

$\dim(B(z) - B(s))$ について

統計数理研究所 長坂建二

§0. STEINHAUS の問題

H. STEINHAUS はその著書の中で、当時未解決としていたいくつかの興味ある問題を提示した。その中の一つにある意味での自然数の独立性に関する問題がある。それは x と s を二つの与えられた自然数とする時に、ある実数 $\omega \in [0, 1] = I_0$ が x 進法で展開した時に正規数ならば s 進法に対して果して正規数かどうか？

というものである。議論を容易にする為に、いくつかの記号や定義を導入しよう。断わり名の限り $\omega, \omega_0, \dots$ 等は単位区間 I_0 に含まれる実数とする。 x と s は上記のように与えられた二つの自然数である。 $\omega \in I_0$ は有理数を除いて、 x 進法又は s 進法で一意的に展開することができる。

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(\omega)}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k(\omega)}{s^k} \quad (0, 1)$$

ω が有理数の場合には、例えばある項以降 0 を続ける方の展開を採用することによれば、 $(0, 1)$ の展開と ω とが、丁度 $1:1$ に対応する。そこで我々はこの展開項に注目する。

以降の定義は、特に断わらない限り $\mathcal{R}$ 、又は $\mathcal{R} = \{0, 1, \dots, r-1\}$ を $\mathcal{S}$ 、又は $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, s-1\}$ に置き換えれば全く同様なので、 r 進法について定義を与えることにする。 ω の展開項 $x_1(\omega), x_2(\omega), \dots$ は $\mathcal{R}$ の値を取り、 ω が変れば $x_1(\omega), x_2(\omega), \dots$ 等も様々な変化をする筈であるが我々が注目するのは、展開項中の $\mathcal{R}$ の元の分布である。

そこで $j \in \mathcal{R}$ とし ω の展開項中に j の出現する回数を数え上げる関数を

$$N_n(\omega; j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i(\omega) = j}} 1 \quad (0, 2)$$

と定義し、この関数を用いて以下に定義を与えよう。

定義 $\omega \in I$ 。が r 進単純正規数である ($\omega \in A(r)$)

とは、任意の $j \in \mathcal{R}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\omega; j) / n = 1/r \quad (0, 3)$$

が成立することである。

例之ば $1/3 = .010101 \dots$ (2進法) は2進単純正規数だが, 明らかに, 3進単純正規ではないし, 10進単純正規数でもない。この単純正規数の概念では十分に展開項の分布の様子を表わしているとは言えない為, (0.2) の数え上げる関数を以下のように拡張する。

$\Delta = (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \mathcal{R}^p$ の元として,

$$N_n(\omega; \Delta) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i(\omega) = j_1 \\ x_{i+1}(\omega) = j_2 \\ \vdots \\ x_{i+p-1}(\omega) = j_p}} 1 \quad (0.4)$$

と定めると,

定義 $\omega \in I_0$ が k 進正規数である ($\omega \in \mathcal{B}(k)$) とは
任意の $p \geq 1$, 任意の $\Delta \in \mathcal{R}^p$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\omega; \Delta) / n = 1/k^p \quad (0.5)$$

が成立することである。

ここで殆んど全ての (ルベーグ測度の意味で) $\omega \in I_0$ は k 進正規数だから, $\mathcal{B}(k) \cap \mathcal{B}(k)$ のルベーグ測度も勿論1になる。(k と k が何であれ。)

定義 全ての進法に関して正規数を絶対正規数と呼び、その全体を B と書くことにする。 i.e. $B = \bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)$.

前頁に注意したことは、ルベーグ測度の基本的性質から、殆んど全ての $\omega \in I_0$ は、絶対正規数である。しかしながら個々の ω については、事情は別であり、次節でこの問題に対する解決を述べ、第2節では標題に掲げた $\dim(B(n) - B(n))$ を計算する。第3節はそれ以外の補遺に当るものにするであろう。

§1. INDEPENDENT RESOLUTION BY CASSELS AND BY SCHMIDT.

前節で提示された、一つの STEINHAUS の問題は、J.W.S. CASSELS と W.M. SCHMIDT により独立に解答が与えられた。今回のシンポジウムの MAIN GUEST である SCHMIDT 教授は、WIEN 大学で教育を受け、HLAWKA 教授の古い弟子である。この問題に彼が取り組んだのも、HLAWKA 教授の影響かとも想像されるが、当時既に MONTANA 大学教授の職にあるので、真相はわからない。しかし講演後本人からも、"COINCIDENCE

BY CHANCE"とあり、たように、全く独立に与えられ、出版された年こそ一年遅いが、完全な解答を与えた点では SCHMIDT の論文は価値が高いものである。ともあれ二人の解決に入る前に正規数の定義から直ちにわかることを述べよう。

正規数である為の同値の定義はいくつか知られていて、E. BOREL によるものは、前節に挙げたものと、今一つ、

$$\omega \in B(r) \Leftrightarrow \omega, r\omega, r^2\omega, \dots \quad (1, 1)$$

