

On Weierstrass Models.

東大・理 中山 昇

§ 0. Introduction.

Elliptic fibration はどんな構造をしているか? curve 上では小平先生の結果 [8], [9] により完全にわかっている。2次元以上では三河井 [7], 上野 [12] により小平先生の議論の中で Basic model を作るところが拡張された。残りは log-transf. をいかに拡張するかである。ところで Basic model は section をもつ。section をもつ elliptic fibration はほとんど Weierstrass model といえる (Th 2.1)。従って Basic model も Weierstrass model によって構成される (Th 2.3)。ただしこれが三河井・上野の model と同じかどうかはまだわからない。

一方、K3 surface は deformation で移りあうが、小平先生は [4] の中で Weierstrass model になる K3 から deform できることを示している。それで 3次元で $K_X = \mathcal{O}_X$ の多様体を調べるのに、 X が Weierstrass model の形をしているものはどんなものか、そしてその deformation はどうなるかということの問題にした。すると実際はこのような X はあまりなくて (Th 3.3)、deformation しても他のものへは移らないようだ。

でも $K_X = \mathcal{O}_X$ に限らない一般の Weierstrass model の形の 3-fold では minimal model conjecture (see [4], [6]) が成り立つ (Th3.2) ということもわかったのでこれらについてもある程度分類ができるかも知れない。

§1. Elementary properties.

S を complex variety, $\mathcal{L}$ を S 上の line bundle (= invertible sheaf), $a \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{-4})$, $b \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{-6})$ を $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ となる sections とする。この $(\mathcal{L}, a, b)$ に $\bar{x} \neq \emptyset$ の Weierstrass model $W(\mathcal{L}, a, b)$ は次のように定義される。

まず $P := \mathbb{P}_S(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3)$ の tautological line bundle を $\mathcal{O}_P(1)$ として、 $p: P \rightarrow S$ を projection とするとき、標準的なうめ込み $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^3 \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$ に対応して sections $Z \in \Gamma(\mathcal{O}_P(1))$, $X \in \Gamma(\mathcal{O}_P(1) \otimes p^* \mathcal{L}^{-2})$, $Y \in \Gamma(\mathcal{O}_P(1) \otimes p^* \mathcal{L}^{-3})$ が定義される。ここで

$$W(\mathcal{L}, a, b) := \{Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\} \subseteq P \text{ と定義します。}$$

$W = W(\mathcal{L}, a, b)$ の性質。

- (1). W は complex variety で $p: W \rightarrow S$ は projective flat surj. ですべての fiber は $\mathbb{P}^2$ 内の irreducible cubic。
- (2). S が normal ならば W は normal。 S が Gorenstein ならば W は Gorenstein。そして $\omega_W = p^*(\omega_S \otimes \mathcal{L}^{-1})$ 。

(3). 3つ目への projection $\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3 \rightarrow \mathcal{L}^3$ は $p: W \rightarrow S$ の section $\sigma: S \rightarrow W$ を与える。 $\sigma(S) \subseteq W^\# := \{x \in W \text{ s.t. } p \text{ is smooth at } x\}$ で $\sigma(S)$ は W の Cartier divisor となる。この $\sigma(S)$ を $\Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ とかき、 $W(\mathcal{L}, a, b)$ の canonical section とする。

(4). $S \in \Sigma = \Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ の defining eq. として $S \in \Gamma(\mathcal{O}_W(\Sigma))$ で $\text{div}(S) = \Sigma$ となるものとする。このとき同型 $\psi: \mathcal{O}_W(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_W(3\Sigma)$ で $\psi(Z) = S^3$ となるものがあり、さらに sections $f \in \Gamma(\mathcal{O}_W(2\Sigma) \otimes \mathcal{L}^{-2})$, $g \in \Gamma(\mathcal{O}_W(3\Sigma) \otimes \mathcal{L}^{-3})$ で $\psi(X) = f \cdot S$, $\psi(Y) = g$ となるものがある。

(5). $p_* \mathcal{O}_\Sigma(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ という同型があって (4) の f, g, S を使うと、

$$p_* \mathcal{O}_W(\Sigma) = \mathcal{O}_S \cdot S$$

$$p_* \mathcal{O}_W(2\Sigma) = \mathcal{O}_S \cdot S^2 \oplus \mathcal{L}^2 f$$

$$p_* \mathcal{O}_W(3\Sigma) = \mathcal{O}_S \cdot S^3 \oplus \mathcal{L}^2 f \cdot S \oplus \mathcal{L}^3 g \quad \text{etc.}$$

と identify して、 $p_* \mathcal{O}_W(6\Sigma) \otimes \mathcal{L}^{-6}$ において

$$g^2 = f^3 + a f S^4 + b S^6 \quad \text{が成り立つ。}$$

(6). $R^1 p_* \mathcal{O}_W \simeq \mathcal{L}$, $R^i p_* \mathcal{O}_W(m\Sigma) = 0$ for $i \geq 1, m \geq 1$.

さて、 $T \subseteq W$ を Σ と別の irreducible Cartier divisor で p により $T \xrightarrow{\sim} S$ となるものとする。すると、

Lemma (1.1).

