

## 方形に対する偏差分方程式

## を解くための直接法

広大理 新谷尚義

## § 1. まえがき

偏微分方程式を差分近似してえられる偏差分方程式の解法には、反復法と直接法とがある。通常、反復法が使われ、記憶容量の関係などの理由から、直接法は余り使われていない。G. E. Forsythe と W. R. Wasow [1] が述べているように、低次の逆行列を求める問題に帰着できる場合と、逆行列を一定の手順に仕掛けて発生することができるときに直接法は実用になる。したがって、直接法が使えるのは、特殊な形の領域に対する特殊な問題の場合に限定されるであらう。

ここでは、領域を直交座標軸に平行な辺をもつ方形に限って、直接法について考察をする。

## § 2. 準備

$\alpha$  が実数であるとき, 差分方程式

$$(2.1) \quad y_{r+1} - \alpha y_r + y_{r-1} = 0 \quad (r=0, 1, \dots)$$

の初期条件  $y_{-1}=0, y_0=1$  をみたす解を  $U_r(\alpha)$ , 初期条件  $y_{-1}=1, y_0=\alpha/2$  をみたす解を  $V_r(\alpha)$  とする.

(補題 1)

$$U_r(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sinh(r+1)\omega}{\sinh \omega}, & 2 \cosh \omega = \alpha \quad (\alpha \geq 2) \\ \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta}, & 2 \cos \theta = \alpha \quad (|\alpha| < 2) \\ \frac{(-1)^r \sinh(r+1)\omega}{\sinh \omega}, & 2 \cosh \omega = |\alpha| \quad (\alpha \leq -2) \end{cases}$$

$$V_r(\alpha) = \begin{cases} \cosh(r+1)\omega, & 2 \cosh \omega = \alpha \quad (\alpha \geq 2) \\ \cos(r+1)\theta, & 2 \cos \theta = \alpha \quad (|\alpha| < 2) \\ (-1)^{r+1} \cosh(r+1)\omega, & 2 \cosh \omega = \alpha \quad (\alpha \leq -2) \end{cases}$$

と表わされる. (2.1) の一般解は

$$y_r = c_1 U_{r-1}(\alpha) + c_2 V_{r-1}(\alpha)$$

により与えられる. したがって,  $c_1, c_2$  は任意定数である.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_k = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_k = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad V_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_k^J = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_k^J = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を  $k \times k$  ( $k \geq 3$ ) の行列とする.

$p, q, \alpha, \beta$  を実数とし,

$$L(k; p, q; \alpha, \beta) = J_k + p U_k + q U_k^J + \alpha V_k + \beta V_k^J$$

$$= \begin{bmatrix} p, 1+\alpha & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1+\beta, q \end{bmatrix}$$

と置く。 仮し,

$$(2.2) \quad 1+\alpha > 0, \quad 1+\beta > 0$$

とする。

(補題 2) 条件 (2.2) のもとで,  $L$  の固有値はすべて実で相異なり, つぎの方程式の根である。

$$F_k(x) = U_k(x) - (p+q)U_{k-1}(x) + (pq-\alpha-\beta)U_{k-2}(x) \\ + (p\beta+q\alpha)U_{k-3}(x) + \alpha\beta U_{k-4}(x) = 0$$

$\lambda$  を  $L$  の固有値とし,

$$x_j = U_{j-1}(\lambda) - p U_{j-2}(\lambda) - \alpha U_{j-3}(\lambda) \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

とすると,  $x$  は  $\lambda$  に対応する固有ベクトルである。

系 1  $\lambda_j$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) を  $F_k(\lambda) = 0$  の根とし,

$$G(k; p, q; \alpha, \beta) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

$$R(k; p, q; \alpha, \beta) = (r_{ij}) \quad , \quad r_{ij} = c_j \tilde{r}_{ij}$$

$$\tilde{r}_{ij} = U_{i-1}(\lambda_j) - p U_{i-2}(\lambda_j) - \alpha U_{i-3}(\lambda_j)$$

$$c_j = 1 / \left( \sum_{i=2}^{k-1} \tilde{r}_{ij}^2 + \tilde{r}_{ij}^2 / (1+\alpha) + \tilde{r}_{kj}^2 / (1+\beta) \right)^{1/2}$$

$$D(k; \alpha, \beta) = \text{diag}(1/(1+\alpha), 1, \dots, 1, 1/(1+\beta))$$

とおく,

$$L(k; p, q; \alpha, \beta) = R(k; p, q; \alpha, \beta) G(k; p, q; \alpha, \beta) R(k; p, q; \alpha, \beta)^{-1}$$

$$R(k; p, q; \alpha, \beta)^{-1} = R(k; p, q; \alpha, \beta)^T D(k; \alpha, \beta)$$

である.