が全て $\in A(r), A(r^2), \dots$

この同値性は NIVEN & ZUCKERMAN により証明され、更に Pillai により

$$\Leftrightarrow \omega \in A(r), A(r^2), \dots \quad (1, 2)$$

により強い結果に与った。

この Pillai の結果から k を 2 以上の任意の自然数として

$$\omega \in B(r) \Rightarrow \omega \in B(r^k) \quad (1, 3)$$

$$\text{i.e. } B(r) \subset B(r^k)$$

一方 $\omega \in B(r)$ である必要条件の一つとして、 $r\omega, r^2\omega, \dots$ の小数部分が $\text{mod } 1$ で一様分布することが知られている。

そこで、 $\omega \in B(r^k)$ を一つ取ると、 $r^k\omega, r^{2k}\omega, r^{3k}\omega, \dots$ は $\text{mod } 1$ で一様分布する。だから $\{r^{nk+j}\omega\}_{n=1,2,\dots}^j, j=1, \dots, k-1$ に対して $\text{mod } 1$ で一様分布する。だから $\{r^n\omega\}_{n=1,2,\dots}$ は k 個の一様分布する部分列を並べたものだから、矢張り一

様分布する。つまり $\omega \in B(\tau)$. 以上より, k を 2 以上の自然数として

$$B(\tau) = B(\tau^k) \quad (1, 4)$$

(1, 4) からこの STEINHAUS の問題に対する予想を立てることが出来る。つまり勝手に与えられた二つの自然数 τ と δ に対し $B(\tau) = B(\delta)$ とするのには, 適当な二つの自然数 m, n が存在して $\tau^m = \delta^n$ とする, 言い換えると

$$\log \tau^m / \log \delta^n \in \mathbb{Q}$$

このような m, n が存在する時には $\tau \sim \delta$ と書くことにする。(1, 4) から $\tau \sim \delta \Rightarrow B(\tau) = B(\delta)$ である。

τ と δ との間によつてこのような自然数 m, n が存在しない時に $\tau \not\sim \delta$ と書くことにする。SCHMIDT の定理は次のようである。

定理 (W. M. SCHMIDT)

- A. $\tau \sim \delta$ ならば, $B(\tau) = B(\delta)$ である。
- B. $\tau \not\sim \delta$ ならば, τ 進正規 τ^n が δ 進正規でない (δ 進単純正規ですらない) 数全体の集合は, 連続濃度を持つ。

A. の部分に対しては, 今簡単に証明を与えたが, B. の方の証明はまう人とすれば長くなるので, CASSELS が示した $\tau=3$ $\delta=2$ の IDEA のみを以下に記すことにする。

明らかに, $2 \nmid 3$ である。2進法で展開された数 ω をそのまま3進法で見ると (CANTOR SET の元である。), 3進正規ではない。(3進単純正規でもない。) と 3 が殆んど全ての ω に対して $2\omega, 2^2\omega, 2^3\omega, \dots$ は一様分布するから, 2進正規数の定義に戻れば, 定理の B は証明を終る。

そこで次に考えたのは, 2 進正規でも 3 進正規でもない集合の薄さである。少なくとも連続濃度あるが, ルベーグ測度では零集合としても, ているこの集合 $(B(2) - B(3))$ ($2 \nmid 3$) の薄さを計るのに, ハウスドルフ次元を用いた。ハウスドルフ次元の定義や基本的性質, 及び計算法とその応用については, 例えば京都大学数理解析研究所講究 No. 294 "整数論" に詳しく書いたのので, ここでは述べないが, その中の BEYER の結果を用いて次節で $\dim(B(2) - B(3)) = 1$ if $2 \nmid 3$ を示す。

§2. $\dim(B(2) - B(3)) = 1$ if $2 \nmid 3$.

この集合 $B(2) - B(3)$ ($2 \nmid 3$) のハウスドルフ次元を計算するのに, $B(2) - B(3) \neq \emptyset$ という SCHMIDT の結果から, 元 $\omega_0 \in B(2) - B(3)$ を取ることができる。我々は定理の証

明に入る前に次の LEMMA を示そう。

LEMMA $\omega \in B(r)$ とすると殆んど全ての $y \in I_0$ に対して, (ω, y) は 2 次元ベクトルとして 2 進正規である。

ここで (ω, y) が 2 次元正規として 2 進正規であるとは,
 $(r\omega, ry), (r^2\omega, r^2y), \dots, (r^n\omega, r^ny), \dots$
 の小数部分が I_0^2 上で一様分布することと定義しておく。

$$S_{k,l}(N, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i(kr^n\omega + lr^ny)} \quad (2,1)$$

