

2次元写像におけるヘテロクリニック接触の存在に対する定理とその応用

A Theorem on the Existence of Heteroclinic Tangency and Its Application

帝京技術科学大学・一般教育 山口喜博、国立天文台・水沢 谷川清隆

Y. Yamaguchi, Liberal Arts and Sciences, Teikyo Univ. of Tech.

K. Tanikawa, National Astronomical Observatory

§ 1. はじめに

一般的な2次元写像のうちヤコビアン J の存在する写像(可微分写像) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える。ここではヤコビアンの値に対して次のように制限する。

1. $J > 1$, $J < -1$, 2. $J = 1, -1$, 3. $0 < J < 1$, $-1 < J < 0$.

これはヤコビアンが領域によって正(負)から負(正)に変化したり、 $J > 1$ ($J < -1$) から $0 < J < 1$ ($-1 < J < 0$) に変化するような写像はここでは扱わない事を意味する。

$J > 0$ の写像は方向保存性を、 $J < 0$ の写像は方向逆転性を有する。これらの概念についての詳しい事は参考文献(1)にある。ここで用いる証明の方法は幾何学的であり、写像の方向保存(逆転)性ならびにJordan曲線定理が重要な役割を演ずる。Jordan曲線定理については参考文献(2)に詳しく議論されている。

サドルは、その近傍で線形解析より決まる固有値 λ_u, λ_s より次のように分類される。

$J > 0$ の場合: OP1: $\lambda_u > 1 > \lambda_s > 0$, OP2: $\lambda_u < -1 < \lambda_s < 0$.

$J < 0$ の場合: 偶数周期は $J > 0$ の場合と同じ。

奇数周期: OR1: $\lambda_u > 1, -1 < \lambda_s < 0$, OR2: $\lambda_u < -1, 0 < \lambda_s < 1$.

最後に接触に関する定義を述べる。

定義1: First Direct Homoclinic(Heteroclinic) Tangency

安定多様体と不安定多様体が直接的に接し、交差はない接触。

定義2: First Asymptotic Homoclinic(Heteroclinic) Tangency

不安定(安定)多様体が安定(不安定)多様体に漸近的に接し、交差はない接触。または不安定多様体と安定多様体がともに漸近して接し、交差はない接触。

不安定多様体と安定多様体の交差が生じた後は2次的な接触が生じるが、ここでは2次的接触は扱わない。本稿に関する詳しい内容は文献(3)を見られたい。

§ 2. ホモクリニック接触に関する定理

定理1: First Direct Homoclinic(Heteroclinic) Tangencyの接点において不安定多様体と安定多様体の方向は一致する。◆

証明: Fig. 1のようにPで接したとして矛盾を導く。方向保存でサドルがOP1の場合についてのみ証明するが、その他の場合も同じように証明できる。Oは1周期のサドルとする。Jordan曲線 Γ をOP in W_u (不安定多様体)とPO in W_s (安定多様体)で構成する。Pは写像Tで図のようにTPに写される。 W_u は連続である事よりPとTPを結ぶ曲線は Γ の W_s の部分と交わる。これは W_u と W_s が交差する事を意味し矛盾である。一般のn周期の場合についてもこの方法を拡張して

証明できる。◆

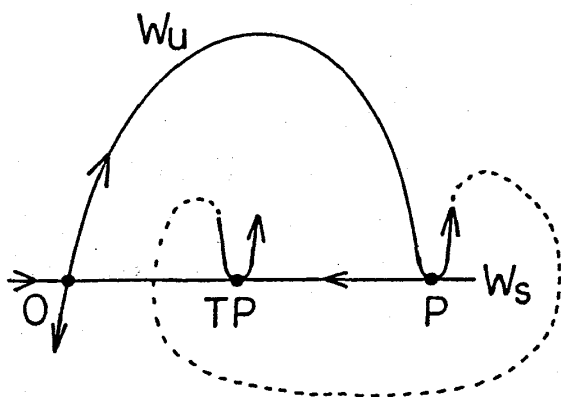


Fig. 1

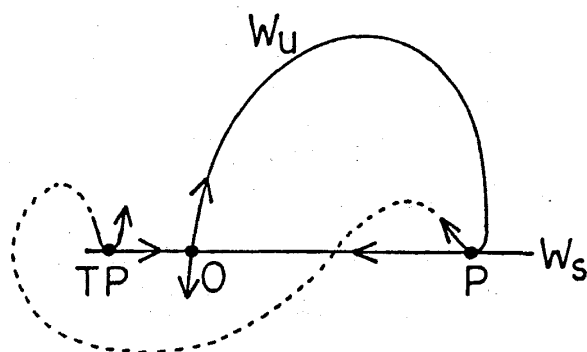


Fig. 2

定理2: First Direct Homoclinic Tangencyは、 $J \leq -1$ 、 $J \geq 1$ の系では生じない。◆

証明: 写像による面積保存、または面積の増大により自明。◆

定理3: 方向逆転の写像において、奇数周期のサドルで $0 < \lambda_u < 1$, $-1 < \lambda_s < 0$ の性質をもつ場合、First Direct Homoclinic Tangencyは生じない。◆

