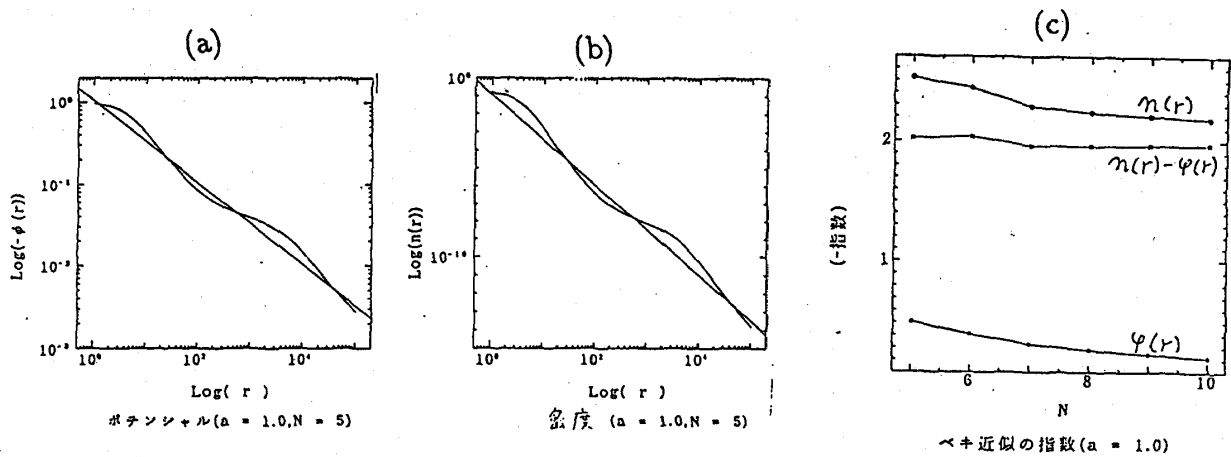


図 2

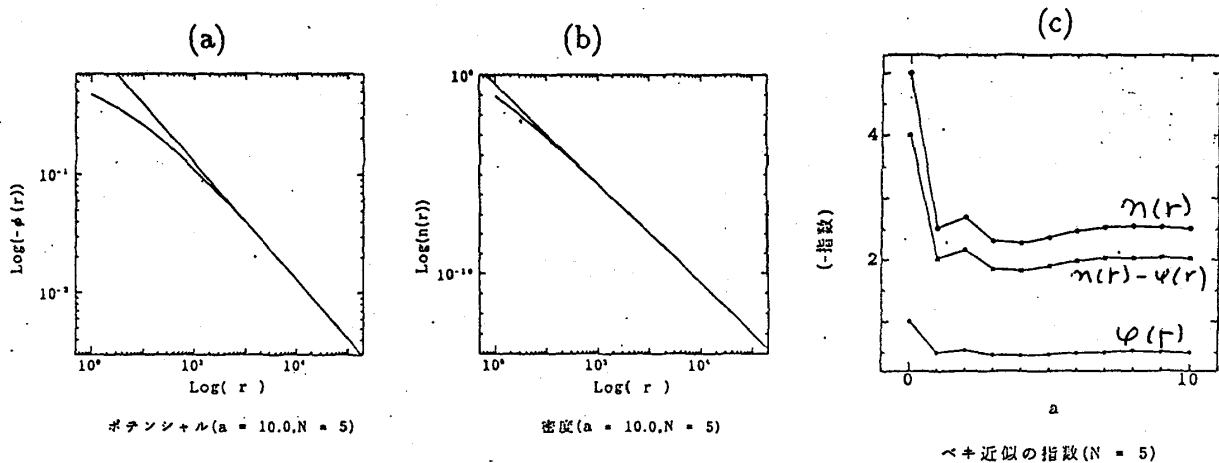


図 3