- (1). S 上の automorphism $\bar{j}: W \xrightarrow{\sim} W$ で $\bar{j}(\Sigma) = T$, $\bar{j}(T) = \Sigma$,
 $\bar{j} \circ \bar{j} = \text{id}$ になるものがある。
- (2). Translation $L(T): W \xrightarrow{\sim} W$ で smooth fiber 上は
 $x \mapsto x + T(p(x))$ ($\Sigma = 0$ として group str. を入れる)
 となるもの ~~が~~ 存在する。

これより $W^\# = \{x \in W \mid p \text{ is smooth at } x\} \longrightarrow S$ の Σ は zero
 とする S 上の group str. をもつことが示される。

Lemma (1.2). $\eta: W(\mathcal{L}, a, b) \longrightarrow W(\mathcal{L}', a', b')$ を S 上の
 isomorphism で $\eta(\Sigma(\mathcal{L}, a, b)) = \Sigma(\mathcal{L}', a', b')$ となつてい
 とする。ある nowhere vanishing section $\varepsilon \in \Gamma(S, \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}^{-1})$
 があり、 $a = a' \cdot \varepsilon^4$, $b = b' \cdot \varepsilon^6$ と書け。 η は

$(x, y, z) \longmapsto (\varepsilon x, y, \varepsilon^3 z)$ という morphism に
 なる。特に $(\mathcal{L}', a', b') = (\mathcal{L}, a, b)$ の時, $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ で
 $\varepsilon^4 = 1$ or $\varepsilon^6 = 1$ が成立し, $\varepsilon^6 \neq 1$ なる $a \equiv 0$, $\varepsilon^4 \neq 1$ なる
 $b \equiv 0$ となる。

$\varepsilon = -1$ のときの $\eta: (x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$ を $\bar{\iota}_\Sigma$ と書き
 W の Σ における involution とする。これは $W^\#$ においては
 (-1) 倍に対応する。

Cor. (1.3) $\lambda: W \rightarrow W$ を S 上の automorphism とすると、
 $p: W \rightarrow S$ の section に関する Cartier divisor T が存在し、
 λ は $L(T)$ と (1.2) の η のどちらかの composition になる。

Def. (1.4) S を complex manifold とする。このとき

$(\mathcal{L}, a, b)$ が minimal $\iff \operatorname{div}(a) \geq 4\Delta$, かつ $\operatorname{div}(b) \geq 6\Delta$ となる
 effective nonzero divisor Δ が存在しない。

と定義し、このときの $W(\mathcal{L}, a, b)$ を minimal Weierstrass model
 とする。

任意の Weierstrass model は minimal Weierstrass model から blow
 up と blow down により得られる。

§2. Elliptic fibrations.

Th (2.1). X, S : complex manifolds, $\pi: X \rightarrow S$ を
 elliptic fibration とし $\sigma: S \rightarrow X$ を π の section をもつものとする。
 このとき、 S 上の Weierstrass model (minimal とは限らない) $W(\mathcal{L}, a, b)$
 と S 上の birational morphism $\mu: X \rightarrow W(\mathcal{L}, a, b)$ と
 $\mu^* \Sigma(\mathcal{L}, a, b) = \sigma(S)$ となるものがあつた。

略証. $T = \sigma(S)$ として exact sequence

$$\begin{aligned}
 (\star_m) \quad 0 \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(m-1)T \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(m)T \xrightarrow{\phi_m} \pi_* \mathcal{O}_T(mT) \rightarrow \\
 \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(m-1)T \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(m)T \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

を見ると、まず (A_1) より、 $\pi_* \mathcal{O}_X(T) = \mathcal{O}_S$,

$$0 \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_T(T) \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(T) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

がわかる。

ここで $\dim S = 1$ のとき φ_m ($m \geq 2$) が surjective になることを

minimal fibration を使って示せる。たかある open subset

$S^1 \subset S$ で、 $S \setminus S^1$ が $\text{codim} \geq 2$ の analytic subset かつ、 φ_m ($2 \leq m \leq 6$)

が S^1 上 surj. になるのがある。このとき、 S^1 上に、

$f: \pi_* \mathcal{O}_T(2T) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(2T)$, $g: \pi_* \mathcal{O}_T(3T) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(3T)$ と
それぞれ φ_2, φ_3 の splitting になる。

$$g^2 = f^3 + a f s^4 + c s^6 \quad \text{in } \Gamma(S^1, \pi_* \mathcal{O}_X(6T) \otimes \mathcal{L}^{-6})$$

となるのが作れる。ここで $\mathcal{L} = \pi_* \mathcal{O}_T(T)$, s は T の defining eq.

a, c は $\mathcal{L}^{-4}, \mathcal{L}^{-6}$ の S^1 上のある sections.

それから、 $\pi_* \mathcal{O}_X(mT)$ が $\forall m \geq 1$ reflexive sheaf になることを

Duality と vanishing $R^i \pi_* \mathcal{O}_X = 0$ for $i \geq 2$ からわかるので、

結局 f, g, a, c は S までの $\mathcal{O}$ で、 φ_m $m \geq 2$ は surj. になる。

すると $\pi_* \mathcal{O}_X(3T) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$ で、 $\pi^* \pi_* \mathcal{O}_X(3T) \rightarrow \mathcal{O}_X(3T)$

が surjective になるから $\mu: X \rightarrow W(\mathcal{L}, a, c)$ が成り立つ。□

Cor.(2.2). S : complex manifold, $W = W(\mathcal{L}, a, c) \in S$ 上の
Weierstrass model で $\text{div}(4a^3 + 27c^2)$ red が high normal
crossing であるとする。

このとき, $(\mathcal{L}, a, b)$ minimal $\iff W$ has only rational sing.