系 2  $aI_k - L(k; p, q; \alpha, \beta)$  が正則ならば,

$$(aI_k - L(k; p, q; \alpha, \beta))^{-1} = R(aI_k - G)^{-1} R^{-1}$$

である.

$p, q, \alpha, \beta$  が特殊な値をとる場合には,  $G$  と  $R$  をあらかじめ与えることができる.

$$L_1(k) = L(k; 0, 0; 0, 0), \quad L_2(k) = L(k; 1, 1; 0, 0)$$

$$L_3(k) = L(k; 1, 0; 0, 0), \quad L_4(k) = L(k; 0, 0; 1, 1)$$

$$L_5(k) = L(k; 0, 0; 1, 0), \quad L_6(k) = L_1(k) + Z_k$$

$$G_i(k) = \text{diag}(2 \cos \theta_{i,1}, \dots, 2 \cos \theta_{i,k}) \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

とおく.  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ,

$$\theta_{1,j} = \frac{j\pi}{k+1}, \quad \theta_{2,j} = \frac{(j-1)\pi}{k}, \quad \theta_{3,j} = \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \quad \theta_{4,j} = \frac{(j-1)\pi}{k-1}$$

$$\theta_{5,j} = \frac{(2j-1)\pi}{2k}, \quad \theta_{6,j} = \frac{2(j-1)\pi}{k}$$

である. さらに

$$R_1(k) = (\sin i \theta_{1,j}), \quad R_2(k) = (\sin \frac{(2j-1)}{2} \theta_{2,j})$$

$$R_3(k) = (\sin (k+1-i) \theta_{3,j}), \quad R_4(k) = (\cos (i-1) \theta_{4,j})$$

$$R_5(k) = (\cos(i-1)\theta_{ij}), \quad R_6(k) = (r_{ij})$$

$$r_{01} = 1/\sqrt{2}, \quad r_{ij} = \cos(i-1)\theta_{ij} \quad (2 \leq j \leq l-1)$$

$$r_{i,l} = \delta \cos(i-1)\theta_{i,l}, \quad r_{ij} = \sin(i-1)\theta_{ij} \quad (l+1 \leq j \leq k)$$

と置く。 以下

$$l = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \quad \delta = \begin{cases} 1 & (k: \text{odd}) \\ 1/\sqrt{2} & (k: \text{even}) \end{cases}$$

である。 このとき、つぎの結果がえられる。

系 3  $L_i(k) = R_i(k) G_i(k) R_i(k)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$

が成り立つ。  $R_i(k)^{-1}$  はつぎのように表わされる。

$$R_1(k)^{-1} = \frac{2}{k+1} R_1(k), \quad R_2(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_2(k)^T$$

$$R_3(k)^{-1} = \frac{4}{2k+1} R_3(k)^T, \quad R_4(k)^{-1} = \frac{2}{k-1} R_4(k)^T D_1$$

$$R_5(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_5(k)^T D_2, \quad R_6(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_6(k)^T$$

以下、

$$D_1 = \text{diag}(1/2, 1, \dots, 1, 1/2), \quad D_2 = \text{diag}(1/2, 1, \dots, 1)$$

である。

$$L_7(k; p, \xi) = L(k; p, \xi; 0, 0), \quad L_8(k; p, \xi) = L(k; p, \xi; 1, 1)$$

$$L_9(k; p) = L(k; p, 0, 0, 0), \quad L_{10}(k; p) = L(k; p, 0; 1, 0)$$

と置く。  $G_i(k; p, \xi), R_i(k; p, \xi) \quad (i=7, 8), G_j(k; p), R_j(k; p)$

( $j=9, 10$ ) も同様に定義する。

(補題 3) 条件 (2.2) のもとで,  $aI_k - L(k; p, \beta; \alpha, \beta)$  が正則であるとする. このとき

$$(aI_k - L(k; p, \beta; \alpha, \beta))^{-1} = (r_{ij})$$

と表わされる. したがって,

$$r_{i1} = \Delta^{-1}(U_{k-i} - \beta U_{k-i-1} - \beta U_{k-i-2})$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \Delta^{-1}(U_{i-1} - pU_{i-2} - \alpha U_{i-3})(U_{k-j} - \beta U_{k-j-1} - \beta U_{k-j-2}) & (j \geq i) \\ \Delta^{-1}(U_{k-i} - \beta U_{k-i-1} - \beta U_{k-i-2})(U_{j-1} - pU_{j-2} - \alpha U_{j-3}) & (j < i) \end{cases}$$

( $2 \leq j \leq k-1$ )

$$r_{ik} = \Delta^{-1}(U_{i-1} - pU_{i-2} - \alpha U_{i-3})$$

$$\Delta = F_k(\alpha), \quad U_j = U_j(\alpha) \quad (j = -2, -1, \dots)$$

である.