証明: Fig. 2でOは1周期のサドルで、 W_u と W_s がPで接しているとする。PはTによってJordan曲線 ($OP \text{ in } W_u + PO \text{ in } W_s$) の外に写される。PとTPを結ぶ曲線は Γ と交差する。よって矛盾である。一般の奇数周期についてもこの方法を拡張して証明できる。◆

§ 3. ヘテロクリニック接触に関する定理

定義3: n 周期のサドルの一つから出ている不安定多様体を W_u^n と、 m 周期のサドルの一つから出ている安定多様体を W_s^m とする。

定理4: 方向保存の写像において、不安定多様体 W_u^n と安定多様体 W_s^m の間のFirst Direct Heteroclinic Tangencyは下記の3つの場合以外に生じない。

- (1) $n = m$ で、2つのサドルはともにOP1。
- (2) $m = 2n$ で、 n 周期のサドルはOP2、 m 周期のサドルはOP1。
- (3) $n = 2m$ で、 n 周期のサドルはOP1、 m 周期のサドルはOP2。◆

証明: サドルの性質による分類と n と m の大小比較によって12の場合に分かれる。ここでは2つのケースについて紹介する。これら以外のケースについても同様に証明できる。

ケース1: W_u^n (OP1) と W_s^m (OP1) ($n < m$, または $n = m$)

Fig. 3において u_1 は n 周期のサドルの一つで、 s_1 は m 周期のサドルの一つである。 $k = \text{LCM}(n, m)$ である。Pでヘテロクリニック接触が生じたとすると、 $T^k P$ で同じブランチ間でヘテロクリニック接触が生じる。写像 T^n でPは $T^n P$ に写されるが、そこでもヘテロクリニック接触が生じる。ただし不安定多様体に接する安定多様体は s_{n+1} から出ている事に注意する。Jordan曲線 Γ は $PT^k P \text{ in } W_u^n$ と $T^k PP \text{ in } W_s^m$ とで構成される。矢印a、bは Γ の左右に分かれている事より、 $T^k P$ と $T^{k+n} P$ をむすぶ曲線は Γ と交わる。よって矛盾である。 $n = m$ の場合は $k = n$ となり、Fig. 3より矛盾を導くことができない。すなわち(1)の場合にはFirst Direct Heteroc

linic Tangencyが可能である。Fig. 3で n を $2n$ と読みかえて(2)の場合がわかり、 W_u と W_s の役割を入れ換えて(3)の場合がわかる。

ケース2: W_u^n (OP2) と W_s^n (OP2) ($n=m$)

この場合にFirst Direct Heteroclinic Tangencyが生じない事を示す。状況はFig. 4に示されている。Jordan曲線は Γ は Pu_1T^nP in W_u^n と T^nPS_1P in W_s^n で構成され、有限の面積 $A(\Gamma)$ を有する。斜線を付けた領域は $0 < J < 1$ の場合、逆写像により面積が増大しいずれ $A(\Gamma)$ を越す。点を打った領域は $J > 1$ の場合には、写像によって面積が増大し $A(\Gamma)$ を越す。保測の場合は斜線を付けた領域の逆写像による全ての領域を加えると $A(\Gamma)$ を越す。よって $J > 0$ の場合に必ず交差が生じる事が分かり矛盾が導けた。◆