証明

$\mu: X \rightarrow W$ を resolution of sing. $\pi := p \circ \mu: X \rightarrow S$,

$T := \mu^* \Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ とおく. T は π の section である (2.1より)

$$R^i \pi_* \mathcal{O}_X(T) \simeq R^i \pi_* \mathcal{O}_X(mT) \quad \text{for } m \geq 2, i \geq 1. \quad - \bar{f}$$

$R^i \pi_* \mathcal{O}_X$ は locally free ([11]) であるので $R^i \pi_* \mathcal{O}_X = 0$ for $i \geq 2$.

ゆえに, $R^i \pi_* \mathcal{O}_X(mT) = 0$ for $m \in \mathbb{Z}, i \geq 2$.

だから, spectral sequence

$$R^p p_* (R^q \mu_* \mathcal{O}_X(mT)) = R^p p_* (R^q \mu_* \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_W(m\Sigma)) \Rightarrow R^{p+q} \pi_* \mathcal{O}_X(mT) \quad \text{より}$$

W has only rat. sing. $\iff R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(T) = 0$.

ここで $0 \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_T(T) \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(T) \rightarrow 0$ に注目。

もし $(\mathcal{L}, a, b)$ not minimal ならば $\pi_* \mathcal{O}_T(T) \subsetneq R^1 \pi_* \mathcal{O}_X$. ゆえに

$R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(T) \neq 0$. $\dim S = 1$ のとき, $(\mathcal{L}, a, b)$ minimal

$\implies W(\mathcal{L}, a, b)$ has only rat. sing. はよく知られているので,

$\dim S \geq 2$ の場合でも, $(\mathcal{L}, a, b)$ minimal ならば

$\text{codim}(\text{Supp } R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(T)) \geq 2$. (しかし, $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X$ は invertible

sheaf である. $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(T) = 0$. ゆえに W has only rat. sing. $\square$

Remark. このとき W/S は relative minimal model. (より). K_W

rel nef. かつ W has only ~~rat~~, ~~canonical~~ canonical sing. (2.2)の

normal crossing の条件をはずすと, $(\mathcal{L}, a, b)$ minimal かつ

$W(\mathcal{L}, a, \ell)$ が rat. sing. のみにならないうものがある。(See §3).

Th (2.3) S : complex manifold, $S^0 \subset S$ Zariski open set
(かつ $S \setminus S^0$ は analytic set), $p^0: W^0 := W(\mathcal{L}_0, a_0, \ell_0) \rightarrow S^0$
を S^0 上の smooth な Weierstrass model とする。すると.

(A) minimal な $(\mathcal{L}, a, \ell)$ on S で 次の条件 (E) を満たすものがある。

(E): ある nowhere vanishing section $\varepsilon \in \Gamma(S^0, \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}^\perp)$ があって
 $a|_{S^0} = \varepsilon^4 \cdot a_0$, $\ell|_{S^0} = \varepsilon^6 \cdot \ell_0$ となる。

(B) もつ別の minimal な $(\mathcal{L}', a', \ell')$ が (E) を満たせば
ある nowhere vanishing section $e \in \Gamma(S, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\perp)$ があって
 $a = e^4 a'$, $\ell = e^6 \ell'$ となる。

証明のスケッチ ($a_0 \neq 0$ か $\ell_0 \neq 0$ の場合。 $a_0 = 0$ or $\ell_0 = 0$ は容易)。

まず $S \setminus S^0$ を normal crossing な divisor と仮定している
ことがわかるので 以下そう仮定する。すると (2.2) により (E) を
満たす $(\mathcal{L}, a, \ell)$ があると 森脇 [11] の結果から

$\mathcal{L} \simeq \text{Gr}_F^0({}^L\mathcal{H}_0)$ となる。ここで ${}^L\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}_0 = (R^1 p_* \mathcal{O}_{W^0}) \otimes \mathcal{L}_0$
の lower canonical extension。このこと. minimal ということから
(B) がすぐいえる。従って S 上局所的に $(\mathcal{L}, a, \ell)$ が作られ
れば (B) より, involution などには注意すれば, $W(\mathcal{L}, a, \ell)$ を作りあわす
ことができる。だから S をどんどん小さくしてかまわない。

→ 例. J -function: $S^0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ $x \mapsto \frac{4a_0^3(x)}{4a_0^3(x) + 27b_0^2(x)}$ は
 $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ での u の τ に対応する。

S 上の line bundle $\mathcal{N}$ と sections $a_1 \in \Gamma(S, \mathcal{N}^{\otimes 2})$,

$b_1 \in \Gamma(S, \mathcal{N}^{\otimes 3})$, nowhere vanishing section

$\zeta \in \Gamma(S^0, \mathcal{N} \otimes \mathcal{L}_0^{-2})$ があって $a_1|_{S^0} = \zeta^2 a_0$,

$b_1|_{S^0} = \zeta^3 b_0$ とする。

もし $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}^{\otimes 2}$, $\zeta = \eta^2$ for some $\mathcal{M}$ and $\eta \in \Gamma(S^0, \mathcal{L}_0^{-1} \otimes \mathcal{M})$

ならば $(\mathcal{M}, a_1, b_1)$ は $\textcircled{E}$ をみたす τ : minimal なものに

おきかえればよい。そうでないときは S を polydisk と考えてよく。

S の double covering $\tau: \tilde{F} \rightarrow S$ で $\tau^* \zeta = \eta^2$ とおけるもの

をとって $W \times_S \tilde{F}$ を involution をかきつけて $(S^0 \text{ 上 })$ 割れば S 上に

$\textcircled{E}$ をみたす Weierstrass model の存在が示せる。 $\square$

Cor (2.4). (See Lemma 10.4 of [8]).