(補題 4)  $W$  を  $k \times k$  の正則行列とし,  $p, \beta$  を定数とする.  $W - pU_k - \beta U_k^T$  が正則ならば

$$(W - pU_k - \beta U_k^T)^{-1} = W^{-1} + W^{-1}ZW^{-1}$$

と表わされる. ここで

$$Z = \begin{bmatrix} p\Delta^{-1}(1 - \beta W_{kk}), 0, \dots, 0, \beta\Delta^{-1}w_{1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta\Delta^{-1}w_{k1}, 0, \dots, 0, \beta\Delta^{-1}(1 - pw_{11}) \end{bmatrix}$$

$$W^{-1} = (w_{ij}), \quad \Delta = (1 - pw_{11})(1 - \beta w_{kk}) - \beta\gamma w_{1k}w_{k1}$$

である.

$A$  が  $m \times m$  の行列,  $B$  が  $n \times n$  の行列であるとき,  $m \times m \times n$  の行列  $A \otimes B$  を

$$A \otimes B = (a_{ij} B)$$

により定義する.

今後, 記号を簡単にするために,  $A_k, A_j(k), A_j(k; p, \xi)$  を  $k=n$  のとき単に  $A, A_j, A_j(p, \xi)$  と書き,  $k=m$  のとき  $A_m, \hat{A}_j, \hat{A}_j(p, \xi)$  と書くことにする. また,

$$S = I_m \otimes R, \quad P = \hat{R} \otimes I$$

と置く.

(補題 5)  $W$  を  $m \times m$  の正則行列,  $p, \xi$  を定数とし,

$W - (pU_m + \xi U_m^T) \otimes I$  が正則であるとする. このとき

$$\{W - (pU_m + \xi U_m^T) \otimes I\}^{-1} = W^{-1} + W^{-1} Z W^{-1}$$

である. 且  $n-1$

$$Z = \begin{bmatrix} p\Delta_1^{-1}, 0, \dots, 0, p\xi(I - pW_{11})^{-1}W_{1m}\Delta_m^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p\xi(I - \xi W_{mm})^{-1}W_{m1}\Delta_1^{-1}, 0, \dots, 0, \xi\Delta_m^{-1} \end{bmatrix}$$

$$W^{-1} = (W_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\Delta_1 = (I - pW_{11}) - p\xi(I - \xi W_{mm})^{-1}W_{m1}$$

$$\Delta_m = (I - \xi W_{mm}) - p\xi(I - pW_{11})^{-1}W_{1m}$$

であり,  $W_{ij}$  は  $n \times n$  の行列である.

$\gamma, \delta$  を実数とし

$$M(k; p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) = \gamma(K_k + pU_k + \alpha V_k) + \gamma\delta^2(K_k^T + \beta U_k^T + \alpha V_k^T)$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma p, \gamma\delta^2 + \gamma\alpha & & & \\ \gamma, & 0 & & \gamma\delta^2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \gamma, 0, \gamma\delta^2 & \\ & & & \gamma + \gamma\delta^2 p, \gamma\delta^2 \beta \end{bmatrix}$$

とおく.  $k \geq 1$

$$(2.3) \quad \gamma \neq 0, \quad \delta > 0, \quad \delta \neq 1$$

とする.

$$(\text{補題 6}) \quad E_k = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{k-1})$$

とおくと,

$$M(k; p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) = E_k^{-1} \gamma \delta L(k; p\delta^{-1}, \beta\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2) E_k$$

である.

この補題により,  $M$  の標準形を求める問題は

$L(k; p\delta^{-1}, \beta\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2)$  の標準形を求める問題に帰着される.

$$L_{11}(k; \delta) = L(k; \delta^{-1}, \delta; 0, 0), \quad L_{12}(k; \delta) = L(k; 0, 0; \delta^{-2}, \delta^2)$$

$$G_{11}(k; \delta) = \text{diag}\left(2\cos\frac{\pi}{k}, \dots, 2\cos\frac{(k-1)\pi}{k}, \delta + \delta^{-1}\right)$$

$$G_{12}(k; \delta) = \text{diag}\left(2\cos\frac{\pi}{k-1}, \dots, 2\cos\frac{(k-2)\pi}{k-1}, \delta + \delta^{-1}, -(\delta + \delta^{-1})\right)$$

$$R_{11}(k; \delta) = (\gamma_{ij}), \quad R_{12}(k; \delta) = (\beta_{ij})$$

とおく.  $k \geq 1$



$$Y_j = \sqrt{\frac{2}{k}} \left( \delta \sin \frac{j\pi}{k} - \sin \frac{(j-1)\pi}{k} \right) / (1 + \delta^2 - 2\delta \cos \frac{j\pi}{k})$$