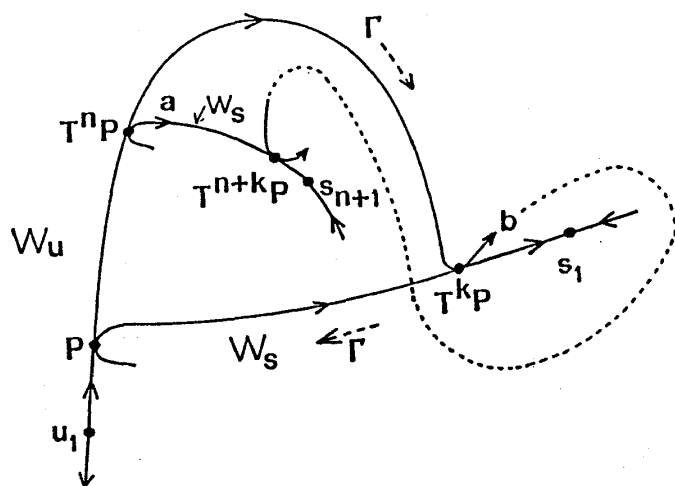


Fig. 3

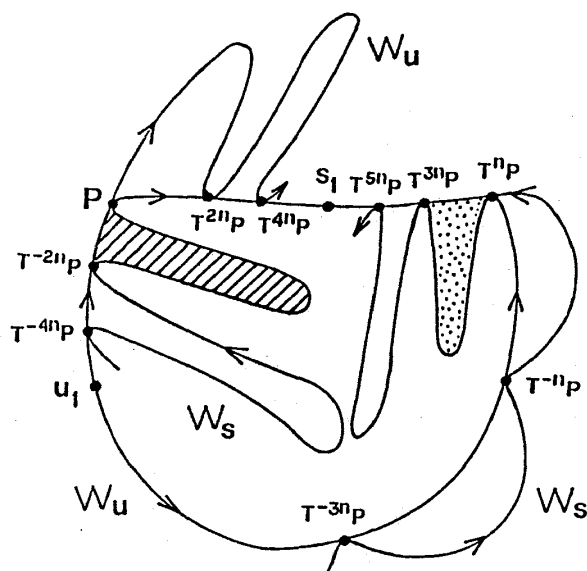


Fig. 4

方向逆転の写像については、40のケースに分かれる。しかし多くのケースが方向保存の場合に帰着できる。2、3のケースで未解決の部分があるのでここでは報告しない。

§ 4. 漸近的な接触

既に述べてきたように直接的な接触が起きない場合にはどのような接触が可能であろうか。筆者としては、漸近的な接触が生じると考えている。ここでは例を示すにとどめる。Fig. 5は漸近的なホモクリニック接触である。この場合OR1とOR2 (●印) の2つのサドルがある。図ではOR1から出た不安定多様体が直接的に安定多様体に接しているように見えるが、実際はOR2のサドルから出た不安定多様体に集積しているのである。すなわちこの接触は直接的なヘテロクリニック接触でかつ漸近的なホモクリニック接触である。

Fig. 6は原点から出たフラクタル化した不安定多様体 W_u^1 が、フラクタル化したベイスン境界(安定多様体 W_s^2)に互いに漸近接触しているシーンである。ここで安定多様体は黒または白で表されたベイスンの境界として見て欲しい。

漸近的な接触についてはまだ未解決の問題もあり今後の発展が望まれる。

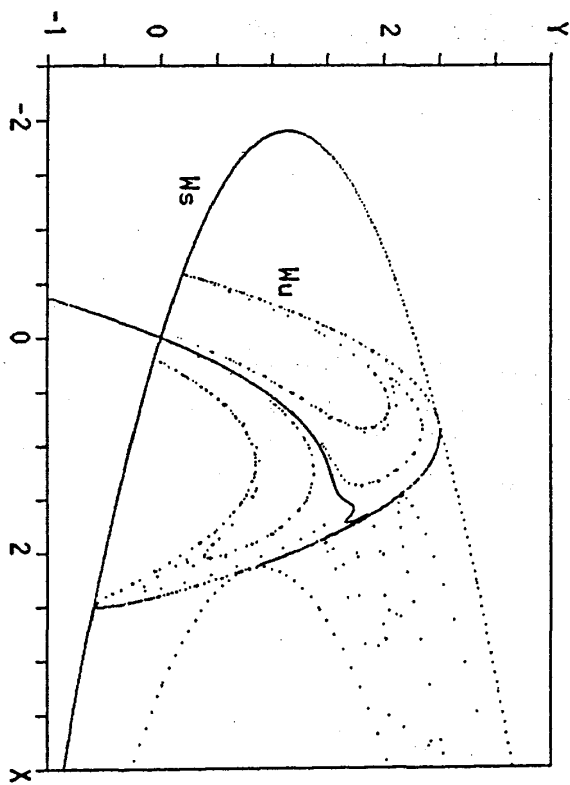


Fig. 5 $X_{n+1}=Y_n$, $a=2.042$, $J=-0.7$
 $Y_{n+1}=aY_n-Y_n^2-JX_n$

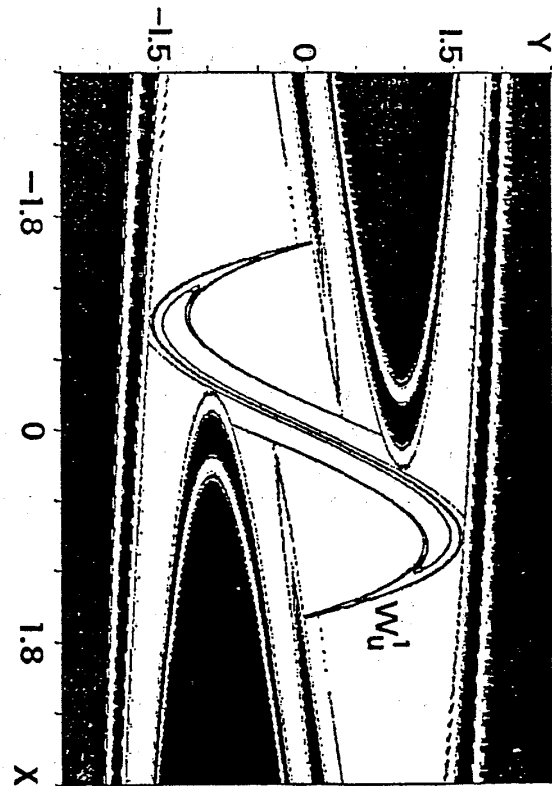


Fig. 6 $X_{n+1}=Y_n$, $a=2.7143$, $J=0.4$
 $Y_{n+1}=aY_n-Y_n^3-JX_n$

参考文献

- (1) J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields (Springer).
- (2) 小平邦彦、複素解析 (岩波講座 基礎数学、岩波書店)。
- (3) Y. Yamaguchi and K. Tanikawa (投稿中、投稿準備中)。