$p: W \rightarrow S$ と $p': W' \rightarrow S$ を minimal Weierstrass models
 とし S^0 上 smooth fibration τ かつ $\varphi^0: W \times_S S^0 \rightarrow W' \times_S S^0$

という canonical section を保つ S^0 上の同型があるとする。

すると φ^0 は S 上の同型 $\varphi: W \rightarrow W'$ に対応する。

Cor (2.5). $H_0 \in S^0$ 上の V.P.H.S (variation of polarized Hodge
 str.) で rank 2, weight 1 のものとする。このとき

proper surjective morphism $f: B \rightarrow S$ である。

(1) B は S 上の minimal Weierstrass model

(2) f は S^0 上 smooth

(3) $R^1 f_* \mathbb{Z}_B|_{S^0}$ は H_0 と V.H.S. の意味で同型

となるのが unique である。

証明 小平先生の構成 [8, p. 580, (i)] により S^0 上に

smooth elliptic fibration $f^0: B^0 \rightarrow S^0$ であり f^0 は section を持つ。

$R^1 f^0_* \mathbb{Z}_{B^0} \cong H_0$ となるのがわかる。たゞ (2.3) により

$f: B \rightarrow S$ が決まる。さらに (2.3), (2.4) より uniqueness も出る。□

Remark. $\in \mathbb{C}$ $S \setminus S^0$ が normal crossing な divisor に分解されるならば

は B は rat. sing. のみ (かつ f^*) B/S は relative minimal

model になる。

さて, X, S を complex manifold, $\pi: X \rightarrow S$ を elliptic fibration とする。すると Zariski open set S^0 があって π は S^0 上 smooth になる。 $H_0 := R^1 \pi_* \mathbb{Z}_X|_{S^0}$ は locally const.

system of rank 2 であり S^0 上に V.P.H.S. を定める。ゆえに

(2.5) から H_0 に associate した minimal Weierstrass model

$f: B \rightarrow S$ が決まる。

Problem (2.6). $f: B \rightarrow S$ は 河井 [7], 上野 [2] の Basic elliptic fibration と同じか?

Problem (2.7)

$$Rf_* IC^\bullet(\mathbb{C}_B) \simeq \bigoplus_{i=0}^2 IC^\bullet(R^i f_* \mathbb{C}_{B^0}[-i]) \text{ か?}$$

とにかく, S 上の minimal Weierstrass model $\pi: S^0 \rightarrow S$ smooth なものと S^0 上の VPHS には 1 対 1 の関係があることがわかった。

以下 $f: B \rightarrow S$ について $B \cong W(\mathcal{L}, a, c)$ for some minimal $(\mathcal{L}, a, c)$ とする。

Prop (2.8). (See Th 11.2 of [8]).

$\mathcal{L}$ の exponential sequence がある。

$$0 \rightarrow f_* H_0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_S(B^\#) \rightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

ここで $j: S^0 \hookrightarrow S$, $B^\# := \{x \in B \mid f \text{ is smooth at } x\}$, $\mathcal{O}_S(B^\#)$ は $f: B^\# \rightarrow S$ の section のなす sheaf.

証明

$\Sigma \in B$ の Weierstrass model π の canonical section とする。

$B^\# \rightarrow S$ は Σ の zero とする group str. over S を持つ。

ゆえに exponential map

$$f_*(TB^\#/S \otimes \mathcal{O}_\Sigma) \rightarrow \mathcal{O}_S(B^\#) \text{ が定義され}$$

surjective になる。ここで $TB^\#/S$ は relative tangent.

ゆえに $f_*(TB^\#/S \otimes \mathcal{O}_\Sigma) \simeq \mathcal{L}$ となる。

$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_S(B^\#)$ ができた。

S^0 上の上の射の kernel は H_0 で $H_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ は

$$H_0 \hookrightarrow H_0 \otimes \mathcal{O}_{S^0} = \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathrm{Gr}_F^0(\mathcal{H}_0) = \mathcal{L}_0 \text{ による.}$$

与えられている。

もし $S \setminus S^0$ が normal crossing type divisor D ならば

[1, Lemma (1.4)] による。

$$Rj_* H_0 \cong \Omega_S^1(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}_0. \text{ ここで}$$

$\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}_0$ の lower-canonical extension. 更に

$\mathcal{L} = \mathrm{Gr}_F^0(\mathcal{H}_0)$ なるので, $j_* H_0 \rightarrow \mathcal{L}$ がわかる。

$S \setminus S^0$ が normal crossing type divisor ではないとき, 今のところ

$\mathrm{codim} 1$ で $j_* H_0 \rightarrow \mathcal{L}$ がわかる。実際 S 上でできる。

残りの $0 \rightarrow j_* H_0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_S(B^\#) \rightarrow 0$ の exactness は

S^0 上の exactness から出てくる。□

$\eta \in H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#))$ をとておく。(1.1) による, [5], [7],

[2] と同じように 1 回合わせを変えて $B^1 \rightarrow S$ という

新しい elliptic fibration が作れ, 次のことがわかる。

Prop. (2.9) $\pi: X \rightarrow S$ は elliptic fibration で

S 上 local には π の bimeromorphic section が存在するもの

とすると, $\pi: X \rightarrow S$ から作った $f: B \rightarrow S$ に対し

ある $\eta \in H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#))$ があって, X は B^1 と S 上

him. equiv. になる。

さらに exponential sequence に関することは次である。

Prop (2.10). (See Th 11.3 of [8]).

$c: H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#)) \rightarrow H^2(S, j_* H_0)$ は exponential sequence から導かれた homom. である。そして

$\theta, \eta \in H^1(S, \mathcal{O}_S(B^\#))$ に対し $c(\theta) = c(\eta)$

ならば B^θ と B^η は S 上の deformation である。

§3. Elliptic Threefold.

