

エントロピー及び相対エントロピーの上界・下界の 精密化とその応用

城西大学・理学部 柳 研二郎

Kenjiro Yanagi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Josai University

1 Introduction

$f(x)$ を $[a, b]$ 上で定義された convex function とする. このときエルミート・アダマール不等式は次で与えられる.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

最近、エルミート・アダマール不等式の 1 つの拡張として次の 2 つの不等式が得られた.

Proposition 1.1 $f(x)$ を $[a, b]$ 上の convex function とする. 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$L_{f,n}^{(1)}(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq L_{f,m}^{(2)}(a, b),$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)a + \frac{2k-1}{2n}b\right),$$

$$L_{f,m}^{(2)}(a, b) = \frac{1}{2m} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\left(1 - \frac{k}{m}\right)a + \frac{k}{m}b\right) \right\}.$$

Proposition 1.2 $f(x)$ を $[a, b]$ 上の convex function とする. 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ と任意の $v \in [0, 1]$ に対して

$$r_{f,v,n}^{(1)}(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq r_{f,v,m}^{(2)}(a, b),$$

ただし

$$\begin{aligned}
 & r_{f,v,n}^{(1)}(a,b) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ v f \left(\left(1 - \frac{(2k-1)v}{2n} \right) a + \frac{(2k-1)v}{2n} b \right) \right. \\
 & \quad \left. + (1-v) f \left(\left(1 - v - \frac{(2k-1)(1-v)}{2n} \right) a + \left(v + \frac{(2k-1)(1-v)}{2n} \right) b \right) \right\}, \\
 & r_{f,v,m}^{(2)}(a,b) \\
 &= \frac{1}{2m} \{ v f(a) + (1-v) f(b) + f((1-v)a + vb) \} \\
 & \quad + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ v f \left(\left(1 - \frac{kv}{m} \right) a + \frac{kv}{m} b \right) + (1-v) f \left(\left(1 - v - \frac{k(1-v)}{m} \right) a + \left(v + \frac{k(1-v)}{m} \right) b \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

2つの確率分布 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ に対して Shannon entropy $S(P)$ と相対エントロピー (relative entropy) $S(Q|P)$ はそれぞれ次で与えられる.

$$S(P) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad S(Q|P) = \sum_{i=1}^N q_i \log \frac{q_i}{p_i},$$

ただし $0 \log 0 = 0$ であり, ある i について $p_i = 0$ のときには $q_i = 0$ であるとする.

C.Tsallis は統計物理の解析のために Shannon entropy の one parameter 拡張である Tsallis entropy $T_t(Q)$ と関連する Tsallis relative entropy $T_t(Q|P)$ をそれぞれ次のように定義した.

$$T_t(Q) = - \sum_{i=1}^N q_i^{1-t} \ln_t q_i, \quad T_t(Q|P) = \sum_{i=1}^N q_i^{1-t} (\ln_t q_i - \ln_t p_i),$$

ただし $\ln_t$ は t -logarithmic function であり, parameter $t \in \mathbb{R}$ をもつ function $\ln_t(x) = \frac{x^t - 1}{t}$ で定義される. それらは $t \rightarrow 0$ のときそれぞれ Shannon entropy と relative entropy に収束する. つまり

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_t(Q) = S(Q), \quad \lim_{t \rightarrow 0} T_t(Q|P) = S(Q|P),$$

同様に量子状態 ρ についての von Neumann entropy $S(\rho)$ と 量子状態 ρ, σ に対する Umegaki relative entropy $S(\rho|\sigma)$ はそれぞれ次で定義される.

$$S(\rho) = -Tr[\rho \log \rho], \quad S(\rho|\sigma) = Tr[\rho(\log \rho - \log \sigma)].$$

またそれらの one-parameter 拡張である Tsallis entropy $T_t(\rho)$ と Tsallis relative entropy $T_t(Q|P)$ はそれぞれ次で定義される.

$$T_t(\rho) = -Tr[\rho^{1-t} \ln_t \rho], \quad T_t(\rho|\sigma) = Tr[\rho^{1-t} (\ln_t \rho - \ln_t \sigma)].$$

さらに J.I.Fujii-E.Kamei は positive operators $X, Y > 0$ に対して relative operator entropy $S(X|Y)$ を次で定義した.

$$S(X|Y) = X^{1/2} \log(X^{-1/2} Y X^{-1/2}) X^{1/2}.$$

また $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ に対して Tsallis relative operator entropy $T_t(X|Y)$ が次で定義された.

$$T_t(X|Y) = X^{1/2} \ln_t(X^{-1/2} Y X^{-1/2}) X^{1/2}.$$

ここで $\lim_{t \rightarrow 0} T_t(X|Y) = S(X|Y)$ であることは明らかである.