$$Y_{j,k} = \sqrt{(1-\delta^2)/(1-\delta^{2k})} \delta^{j-1} \quad (1 \leq j \leq k-1)$$

$$\Delta_j = \left( \delta \sin \frac{j\pi}{k-1} - \delta^{-1} \sin \frac{(j-2)\pi}{k-1} \right) / \left\{ \left( \frac{k-1}{2} - \sin^2 \frac{j\pi}{k-1} \right) (\delta - \delta^{-1})^2 + (\delta + \delta^{-1})^2 \sin^2 \frac{j\pi}{k-1} \right\}^{1/2} \quad (1 \leq j \leq k-2)$$

$$\Delta_{j,k-1} = \sqrt{(1-\delta^2)/2(\delta^2 - \delta^{2k})} \delta^{j-1}$$

$$\Delta_{j,k} = \sqrt{(1-\delta^2)/2(\delta^2 - \delta^{2k})} (-\delta)^{j-1}$$

である。 すると,

$$L_j(k; \delta) = R_j(k; \delta) G_j(k; \delta) R_j(k; \delta)^{-1} \quad (j=11, 12)$$

$$R_{11}(k; \delta)^{-1} = R_{11}(k; \delta)^T, \quad R_{12}(k; \delta)^{-1} = R_{12}(k; \delta)^T D_3$$

$$D_3 = \text{diag}(\delta^2/(1+\delta^2), 1, \dots, 1, 1/(1+\delta^2))$$

である。

$$L_{13}(k; p, q; \delta) = L(k; p\delta^{-1}, q\delta; \delta, 0)$$

$$L_{14}(k; p, q; \delta) = L(k; p\delta^{-1}, q\delta, \delta^{-2}, \delta^2)$$

とある。 同様にして  $G_j(k; p, q; \delta)$ ,  $R_j(k; p, q; \delta)$  ( $j=13, 14$ ) を定義する。

$$aI_k - M(k; p, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$= E_k^{-1}(\gamma\delta) [(\gamma\delta)^{-1} aI_k - L(k; p\delta^{-1}, q\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2)] E_k$$

であるから、補題3.4より、 $(aI_k - M)^{-1}$  は求めさることもできる。

### §3. 2階の橋内型方程式

#### 3.1 解法

方形上の2階の橋内型方程式を近似的に解く問題は、つぎの形の偏差分方程式を解く問題に帰着されることとなる。

$$(3.1) \quad Mx = \begin{bmatrix} A_1 & -C_1 & & & \\ -B_2 & A_2 & -C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -B_{m-1} & A_{m-1} & -C_{m-1} \\ & & & -B_m & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{bmatrix} = f$$

$A_i, B_i, C_i$  は  $n \times n$  の行列である。  $B_1 = C_m = 0$  であると考えたことにする。 つぎの3つの場合について考えよう。

1°  $M$  がブロック対角行列に相似である場合。

$$(3.2) \quad M = E \operatorname{diag}(D_1, D_2, \dots, D_m) E^{-1}$$

と表わされるときは、

$$M^{-1} = E \operatorname{diag}(D_1^{-1}, D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1}) E^{-1}$$

であるから、 $n \times n$  の行列  $D_i^{-1}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) を求める問題に帰着される。

2°  $M$  が  $M = W + N$  と分解され、 $W^{-1}$  が容易に求められる場合。 (1)式は

$$(3.3) \quad (I + W^{-1}N)x = W^{-1}f$$

と書き直される。 (3)式を解くことが低次の方程式と解く問題に帰着されるとき、この分解は有効である。

3° Mの主小行列

$$M_i = \begin{bmatrix} A_1, -C_1 \\ -B_2, A_2, -C_2 \\ \vdots \vdots \vdots \\ -B_i, A_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

がすべて正則である場合.

MはLU分解され,

$M=LU$  と書ける. 以下.

$$L = \begin{bmatrix} I & & 0 \\ -B_2 P_1^{-1} & I & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & -B_m P_{m-1}^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} P_1, -C_1 & 0 \\ & P_2, -C_2 \\ & 0 & \ddots & -C_{m-1} \\ & & & P_m \end{bmatrix}$$

$$P_1 = A_1$$

$$P_k = A_k - B_k P_{k-1}^{-1} C_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

である. このとき,

$$Ux = L^{-1}f = g, \quad x = U^{-1}g$$

であるから,

$$g_1 = f_1, \quad g_k = f_k + B_k P_{k-1}^{-1} g_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

$$x_m = P_m^{-1} g_m, \quad x_k = P_k^{-1} (g_k + C_k x_{k+1}) \quad (k=m-1, \dots, 1)$$

により,  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が求められる.