Th (3.1) $f: X \rightarrow S$ を projective surj. morphism.

X : canonical sing. のみ (かつ semi normal variety

S : normal variety, $\exists L \in \text{Pic}(S), \exists m > 0$ して

$\mathcal{O}_X(mK_X) = f^*L$, $\dim X = \dim S + 1$ である

とする。このときある effective $\mathbb{Q}$ -divisor Δ on S

があり、 $[\Delta] = 0$. (S, Δ) は log-terminal

$K_X =_{\mathbb{Q}} f^*(K_S + \Delta)$ である。

証明は、藤田 [2] の canonical bundle formula

から導かれる。

この § では 3 次 π の Weierstrass model の minimal model を作ることを考える。上の Th (3.1) から、高々 quotient sing. (かもしれない) S 上に $W(\mathcal{L}, a, b)$ を作れば“いい”のだが、一般には $\mathcal{L}$ は invertible sheaf でなくてはならない。次のように一般化する。

S は normal surface with only quotient sing. $\mathcal{L} \in S$ 上の reflexive sheaf of rank 1, $a \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{[4]})$, $b \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{[6]})$ を $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ on S とする sections とする。ここで $\mathcal{L}^{[R]}$ は $\mathcal{L}^{\otimes R}$ の double dual。 S を local にすると、ある $m > 0$ と nowhere vanishing section $t \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{[m]})$ があるから、これを $\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{L}^{[i]}$ に

$\mathcal{O}_S$ -alg. str. を入れて、

$$\tau: T = \text{Specan} \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{L}^{[i]} \longrightarrow S \quad \text{とおけば}$$

T は normal, τ は étale in codim 1, $(\tau^* \mathcal{L})^\wedge =: \mathcal{M}$ は invertible sheaf になる。ここで $^\wedge$ は double dual を表す。

ゆえに T 上に Weierstrass model $W_T = W(\mathcal{M}, \tau^* a, \tau^* b)$ が定義できる。ここには $\text{Gal}(T/S)$ が、 $\sigma \in \text{Gal}(T/S)$ に対し $(x, y, z, u) \mapsto (x, y, z, \sigma(u))$, $u \in T$

とこのように W_T に $t \cdot T$ compatible になるように act するので、 η として $W = W_T / \text{Gal}(T/S)$ とおくと、

W は m, t の π によるものになることを示す。

S 上ではありありあり、global に $W \xrightarrow{p} S$ が成り立つ。この W を $W(\mathcal{L}, a, b)$ と書く。 $W \xrightarrow{p} S$ の fiber はすべて 1-次元で、
 したがって、 $\mathcal{O}_W(mK_W) \cong (p^*\mathcal{O}_S(mK_S - m\mathcal{L}))^\wedge$

$$p_*\mathcal{O}_W(mK_W) \cong \mathcal{O}_S(mK_S - m\mathcal{L}) \text{ が成立。}$$

$m > 0$ で $mK_S - m\mathcal{L}$ が Cartier divisor になっているから、

$$K_W = \oplus p^*(K_S - \mathcal{L}).$$

よって W は $\mathbb{Q}$ -Gorenstein normal variety。

Th (3.2). X は 3-次元 projective manifold で elliptic fibration $X \rightarrow S$ で global bimeromorphic section を持つものが存在する。すると X は uniruled か または、 X は birationally equiv. な W で good minimal model になっているものが存在する。

証明 §2 の結果から、 X は smooth projective surface S 上の minimal Weierstrass model $W(\mathcal{L}, a, b)$ で $\text{div}(4a^3 + 27b^2)_{\text{red}}$ が normal crossing divisor になっているとしよう。ここで

$$K_W = p^*(K_S - \mathcal{L}) \text{ だった。}$$

さて今、 $p: W(\mathcal{L}, a, b) \rightarrow T$ を normal projective surface T with only quotient sing. 上 reflexive sheaf $\mathcal{L}$ の引き上げとして Weierstrass model とする。さらに、

$W_T := W(\mathcal{L}, a, \mathcal{E})$ が $\mathbb{Q}$ -canonical singularity のみ $\mathbb{Q}$ -divisor Δ によって決定される。そして (3.1) より ある effective $\mathbb{Q}$ -divisor Δ

が存在して, $-\mathcal{L} = \mathbb{Q}\Delta$, (T, Δ) log-terminal,

$$K_W = \mathbb{Q}P^*(K_T + \Delta) \quad \text{と} \quad \tau_T \text{ がある。}$$

$\mathbb{Q} \subset K_W$ が not nef ならば, $K_T + \Delta$ が not nef なるので Cone theorem ([4], [6]) により $K_T + \Delta$ に $\mathbb{Q}$ -spanned する extremal ray R と contraction $\varphi = \text{contr}_R: T \rightarrow F$ が存在する。

$\mathbb{Q} \subset \dim F \leq 1$ なる。 W 上に curve の family $\{C_\lambda\}$ を

$$0 > K_W \cdot C_\lambda, \quad \overline{\cup C_\lambda} = W \quad \text{と} \quad \tau_T \text{ があるから} \quad \tau_T \text{ である。}$$

[10] により W は uniruled.