2 Tsallis entropy の上界・下界とその応用

$f(x) = x^{t-1}$ とする. このとき $r_{f,v,n}^{(1)}(x, 1)$ と $r_{f,v,m}^{(2)}(x, 1)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} & r_{f,v,n}^{(1)}(x, 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ v \left(\left(1 - \frac{(2k-1)v}{2n} \right) x + \frac{(2k-1)v}{2n} \right)^{t-1} \right. \\ & \quad \left. + (1-v) \left(\left(1 - v - \frac{(2k-1)(1-v)}{2n} \right) x + \left(v + \frac{(2k-1)(1-v)}{2n} \right) \right)^{t-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & r_{f,v,m}^{(2)}(x, 1) \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ v x^{t-1} + (1-v) + ((1-v)x + 1)^{t-1} \right\} \\ & \quad + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ v \left(\left(1 - \frac{kv}{m} \right) x + \frac{kv}{m} \right)^{t-1} \right. \\ & \quad \left. + (1-v) \left(\left(1 - v - \frac{k(1-v)}{m} \right) x + \left(v + \frac{k(1-v)}{m} \right) \right)^{t-1} \right\}. \end{aligned}$$

このとき次の定理が得られる.

Theorem 2.1 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $v \in [0, 1]$ と 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ. $t < 1$ または $t > 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^N r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i) \leq T_t(Q) \leq \sum_{i=1}^N r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i), \quad (1)$$

$1 < t < 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^N r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i) \leq T_t(Q) \leq \sum_{i=1}^N r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i). \quad (2)$$

Proof. $t < 1$ または $t > 2$ のとき $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で convex であるので, Proposition 1.2 より

$$r_{f,v,n}^{(1)}(x, 1) \leq \frac{1-x^t}{t(1-x)} = \frac{x^t-1}{t(x-1)} \leq r_{f,v,m}^{(2)}(x, 1). \quad (3)$$

$1 < t < 2$ のとき $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で concave であるので, Proposition 1.2 より

$$r_{f,v,m}^{(2)}(x, 1) \leq \frac{1-x^t}{t(1-x)} = \frac{x^t-1}{t(x-1)} \leq r_{f,v,n}^{(1)}(x, 1). \quad (4)$$

$t < 1$ または $t > 2$ のとき, $x = q_i (< 1)$ とおくと (3) より

$$r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) \leq \frac{1}{q_i-1} \ln_t q_i \leq r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1).$$

したがって $(q_i-1)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) \leq \ln_t q_i \leq (q_i-1)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1)$. 両辺に $-q_i^{1-t} (< 0)$ をかけると

$$q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) \leq -q_i^{1-t} \ln_t q_i \leq q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1).$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^N q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) \leq T_t(Q) \leq \sum_{i=1}^N q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1).$$

また同様にして $1 < t < 2$ のとき, $x = q_i (< 1)$ とおくと (4) より

$$r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) \leq \frac{1}{q_i-1} \ln_t q_i \leq r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1).$$

したがって $(q_i-1)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) \leq \ln_t q_i \leq (q_i-1)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1)$. 両辺に $-q_i^{1-t} (< 0)$ をかけると

$$q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) \leq -q_i^{1-t} \ln_t q_i \leq q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1).$$

したがって

$$\sum_{i=1}^N q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) \leq T_t(Q) \leq \sum_{i=1}^N q_i^{1-t}(1-q_i)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1).$$

□

(1) において $t = 0$ とおくと, 次が得られる.