特殊な場合として,  $A_k, B_k, C_k$  が同一の相似変換で対角化できる場合, すなわち

$$A_k = F \hat{A}_k F^{-1}, \quad B_k = F \hat{B}_k F^{-1}, \quad C_k = F \hat{C}_k F^{-1} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

であるような行列  $F$  と対角行列  $\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k$  が存在する場合  
には, この方法は簡単に使える.

$$(3.4) \quad M = (I_n \otimes F) \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & -\tilde{C}_1 & 0 \\ -\tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & \\ 0 & \ddots & -\tilde{B}_m, \tilde{A}_m \end{bmatrix} (I_m \otimes F)^{-1}$$

であるから,  $z_i = F^{-1}x_i$ ,  $\tilde{f}_i = F^{-1}f_i$  とおくと, (1)式は

$$Mz = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & -\tilde{C}_1 & 0 \\ -\tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & \\ 0 & \ddots & -\tilde{B}_m, \tilde{A}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_m \end{bmatrix} = \tilde{f}$$

と書き直される.  $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k, \tilde{C}_k$  が対角行列であるから,  $P_k, P_k^{-1}$  は容易に求められる.

とくに

$$\tilde{A}_i = A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (a_i > 0) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\tilde{B}_i = B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (b_i > 0) \quad (i=2, 3, \dots, m)$$

$$\tilde{C}_i = C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (c_i > 0) \quad (i=1, 2, \dots, m-1)$$

である場合に, この系統の数値的安定性について調べよう.

$$[\text{定理}] \quad a_i \geq \max(2\sqrt{b_i c_i}, 2b_i c_i, 2b_i, 2c_i, b_i + c_i, 1 + b_i c_i)$$

ならば, 前進過程 ( $i=1, 2, \dots, m$ )

$$g_k = \tilde{f}_k + B P_{k-1}^{-1} g_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

と, 後進過程

$$z_k = P_k^{-1} C z_{k+1} + P_k^{-1} g_k \quad (k=m, m-1, \dots, 1)$$

と数値的に安定である.

### 3.2 例

以下の例では,  $x$  軸と  $y$  軸に平行な辺を  $l > 0$  長方形  $R$  の上

この偏微分方程式を考慮することにする。  $R$  の上および  $\Gamma$  の  
水平側をそれぞれ  $UH, LH$  と記し、右および左の垂直側を  
それぞれ  $RV, LV$  と記す。  $h, h_1$  をそれぞれ  $x, y$  方向への  
mesh-size とし、

$$\sigma = h/h_1, \quad b = \sigma^2, \quad a = 2(1+b)$$

とおく。未知関数  $u$  の値  $u_j = u(x_j, y_j)$  はつぎのようにな  
る。  $\mathcal{U}^T = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n}) \quad (i=1, 2, \dots, m)$

ラプラス演算子  $\Delta$  は 5 点公式で近似する。

### 3.2.1 例 1

$$-\Delta u + \lambda u = f(x, y) \quad (\lambda \geq 0 \text{ 定数})$$

にうつり考える。このとき

$$M = I_m \otimes A - B \otimes I, \quad A = (a + \lambda h^2)I - bC$$

となる。ここで  $B$  は  $m \times m$  の行列、 $A, C$  は  $n \times n$  の行列で  
ある。  $C$  は  $LH, UH$  上の境界条件によつてつぎのようにな  
る。

- (a)  $u$  の値が  $LH, UH$  上で与えられる場合。  $C = L_1$
- (b)  $u$  の値が  $y$  方向に周期的である場合。  $C = L_2$
- (c)  $u$  の値が  $UH$  上で与えられる、 $u_y$  の値が  $LH$  上で与えられる  
場合。

(i)  $u_y(x, y)$  を前進差分  $(u(x, y+h_1) - u(x, y))/h_1$  または  
後進差分  $(u(x, y) - u(x, y-h_1))/h_1$  で近似したとき。  $C = L_3$

(ii)  $u_y(x, y)$  を中心差分  $(u(x, y+h_1) - u(x, y-h_1))/2h_1$ ,  $z = h_1/h_2$

とすると,  $C = L_5$

(d)  $u_y$  の値が LH, UH 上で与えられるところの場合

(i) の場合  $C = L_2$ , (iii) の場合  $C = L_4$

(e)  $u_y + \sigma_1 u$  の値が LH 上で,  $u_y + \sigma_2 u$  の値が UH 上で与えられるところの場合. ( $\sigma_1, \sigma_2$  は定数)