ゆえに uniruled τ_T なる φ は birational, $(F, \varphi_*(\Delta))$ は log-terminal になる。 $(\varphi_*\mathcal{L})^\wedge = M$ とおく。

$$\text{そして } a_F := \varphi_*a \in \Gamma(F, M^{E^4})$$

$$e_F := \varphi_*e \in \Gamma(F, M^{E^0}) \quad \text{に} \quad \text{よる。}$$

$$W_F := W(M, a_F, e_F) \xrightarrow{\pi} F \quad \text{と} \quad \tau_F \text{ によって} \quad \tau_F \text{ である。}$$

明らかに W_T と W_F は birat. equiv.

この W_F が canonical sing. のみ であることを示す。

$\nu: Y \rightarrow W_F$ を resolution of sing. とする。

$$W_F: \text{canosing. のみ} \iff \nu_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) = \mathcal{O}_{W_F}(mK_{W_F}) \quad \text{for } m \gg 0.$$

$$K_{W_F} = \pi^*(K_F - M) \quad \tau_F \text{ の} \tau_F.$$

これは $\pi_* \nu_* \mathcal{O}_E(mK_Y) = \pi_* \mathcal{O}_{W_F}(mK_{W_F})$ と同値.

左辺は $\varphi_* \mathcal{O}_T(m(K_T - \mathcal{L}))$

右辺は $\mathcal{O}_F(m(K_F - M))$ と同型.

よって $(K_T - \mathcal{L}) \cdot R < 0$ である.

$\varphi_* \mathcal{O}_T(m(K_T - \mathcal{L}))$ は reflexive sheaf になる.

ゆえに W_F は cano. sing. の ∂ である.

従って、(3.1) の $W \rightarrow S$ には $\bar{\rho}$ によって W が uniruled であることが、 K_{W_T} nef である $S \rightarrow T$ によって示される.

よって $K_{W_T} = p^*(K_T + \Delta)$ であり、 $K_T + \Delta$ nef になる.

よって surface T 上の $K_T + \Delta$ は semi-ample.

ゆえに K_{W_T} は semi-ample. $\square$

Th (3.3). X : elliptic 3-fold, global section $\varepsilon \neq 0$,

$\chi(X) = 0$, $\beta_2(X) = 1$ である. X は $\mathbb{R}$ の

変換に birat. equiv.

(I) $\chi(S) = 0$ の nonsingular minimal surface S

上の Weierstrass model $W(K_S, a, b)$ 上

では a, b は constant.

(II) $\chi(S) = 1$ の nonsingular minimal ruled surface S

上の Weierstrass model $W(K_S, a, b)$.

(III) $S = \mathbb{P}^2$ or $\Sigma_r := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(r))$ $0 \leq r \leq 12$

上の Weierstrass model $W(K_S, a, b)$.

証明 (3.2) より. X は $W = W(\mathcal{L}, a, b) \rightarrow S$ と

W は good minimal model とおけるに birat. equiv.

K_W semi-ample, $\chi(W) = 0$, $pg(W) = 1$ より.

$$K_W \cong \mathcal{O}_W, \quad \text{ゆえに} \quad p_* \mathcal{O}_W(K_W) \cong \mathcal{O}_S(K_S - \mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_S.$$

$$\therefore \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_S(K_S).$$

$\mu: T \rightarrow S$ は S の minimal resolution とおける.

$$\text{よって} \quad \mu_* \mathcal{O}_T(-4K_T) = \mathcal{O}_S(-4K_S)$$

$$\mu_* \mathcal{O}_T(-6K_T) = \mathcal{O}_S(-6K_S) \text{ とおける.}$$

$$\alpha \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T(-4K_T)), \quad \beta \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T(-6K_T)) \text{ とおける.}$$

よって $W_T := W(K_T, a, b) \rightarrow T$ を考えよ.

$pg(W) = 1$ となるので W_T は 高々 cano. sing. のみで

$K_{W_T} \cong \mathcal{O}_{W_T}$ とおける. したがって S は smooth projective surface $\mathcal{L} = K_S$ としてよい.

もし S に (-1) -curve E があれば

$\nu: S \rightarrow F$ は E の contraction とおける.

F 上は Weierstrass model $W_F = W(K_F, \mu_* a, \mu_* b)$ が

できる. 全く同じ理由で W_F は 高々 cano. sing. のみで

従って (-1) -curve E を引くことにより S は relatively minimal な surface としてよい.

(I). $\kappa(S) \geq 0$ とする. $a \in \Gamma(-4K_S)$, $b \in \Gamma(-6K_S)$ に対し
 $\mathcal{O}_S(4K_S) \cong \mathcal{O}_S$ or $\mathcal{O}_S(6K_S) \cong \mathcal{O}_S$. (かつ a, b は
 constant).

(II). $\kappa(S) = -\infty$, $g(S) \geq 1$ とする. Edge sequence
 $0 \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow H^0(S, R^1p_*\mathcal{O}_W) \rightarrow$
 $R^1p_*\mathcal{O}_W \cong \mathcal{O}_S$ から $g(S) = g(W)$ がわかる.

$\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ は Albanese map とする.

すると $f: W \rightarrow S \rightarrow \text{Alb}(S)$ は W の Albanese map.

ゆえに III [3] により f は surjective. S は ruled かつ S ,
 $\text{Alb}(S)$ は elliptic curve. ゆえに $g(S) = g(W) = 1$.

(III). のりでは $S \cong \mathbb{P}^2$ or Σ_r .

とすか $r \geq 13$ とすると $(-4K_S)_{\text{fix}} \geq 4\Delta$, $(-6K_S)_{\text{fix}} \geq 6\Delta$
 , Δ は $\Delta^2 = -r$ とする $\Delta \cong \mathbb{P}^1$, T ので,

$W(K_S, a, b)$ は minimal にたどり着く. かつ rat. sing.