Corollary 2.1 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $v \in [0, 1]$ と 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=1}^N q_i(1-q_i)r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) \leq S(Q) \leq \sum_{i=1}^N q_i(1-q_i)r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1), \quad (5)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 & r_{f,v,n}^{(1)}(q_i, 1) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{v}{(2n - (2k-1)v)q_i + (2k-1)v} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-v}{2n\{(1-v)q_i + v\} + (2k-1)(1-v)(1-q_i)} \right\}, \\
 & r_{f,v,m}^{(2)}(q_i, 1) \\
 &= \frac{1}{2m} \left\{ \frac{v}{q_i} + 1 - v + \frac{1}{(1-v)q_i + v} \right\} \\
 & \quad + \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{v}{(m-kv)q_i + kv} + \frac{1-v}{m\{(1-v)q_i + v\} + k(1-v)(1-q_i)} \right\}.
 \end{aligned}$$

(1) と (2) において $v = 0$ または $v = 1$ とおくと, $r_{f,0,n}^{(1)}(q_i, 1) = r_{f,1,n}^{(1)}(q_i, 1) = L_{f,n}^{(1)}(q_i, 1)$ かつ $r_{f,0,m}^{(2)}(q_i, 1) = r_{f,1,m}^{(2)}(q_i, 1) = L_{f,m}^{(2)}(q_i, 1)$ であるので次が得られる.

Corollary 2.2 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ. $t < 1$ または $t > 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^N L_{f,n}^{(1)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i) \leq T_t(Q) \leq \sum_{i=1}^N L_{f,m}^{(2)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i),$$

$1 < t < 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^N L_{f,m}^{(2)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i) \leq T_t(Q) \leq \sum_{i=1}^N L_{f,n}^{(1)}(q_i, 1) q_i^{1-t} (1 - q_i),$$

ただし

$$\begin{aligned}
 L_{f,n}^{(1)}(q_i, 1) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right) q_i + \frac{2k-1}{2n} \right\}^{t-1}, \\
 L_{f,m}^{(2)}(q_i, 1) &= \frac{1}{2m} \{1 + (q_i + 1)^{t-1}\} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \left(1 - \frac{k}{m}\right) q_i + \frac{k}{m} \right\}^{t-1}.
 \end{aligned}$$

(5) において $v = 0$ または $v = 1$ とおくと次が得られる. .

Corollary 2.3 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=1}^N q_i (1 - q_i) L_{f,n}^{(1)}(q_i, 1) \leq S(Q) \leq \sum_{i=1}^N q_i (1 - q_i) L_{f,m}^{(2)}(q_i, 1), \quad (6)$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(q_i, 1) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n - (2k - 1))q_i + 2k - 1},$$

$$L_{f,m}^{(2)}(q_i, 1) = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{q_i} + 1 \right) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(2^m - k)q_i + k}.$$

(6) において $n = m = 1$ とおくと

$$L_{f,1}^{(1)}(q_i, 1) = \frac{2}{1 + q_i}, \quad L_{f,1}^{(2)}(q_i, 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q_i} + 1 \right)$$

であるので、次の結論が得られる。

Corollary 2.4 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ を確率分布とする。このとき次が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^N \frac{2q_i(1 - q_i)}{1 + q_i} \leq S(Q) \leq \sum_{i=1}^N \frac{1 - q_i^2}{2}.$$

3 Tsallis Relative Entropy の上界・下界とその応用

$f(x) = x^{t-1}$ とする。このとき $r_{f,v,n}^{(1)}(a, b)$ と $r_{f,v,m}^{(2)}(a, b)$ はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} & r_{f,v,n}^{(1)}(a, b) \\ = & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ v \left(\left(1 - \frac{(2k-1)v}{2n} \right) a + \frac{(2k-1)v}{2n} b \right)^{t-1} \right. \\ & \left. + (1-v) \left(\left(1 - v - \frac{(2k-1)(1-v)}{2n} \right) a + \left(v + \frac{(2k-1)(1-v)}{2n} \right) b \right)^{t-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & r_{f,v,m}^{(2)}(a, b) \\ = & \frac{1}{2m} \{ v a^{t-1} + (1-v) b^{t-1} + ((1-v)a + vb)^{t-1} \} \\ & + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ v \left(\left(1 - \frac{kv}{m} \right) a + \frac{kv}{m} b \right)^{t-1} \right. \\ & \left. + (1-v) \left(\left(1 - v - \frac{k(1-v)}{m} \right) a + \left(v + \frac{k(1-v)}{m} \right) b \right)^{t-1} \right\}. \end{aligned}$$

このとき次の定理が得られる。

Theorem 3.1 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする. $I = \{1 \leq i \leq N : p_i < q_i\}$ と $J = \{1 \leq i \leq N : p_i > q_i\}$ とする. このとき任意の $v \in [0, 1]$ と任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ. $t < 1$ または $t > 2$ のとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\ & \leq T_t(Q|P) \\ & \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i), \end{aligned} \quad (7)$$

$1 < t < 2$ のとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\ & \leq T_t(Q|P) \\ & \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i). \end{aligned} \quad (8)$$