(i) の場合  $C = L_7(p, q)$ ,  $p = 1+h_1\sigma_1$ ,  $q = 1+h_1\sigma_2$

(iii) の場合  $C = L_8(p, q)$ ,  $p = 2h_1\sigma_1$ ,  $q = 2h_1\sigma_2$

(f)  $u$  の値が UH 上で与えられる,  $u_y + \sigma_1 u$  の値が LH 上で与えられるところの場合

(i) の場合  $C = L_9(p)$ ,  $p = 1+h_1\sigma_1$

(iii) の場合  $C = L_{10}(p)$ ,  $p = 2h_1\sigma_1$

UH, LH,  $u_y$ ,  $L_i$ ,  $C$ ,  $p, q, \gamma, \sigma_1, \sigma_2$  をそれぞれ  $RV, LV, u_x, \hat{L}_i, B, \gamma, \lambda, \sigma_3, \sigma_4$  で置きかえると, 同様に  $B$  が定められる. すると

$$M_j = I_m \otimes \{(a + \lambda h^2)I - hL_i\} - \hat{L}_j \otimes I \quad (i, j = 1, 2, \dots, 10)$$

がえられる.

$$M_j = (I_m \otimes R)[I_m \otimes (a + \lambda h^2)I - hL_i - \hat{L}_j \otimes I](I_m \otimes R)^{-1}$$

であるから,  $j=6$  の場合を除いて (4) 式の形をとりうる.

また,

$$M_j = (I_n \otimes R_j)(\hat{R}_j \otimes I) \Lambda_j (\hat{R}_j \otimes I)^{-1} (I_n \otimes R_j)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= I_n \otimes \{ (a + \lambda h^2) I - b G_j \} - \hat{G}_j \otimes I \\ &= \text{diag}(\Lambda_j^{(1)}, \Lambda_j^{(2)}, \dots, \Lambda_j^{(n)}) \end{aligned}$$

$$\Lambda_j^{(k)} = \text{diag}(\lambda_{j1}^{(k)}, \lambda_{j2}^{(k)}, \dots, \lambda_{jn}^{(k)})$$

$$\lambda_{jk}^{(k)} = (a + \lambda h^2) - b \lambda_{jk} - \mu_{jk}$$

である. 2.2.1

$$G_j = \text{diag}(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_{nj}), \quad \hat{G}_j = \text{diag}(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \dots, \mu_{nj})$$

である. 2.2.2

$$\lambda_{jk}^{(k)} = \lambda h^2 + 4b \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{jk} + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{jk} \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

である.

$M_j$  が正則ならば, 逆行列は

$$M_j^{-1} = (I_n \otimes R_j)(\hat{R}_j \otimes I) \Lambda_j^{-1} (\hat{R}_j \otimes I)^{-1} (I_n \otimes R_j)^{-1}$$

より 2.2.3 である. 2.2.3

$$M_{0j} = M_{0j} - (\gamma U_n + \lambda U_n^J) \otimes I, \quad M_{1j} = M_{0j} - (\gamma U_n + \lambda U_n^J) \otimes I$$

$$M_{0j} = M_{0j} - \gamma U_n \otimes I, \quad M_{1j} = M_{0j} - \gamma U_n \otimes I$$

であるから,  $M_{0j}^{-1}, M_{1j}^{-1}, M_{0j}^{-1}, M_{1j}^{-1}$  はそれぞれ  $M_{0j}^{-1}, M_{0j}^{-1}, M_{0j}^{-1}, M_{0j}^{-1}$

から, 補題 5 より, 2.2.4 であることとわかる.

$$M_j = I_n \otimes \{ (a + \lambda h^2) I - b L_c(p, z) \} - \hat{L}_j \otimes I$$

$$= (\hat{R}_j \otimes I) \Omega_j (\hat{R}_j \otimes I)^{-1} \quad (i=7, 8, 9, 10; j=1, 4, 5)$$

$$\Omega_j = I_n \otimes \{ (a + \lambda h^2) I - b L_c(p, z) \} - \hat{G}_j \otimes I$$

$$= \text{diag}(\Omega_j^{(1)}, \Omega_j^{(2)}, \dots, \Omega_j^{(n)})$$

$$\Omega_j^{(k)} = (a + \lambda h^2 - \mu_j) I - h L_c(p, \delta)$$

であるから, 補題 3.4.5, 2  $\Omega_j^{-1}$  は求められる. (したがって,  
 $M_{j,1}^{-1}, M_{j,2}^{-1}, M_{j,3}^{-1}$  ( $j=1, 2, 3, \dots, m$ ) は  $L_c(p, \delta)$  の固有値を求めた  
 ともえらる.