のみで T は r 個の $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{P}^2$ への写像. ゆえに $r \leq 12$. $\square$

(I)(II)(III) のそれぞれの場合を調べる

(I): $\mathcal{O}_S(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ ならば $W \cong E \times S$ over S

つまり $E = \{Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3\}$ なる elliptic
 curve.

その他の τ は étale cover $\tau: T \rightarrow S$ $\tau^*\mathcal{O}_T(K_T) = \mathcal{O}_T$
 となる τ があるから W は $E \times T$ の quotient として書ける.

ここで τ の $\text{Gal}(\bar{Y}/Y)$ の action は (1.2) の τ と一致する。

(II): $\text{Alb}(S) = C$ とおく。 11 又 [5, Th 8.3] に おける

ある étale covering $\tau: \tilde{C} \rightarrow C$ がある。

$W \times_C \tilde{C} \xrightarrow{\sim} F \times \tilde{C}$ over $\tilde{C}$ とおく。 F は $W \rightarrow C$ の fiber.

$\tilde{W} := W \times_C \tilde{C}$, $\tilde{S} := S \times_C \tilde{C}$, $\hat{\Sigma} := \Sigma \times_C \tilde{C}$, Σ は

$W \rightarrow S$ の canonical ~~map~~ section とおく。

ここで $\hat{\Sigma} \subseteq \tilde{W} \simeq F \times \tilde{C} \rightarrow F$ を考えよう。

$0 = \chi(F) > \chi(\hat{\Sigma}) = \chi(\Sigma) = \chi(S) = -\infty$ である。

この image Γ は F に -3Δ (らしい) である。

$\hat{\Sigma} \subseteq \tilde{W} = F \times \tilde{C}$ は $\Gamma \times \tilde{C} \subseteq \tilde{W}$ である。

ゆえに Γ は curve τ' $\hat{\Sigma} \cong \Gamma \times \tilde{C}$ over $\tilde{C}$.

$\tilde{S} \cong \hat{\Sigma}$ である $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$.

改めて $\tilde{W} \rightarrow \tilde{S} \cong \mathbb{P}^1 \times \tilde{C}$ である。

$K_{\tilde{S}} = \text{pr}_1^*(K_{\mathbb{P}^1})$ である。 $\mathbb{P}^1$ 上の Weierstrass model

$W_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ がある。

$W_{\mathbb{P}^1} \times_{\tilde{C}} \cong \tilde{W} \rightarrow \tilde{S} \cong \mathbb{P}^1 \times \tilde{C}$

$\downarrow \square \downarrow$

$W_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$

とある。

ゆえに $W_{\mathbb{P}^1} \cong F$ は K3 surface.

(III) $S = \sum_{i=3}^{12} \Delta$ $3 \leq i \leq 12$ とする。このとき

$| -4K_S |_{\text{fix}} \geq 2\Delta$, $| -6K_S |_{\text{fix}} \geq 2\Delta$

ここで Δ は $\Delta^2 = -r$ かつ $\Delta \cong \mathbb{P}^1$.

ゆえに $\exists$ $a \in \Gamma(-4K)$, $b \in \Gamma(-6K)$ により $W(K_S, a, b)$ は nonsingular になる。

(c) reduced linear systems

$|4K_S|_{\text{red}}$ と $|6K_S|_{\text{red}}$ は base pt free となる。
(Rの Lemma 5') general な a, b に対して $W(K_S, a, b)$ は高々 rational Gor. sing. しかたない。

Lemma (3.4).

$P: W = W(L, a, b) \rightarrow S$ $\in$ smooth surface 上の Weierstrass model とする。もし各点 $x \in S$ に $\tilde{x}$ に対し $\text{mult}_x a \leq 3$ or $\text{mult}_x b \leq 5$ が成り立つならば、

W has only rational Gor. sing.

証明は, rat. sing. a deformation of rat. sing. であることからある。

$S = \mathbb{P}^2$ or Σ_r $0 \leq r \leq 2$ により、

$|4K_S|$ が base pt free となる。

general な $a \in \Gamma(-4K)$, $b \in \Gamma(-6K)$ に対し、

$W(K_S, a, b)$ は nonsingular になる。(これは Δ とき

$\text{disc}(4a^3 + 27b^2)_{\text{red}}$ は normal crossing となる

からある。

これは $\text{disc}(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ かつ normal crossings であるとき、 τ 上の (a, b) には $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ の $W(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, a, b)$ が 高々 rat. sing. のみに τ になるか?

$p: W = W(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, a, b) \longrightarrow S$ は smooth surface 上の minimal Weierstrass model である。

そして $x \in S$ において $\text{mult}_x a \geq 4, \text{mult}_x b \geq 6$ である。 $\mu: T \longrightarrow S$ は x の blow up である。

$$\mu^* a = a^* e^4, \quad \mu^* b = b^* e^6, \quad \text{ここで } e \text{ は}$$

$\mu^{-1}(x) = E$ の defining eq. τ

$$a^* \in \Gamma(\mu^* \mathcal{O}^*(4) \otimes \mathcal{O}(-4E)), \quad b^* \in \Gamma(\mu^* \mathcal{O}^*(6) \otimes \mathcal{O}(-6E))$$

と表わす。

Lemma (3.5) $W(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, a, b)$ has only rational sing.

$\iff W(\mu^* \mathcal{O}^*(E), a^*, b^*)$ has only rational sing.