Proof. $t < 1$ または $t > 2$ のとき, $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で convex であるので, Proposition 1.2 より次が成り立つ.

$$r_{f,v,n}^{(1)}(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \frac{b^t - a^t}{t} \leq r_{f,v,m}^{(2)}(a, b). \quad (9)$$

したがって $i \in I = \{1 \leq i \leq N : p_i < q_i\}$ に対して $a = p_i$ かつ $b = q_i$ とおくと (9) より,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\ & \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (\ln_t q_i - \ln_t p_i) \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i). \end{aligned} \quad (10)$$

また $i \in J = \{1 \leq i \leq N : p_i > q_i\}$ に対して $a = p_i$ かつ $b = q_i$ とおくと (9) より,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\ & \leq \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (\ln_t q_i - \ln_t p_i) \leq \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i). \end{aligned} \quad (11)$$

ゆえに (10) と (11) を結び付けることにより (7) が得られる.

同様に $1 < t < 2$ のとき, $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で concave であるので, Proposition 1.2 より次が成り立つ.

$$r_{f,v,m}^{(2)}(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \frac{b^t - a^t}{t} \leq r_{f,v,n}^{(1)}(a, b). \quad (12)$$

したがって $i \in I = \{1 \leq i \leq N : p_i < q_i\}$ に対して $a = p_i$ かつ $b = q_i$ とおくと (12) より次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\ & \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (\ln_t q_i - \ln_t p_i) \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i). \end{aligned} \quad (13)$$

また $i \in J = \{1 \leq i \leq N : p_i > q_i\}$ に対して $a = p_i$ かつ $b = q_i$ とおくと, Proposition 1.2 より次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\ & \leq \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (\ln_t q_i - \ln_t p_i) \leq \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i). \end{aligned} \quad (14)$$

ゆえに (13) と (14) を結び付けることにより (8) が得られる. $\square$

(7) において $t = 0$ とおくと次の Corollary を得る.

Corollary 3.1 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $v \in [0, 1]$ と任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} q_i (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\ & \leq S(Q|P) \\ & \leq \sum_{i \in I} q_i (q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i (q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i), \end{aligned} \quad (15)$$

ただし

$$\begin{aligned} & r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\ & = 2 \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{v}{(2n - (2k - 1)v)p_i + (2k - 1)vq_i} \right\} \\ & \quad + 2 \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1 - v}{2n\{(1 - v)p_i + vq_i\} + (2k - 1)(1 - v)(q_i - p_i)} \right\}, \\ & r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\ & = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{v}{p_i} + \frac{1 - v}{q_i} + \frac{1}{(1 - v)p_i + vq_i} \right\} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{v}{(m - kv)p_i + kvq_i} + \frac{1 - v}{m\{(1 - v)p_i + vq_i\} + k(1 - v)(q_i - p_i)} \right\}. \end{aligned}$$

(7) と (8) において $v = 0$ または $v = 1$ とおくと $r_{f,0,n}^{(1)}(p_i, q_i) = r_{f,1,n}^{(1)}(p_i, q_i) = L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i)$ かつ $r_{f,0,m}^{(2)}(p_i, q_i) = r_{f,1,m}^{(2)}(p_i, q_i) = L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i)$ であるので次の定理が得られる.

Corollary 3.2 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ. $t < 1$ または $t > 2$ のとき

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\ & \leq T_t(Q|P) \\ & \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i), \end{aligned}$$

また $1 < t < 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\
 & \leq T_t(Q|P) \\
 & \leq \sum_{i \in I} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t} (q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i),
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right) p_i + \frac{2k-1}{2n} q_i \right\}^{t-1}, \\
 L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) &= \frac{1}{2m} (p_i^{t-1} + q_i^{t-1}) + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \left(1 - \frac{k}{m}\right) p_i + \frac{k}{m} q_i \right\}^{t-1}.
 \end{aligned}$$

(15) において $v = 0$ または $v = 1$ とおくと次の Corollary が得られる. .

Corollary 3.3 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in I} q_i (q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i (q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\
 & \leq S(Q|P) \\
 & \leq \sum_{i \in I} q_i (q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i (q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i),
 \end{aligned} \tag{16}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2n - (2k-1))p_i + (2k-1)q_i}, \\
 L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) &= \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \right) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(m-k)p_i + kq_i}.
 \end{aligned}$$

(16) において $n = m = 1$ とおくと,

$$L_{f,1}^{(1)}(p_i, q_i) = \frac{2}{p_i + q_i}, \quad L_{f,1}^{(2)}(p_i, q_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \right) = \frac{p_i + q_i}{2p_i q_i}$$

であるので, 次の Corollary が成り立つ. .