と定義すると, 上の lemma を証明する為には, $(0,0)$ 以外の任意の整数の組 (k,l) に対して

$$S_{k,l}(N, y) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (2,2)$$

を示せばよい。

$l=0$ の場合 (2,1) は y に無関係となるから, $\omega \in B(r)$ より (2,2) が成立することは明らかである。

$l \neq 0$ としよう。この時 (2,2) を殆んど全ての y に対して直接証明するかわりに,

$$I_{k,l}(N) = \int_0^1 |S_{k,l}(N, y)|^2 dy \quad (2,3)$$

と定義し,
$$\sum_{N=1}^{\infty} I_{k,l}(N)/N < \infty \quad (2,4)$$

を示せば良い。実際

$$\begin{aligned} I_{k,l}(N) &= \int_0^1 |S_{k,l}(N, y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{N^2} \int_0^1 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N e^{2\pi i [k(z^n - z^m)\omega + l(z^n - z^m)y]} dy \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \int_0^1 e^{2\pi i p x} dx = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 0 & p \neq 0 \text{ } p \text{ 整数} \end{cases}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N^2} \int_0^1 \sum_{n=1}^N e^{2\pi i [k(z^n - z^n)\omega + l(z^n - z^n)y]} dy \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

$$\sum I_{k,l}(N)/N = \sum 1/N^2 < \infty.$$

これで LEMMA の証明は終、だが、この LEMMA は y を任意のベクトル $\in I_0^p$ に変えても同様の結論が言えることは殆んど明らかであろう。この LEMMA と BEYER の定理により次の定理を得る。

定理 κ のみならず、 $\dim(B(\kappa) - B(\delta)) = 1$ である。

証明 BEYER の定理は I_0 から I_0^k への変換 T_k をまず定義し、任意の集合 $M \subset I_0$ に対して

$$\dim M = \frac{1}{k} \dim T_k M \quad (2, 5)$$

が成立する。ここで変換 T_k は $\omega \mapsto T_k \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ として $\omega_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_{(i-1)k+j}(\omega)$ ($\omega = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\omega)$) で定義されるものである。与えられた $\omega_0 \in B(\mathbb{N}) - B(\mathbb{N})$ に対して, $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}, \omega_0)$ が k 次元進正規となるような $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}) \in I_0^{k-1}$ の集合を P_{k-1} と書くと, LEMMA によりルバーク測度-1 になる。次に集合 $G_k \subset I_0^k$ を

$$G_k = P_{k-1} \cap [T_{k-1}(B(\mathbb{N}) \cap B(\mathbb{N}))] \times \{\omega_0\}$$

と定義すれば (2, 5) より

$$\dim T_k^{-1} G_k = (k-1)/k \quad (2, 6)$$

である。 G_k の定義から, $T_k^{-1} G_k \subset B(\mathbb{N})$ は強んど明らかであろう。

$B(\mathbb{N})$ に関する Pillai の結果を用いて

$$T_k^{-1} G_k \subset B(\mathbb{N}) - B(\mathbb{N}) \quad (2, 7)$$

を示すことも、比較的容易であろう。

(2, 6), (2, 7) は任意の $k \geq 2$ に対して正しいから

$$\begin{aligned} 1 \geq \dim(B(\mathbb{N}) - B(\mathbb{N})) &\geq \sup_k \dim T_k^{-1} G_k \\ &= \sup_k (k-1)/k \\ &= 1. \end{aligned} \quad \langle \text{証明終} \rangle$$

§3. 補遺.

前回の京都大学数理解析研究所での講究録 294 で述べた未解決の問題の 1 つ, $\dim(B - B(\lambda)) = 1$ は、前節の定理の系として直ちに導かれる。

次に同 p135 での $\dim X \leq 2$ とするようが $\neq$ として、例えて連続性が致る所微分不可能とするブラウーニ運動の PATH のようなものも取れば良い。

前節の LEMMA の証明は PROCEEDINGS OF THE JAPAN ACADEMY に掲載された論文中の証明とは違うものである。

STEINHAUS の問題をより一般的立場から問題として論文が何編もあり、それらについてもうハウスドルフ次元を考える余地が残されているだろうが、別の機会に触れることにして筆を置くことにする。

24 / 8 / 78

強い残暑の中で。

REFERENCES

- [1] Beyer, W.A.; Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series, Pacific J. Math., 12, 35-46 (1962).
- [2] Cassels, J.W.S.; On a problem of Steinhaus about normal numbers, Colloq. Math., 7, 95-101 (1959).
- [3] Kuipers, L. and Niederreiter, H.; Uniform distribution of sequences, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York-London-Sydney-Toronto (1974).
- [4] Nagasaka, K.; Theory of Hausdorff dimension and its applications, Research on theory of numbers (Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., No. 294, 124-144), in Japanese (1977).
- [5] Nagasaka, K.; On Hausdorff dimension of sets missing statistical laws, Proc. of the Inst. of Stat. Math., 25-1, 1-9, in Japanese, (1978).
- [6] Nagasaka, K.; La dimension de Hausdorff de certains ensembles dans $[0, 1]$, Proc. of the Japan Academy, 54 Ser. A-4, 109-112 (1978).
- [7] Schmidt, W.M.; On normal numbers, Pacific J. Math., 10, 661-672 (1960).