### 3.2.2 例 2

$$-\Delta u + d u_x + e u_y + g u = f(x, y)$$

に  $\gamma, \delta$  を加えよう.

$$d = d(x), \quad e = \text{定数}, \quad g = g(x)$$

であるとする.  $h$  は

$$\gamma = (1 - \frac{h}{2}e) > 0, \quad \gamma\delta^2 = (1 + \frac{h}{2}e) > 0 \quad (\delta > 0)$$

となるように小さく選ぶ. すると,

$$A_1 = (a + h^2 g_1 - \gamma(1 + \frac{h}{2}d_1)) I - M(p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$$

$$A_i = (a + h^2 g_i) I - M(p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) \quad (i=2, 3, \dots, m-1)$$

$$A_m = ((a + h^2 g_m) - \delta(1 - \frac{h}{2}d_m)) I - M(p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$$

$$C_1 = (1 - \frac{h}{2}d_1 + w(1 + \frac{h}{2}d_1)) I$$

$$C_i = (1 - \frac{h}{2}d_i) I, \quad B_i = (1 + \frac{h}{2}d_i) I \quad (i=2, 3, \dots, m-1)$$

$$B_m = (1 + \frac{h}{2}d_m + z(1 - \frac{h}{2}d_m)) I$$

となる.  $p, \delta, \alpha, \beta$  は UH, LH の上の境界条件  $u, v, w, z$  の I  
 うになる.

$$(a) \text{ の場合} \quad p = \delta = \alpha = \beta = 0$$

$$(c) (i) \text{ の場合} \quad p = 1, \delta = 0, \alpha = \beta = 0$$



(c) (ii) の場合  $p=0, \beta=0, \alpha=1, \beta=0$

(d) (i) の場合  $p=\beta=1, \alpha=\beta=0$

(d) (ii) "  $p=\beta=0, \alpha=\beta=1$

(e) (i) の場合  $p=1+h_1\sigma_1, \beta=1+h_1\sigma_2, \alpha=\beta=0$

(e) (ii) "  $p=2h_1\sigma_1, \beta=2h_1\sigma_2, \alpha=\beta=1$

(f) (i) の場合  $p=1+h_1\sigma_1, \beta=0, \alpha=\beta=0$

(f) (ii) "  $p=2h_1\sigma_1, \beta=0, \alpha=1, \beta=0$

LH, UH,  $U_3, p, \beta, \alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2, h_1$  をそれぞれ LV, RV,  $U_2, \gamma, \delta, w, z, \sigma_3, \sigma_4, h_2$  で置きかえると  $\gamma, \delta, w, z$  の値が同様に定められる。いずれの場合も補題 6 の (5) と A. に対応して置換することからわかる。

$$d = \text{定数}, e = e(y), g = g(y)$$

の場合も、 $x$  と  $y$  の役割りを入れかえることにより同様に扱える。

$$d = \text{定数}, e = \text{定数}, g = \text{定数}$$

の場合を以下に示す。

$$\mu = (1 + \frac{p}{2}d) > 0, \mu p^2 = (1 - \frac{p}{2}d) > 0 \quad (p > 0)$$

となるように  $h$  を選ぶ。

$$F = \text{diag}(1, p, p^2, \dots, p^{m-1})$$

と置く。すると

$$M = I_n \otimes (a + h^2 g) I - M(p, \beta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) = \hat{M}(\gamma, \delta; w, z; \mu, p) \otimes I$$

となる.

$$M = (I_n \otimes E)^{-1} (F \otimes I)^{-1} \Omega (F \otimes I) (I_n \otimes E)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & I_n \otimes \{ (\alpha + \beta j) I - \gamma \delta L(p \delta^*, q \delta^*; x \delta^*, y \delta^*) \} - \\ & - \mu p \hat{L}(\gamma p^*, \lambda q; w p^*, z p^*) \otimes I \end{aligned}$$

であるから, (4) 式の形をなすことが出来る.

#### §4. 4階の橋田型方程式

方形に対する4階の橋田型方程式を近似的に解く問題は, つぎの形の方程式を解く問題に帰着されることが多い.

$$(4.1) \quad N x = \begin{bmatrix} A_1, -C_1, E_1 & & & \\ -B_2, A_2, -C_2, E_2 & \bigcirc & & \\ D_3, -B_3, A_3, -C_3, E_3 & & \ddots & \\ & \bigcirc & D_{n-1}, -B_{n-1}, A_{n-1}, -C_{n-1} & E_{n-1} \\ & & & D_n, -B_n, A_n \end{bmatrix} x = f$$

$N$  の主小行列がすべて正則である場合には,  $N$  はつぎのように  $LU$  分解される.

$$L = \begin{bmatrix} I & & & \\ -L_2, I & \bigcirc & & \\ M_3 & & \ddots & \\ 0 & M_n, -L_n, I \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} P_1, -U_1, E_1 & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_m \end{bmatrix}$$

ただし

$$M_i = D_i P_{i-1}^{-1}$$

$$L_i = (B_i - M_i U_{i-1}) P_{i-1}^{-1}$$

$$U_i = C_i - L_i E_{i-1}$$

$$P_i = A_i - L_i U_{i-1} - M_i E_{i-2} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