特に、(3.4), (3.5) により、もし a, b が与えられたら $W(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, a, b)$ が 高々 rat. sing. かどうか check することはできる。

特に $\text{mult}_x a \geq 8, \text{mult}_x b \geq 12$ ならば x においては $W(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, a, b)$ は rat. sing. のみになる。

Example $S = \mathbb{P}^2, \Gamma(S, \mathcal{O}(-3)) \ni \alpha, \beta$ は

$\text{disc}(\alpha), \text{disc}(\beta)$ が transversal に交わる smooth cubic

curves と τ 3 8 5 に τ 3 0.

τ 3 8 5. $\text{mult}_x(\alpha^4) \geq 4$ か $\text{mult}_x(\beta^6) \geq 6$ τ 3 8 5 $\times$ は

$\text{div}(\alpha) \cap \text{div}(\beta)$ の 9 点,

τ 3 8 5 $\tau: T \rightarrow S$ $\times$ この 9 点 $\times$ center した blow up と τ 3 8 5,

$\in (\alpha, \beta)$ が general τ 3 8 5 3 8 5. $W(K_T, \alpha'^4, \beta'^6)$ は nonsingular

に τ 3 8 5 0. τ 3 8 5 $\tau^* \alpha = \alpha' \cdot e$, $\tau^* \beta = \beta' \cdot e$, e は τ の

exceptional divisors の def. eg. τ 3 8 5 3 8 5 $W(S, \alpha^4, \beta^6)$ $\times$

高々 rat. Gor sing. の $\times$ 0. τ 3 8 5 T は (α', β') に τ 3 8 5 elliptic

surface $T \rightarrow \mathbb{P}^1$ に τ 3 8 5 0. τ 3 8 5 $W(K_T, \alpha'^4, \beta'^6) \rightarrow T \rightarrow \mathbb{P}^1$

は (elliptic curve) $\times$ (elliptic curve) $\times$ general fiber と τ 3 8 5

fiber space に τ 3 8 5 0.

Example. $S = \mathbb{P}^2$, $\Gamma(S, \mathcal{O}(-6)) \ni u$ $\times$ $\text{div}(u)$ が

smooth に τ 3 8 5 0 の $\times$ τ 3 8 5 0. τ 3 8 5 $W = W(K_S, u^2, u^3)$

$\times$ τ 3 8 5 0. τ 3 8 5 $(3, 4)$ $\times$ 0. W は 高々 rat. sing. の $\times$ 0.

τ 3 8 5 $\lambda: V \rightarrow S$ $\times$ $u \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S(-K_S)^{\otimes 2})$ が

高々 double covering と τ 3 8 5 0 V は K3 surface τ 3 8 5,

$W \times_S V$ は $E \times V$ と birationally equiv. に τ 3 8 5 0.

τ 3 8 5 $E = \{y^2z = x^3 + xz^2 + z^3\}$ τ 3 8 5 curve.

τ 3 8 5 $\text{Var}(W/S) = 0$

Th (3.6). $S = \mathbb{P}^2$ or Σ_r $0 \leq r \leq 2$ 上の smooth
 な Weierstrass model $W = W(K_S, a, b)$ は simply
 connected τ : $\chi_{\text{top}}(W) = -60 \cdot C^2(S)$,
 $\rho(W) = \rho(S) + 1$ とある。

$S = \mathbb{P}^2$ τ : あり。 $h^{1,0} = h^{2,0} = 0$ τ :

$$h^{1,1} = \rho = 2, \quad h^{2,1} = h^1(W, T_W) = 272.$$

- $\bar{U} := \{(a, b) \in \Gamma(S, 4K) \times \Gamma(S, -6K)\} / \text{GL}(3, \mathbb{C})$
 の次元が 272.

(かつ U 上の family $\{W(K_S, a, b), [a, b] \in U\}$ がある。

各点で Kodaira-Spencer map が injective になるから、
 結局 U が Kuranishi space になる。特に W の
 small deformation は $\mathbb{P}^2$ 上の Weierstrass model になる。

それから、 $\Sigma \subset W$ $\in$ canonical section とすると、それ以外
 には $W \rightarrow S = \mathbb{P}^2$ の section はなく、(かつ $\Sigma \in$ 1 点に
 ついて contraction $W \rightarrow V$ があがる。この V は $\rho(V) = 1$

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \cup & & \cup \\ \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

τ : g τ : rat. Gor. sing. はない。それ以外の W, V 以外に、

W $\in$ birat. equiv. には minimal model が存在しないことが
 わかる。

References.

1. H. Esnault, E. Viehweg, Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, preprint.
2. T. Fujita, Zariski decomposition and canonical rings of elliptic threefolds, preprint.
3. Y. Kawamata, Characterization of abelian varieties, *Compositio Math.*, 43 (1981) 253-276.
4. ———, The cone of curves of algebraic varieties, *Ann. of Math.*, 119 (1984) 603-633.
5. ———, Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic varieties, preprint.
6. Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, preprint.
7. S. Kawai, Elliptic fibre spaces over compact surfaces, *Commen. Math. Univ. St. Paul.*, 15 (1967) 119-138.
8. K. Kodaira, On compact analytic surfaces II-III, *Ann. of Math.*, 77 (1963) 563-626, *ibid.* 78 (1963) 1-40.
9. ———, On the structure of compact complex analytic surface I, *Amer. J. Math.*, 86 (1964) 751-798.

10. Y. Miyaoka, S. Mori, A numerical criterion of uniruledness, preprint.
11. A. Moriwaki, Torsion freeness of higher direct images of canonical bundle, preprint.
12. K. Ueno, Classification of algebraic varieties I, *Compositio Math.*, 27 (1973) 277-342.