である。  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  が同一の相似変換で対角化できる場合には、この方法は容易に使える。

$$(例) \quad \Delta \Delta u + 2\alpha \Delta u + \beta u = f(x, y) \quad (\alpha, \beta: \text{定数})$$

について考えよう。  $u$  の値は境界上で与えられつつある。

$$A = (\alpha^2 + 2h^2 + 2 + 2\alpha h^2 + \beta h^4)I - 2(\alpha + \alpha h^2)hJ + h^2(J^2 - 2I)$$

$$B = (\alpha + \alpha h^2)I - hJ$$

とおく。

(i)  $LV, RV$  上で  $u_{xx}$ ,  $LH, UH$  上で  $u_{yy}$  の値が与えられつつある場合

$$N_1 = I_m \otimes A - 2J_m \otimes B + (J_m^2 - 2I_m) \otimes I$$

となる。

$$N_1 = S [ I_m \otimes \{ (2 + (\beta - \alpha^2)h^4)I + \{ (\alpha + \alpha h^2)I - hG_1 \}^2 \} + J_m \otimes 2\{ (\alpha + \alpha h^2)I - hG_1 \} + (J_m^2 - 2I_m) \otimes I ] S^{-1}$$

であるから、 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  は対角化できる。 また、

$$N_1 = S \Lambda S^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= I_m \otimes \{ (\beta - \alpha^2)h^4 I + \{ I_m \otimes ((\alpha + \alpha h^2)I - hG_1) - \hat{G}_1 \otimes I \}^2 \} \\ &= \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m) \end{aligned}$$

$$\Lambda_k = (\beta - \alpha^2)h^4 I + \{ (\alpha + \alpha h^2)I - hG_1 - 2 \cos \frac{2k\pi}{m+1} I \}^2$$

$$\Lambda_k = \text{diag}(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})$$

$$\lambda_{ki} = (\beta - \alpha^2)h^4 + \left\{ \alpha h^2 + 4\ell \sin^2 \frac{i\pi}{2(n+1)} + 4\ell \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)} \right\}^2$$

である。

(ii)  $UH, LH$  上に  $v^T u_{jj}$ ,  $LV, RV$  上に  $v^T u_n$  の値が与えられる場合  $u_n$  を中心差分で近似すると

$$N_2 = N_1 + 2(U_m + U_m^J) \otimes I$$

となる。この場合も  $A, B, C$  は対角化できる。また,

$$N_2 = S[PAP^{-1} + 2(U_m + U_m^J) \otimes I]S^{-1}$$

であるから、補題5により  $N_2^{-1}$  を求めることもできる。

(iii)  $UH, LH$  上に  $v^T u_j$ ,  $LV, RV$  上に  $v^T u_n$  の値が与えられる場合、

$$N_3 = N_4 + 2(U_m + U_m^J) \otimes I$$

となる。ただし,

$$N_4 = I_m \otimes (A + 2\ell^2(U + U^J)) - 2J_n \otimes B + (J_m^2 - 2I_m) \otimes I$$

である。

$$N_4 = P\Omega P^{-1}$$

$$\Omega = I_m \otimes \{A - 2I + 2\ell^2(U + U^J)\} - 2\hat{G}_1 \otimes B + \hat{G}_1^2 \otimes I$$

$$= \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m)$$

$$\Omega_k = \left\{ (2\ell + \alpha h^2 + 4\ell \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)})I - \ell J \right\}^2 +$$

$$+ (\beta - \alpha^2)h^4 I + 2\ell(U + U^J)$$

である。 $\Omega_k^{-1}$  は補題4により  $L, U$  の解として求められるから、 $N_4^{-1}$  は容易に求められる。  $N_3^{-1}$  は補題5

に示すように示すことができる。

#### References

- [1] Forsythe, G.E. and W.R. Wasow : Finite difference methods for partial differential equations, John Wiley & Sons (1960).
- [2] Keast, P. and A.R. Mitchell : On the instability of the Crank Nicholson formula under derivative boundary conditions, Computer J. 9(1966), 110 - 114 .
- [3] Nemchinov, S.V. : The solution of boundary problems for partial differential equations of the second order of the elliptic type using the network method, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 2(1962), 418 - 436 .
- [4] Polozhii, G.N. : The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics, Pergamon (1965).
- [5] Sarzin, E.N. : Application of the straight line method to the solution of boundary value problem for some non-self-adjoint two-dimensional elliptic equations of the second order, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 5(1965), 945 - 949.
- [6] Schechter, S. : Quasi-tridiagonal matrices and type-insensitive difference equations, *Quart. Appl. Math.*, 18(1960-1961), 258 - 295.