Corollary 3.4 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする. このとき

$$\sum_{i \in I} \frac{2q_i(q_i - p_i)}{p_i + q_i} + \sum_{i \in J} \frac{q_i^2 - p_i^2}{2p_i} \leq S(Q|P) \leq \sum_{i \in I} \frac{q_i^2 - p_i^2}{2p_i} + \sum_{i \in J} \frac{2q_i(q_i - p_i)}{p_i + q_i}.$$

次に Pinsker inequality とその関連について述べる. Pinsker inequality は次の不等式として知られている.

$$\frac{1}{2}\|Q - P\|_1^2 \leq S(Q|P), \quad (17)$$

ただし

$$\|Q - P\|_1 = \sum_{i \in I} (q_i - p_i) + \sum_{i \in J} (p_i - q_i).$$

ここでは (16) は $S(Q|P)$ の下界としては (17) より強い評価を与えることを示す. $Q = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ で (16) において $n = m = 2$ とおく. このとき

$$L_{f,2}^{(1)}(p_i, q_i) = \frac{2}{3p_i + q_i} + \frac{2}{p_i + 3q_i} = \frac{8(p_i + q_i)}{(3p_i + q_i)(p_i + 3q_i)}$$

かつ

$$L_{f,2}^{(2)}(p_i, q_i) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \right) + \frac{1}{p_i + q_i}$$

であるので

$$\sum_{i \in I} q_i(q_i - p_i)L_{f,2}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i(q_i - p_i)L_{f,2}^{(2)}(p_i, q_i) = 0.12594 \dots$$

かつ

$$\frac{1}{2}\|Q - P\|_1^2 = 0.125, \quad S(Q|P) = 0.13084 \dots$$

したがって

$$\frac{1}{2}\|Q - P\|_1^2 < \sum_{i \in I} q_i(q_i - p_i)L_{f,2}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i(q_i - p_i)L_{f,2}^{(2)}(p_i, q_i) < S(Q|P).$$

4 Tsallis Relative Operator Entropy の上界・下界とその応用

$t < 1$ または $t > 2$ のとき, $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で convex であるので, Proposition 1.1 より次を得る.

$$L_{f,n}^{(1)}(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \frac{b^t - a^t}{t} \leq L_{f,m}^{(2)}(a, b), \quad (18)$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)a + \frac{2k-1}{2n}b \right\}^{t-1},$$

$$L_{f,m}^{(2)}(a, b) = \frac{1}{2m} \left\{ a^{t-1} + b^{t-1} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \left(\left(1 - \frac{k}{m}\right)a + \frac{k}{m}b \right)^{t-1} \right\}.$$

$0 < a < b$ のとき, 次の不等式を得る.

$$(b-a)L_{f,n}^{(1)}(a, b) \leq \frac{b^t - a^t}{t} \leq (b-a)L_{f,m}^{(2)}(a, b). \quad (19)$$

(19) において $a = 1$ かつ $b = y$ とおく．このとき

$$(y-1)L_{f,n}^{(1)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \quad (20)$$

次に (19) において $a = y$ かつ $b = 1$ とおく．このとき

$$(1-y)L_{f,n}^{(1)}(y,1) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,m}^{(2)}(y,1). \quad (21)$$

一方, $0 < b < a$ のときは次の不等式を得る．

$$(b-a)L_{f,m}^{(2)}(a,b) \leq \frac{b^t-a^t}{t} \leq (b-a)L_{f,n}^{(1)}(a,b). \quad (22)$$

(22) において $a = 1$ かつ $b = y$ とおく．このとき

$$(y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,n}^{(1)}(a,b).$$

つまり

$$(1-y)L_{f,n}^{(1)}(a,b) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \quad (23)$$

次に (22) において $a = y$ かつ $b = 1$ とおく．このとき

$$(1-y)L_{f,m}^{(2)}(y,1) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,n}^{(1)}(y,1).$$

つまり

$$(y-1)L_{f,n}^{(1)}(y,1) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,m}^{(2)}(y,1). \quad (24)$$

$L_{f,n}^{(1)}(1,y) = L_{f,n}^{(1)}(y,1)$ かつ $L_{f,m}^{(2)}(1,y) = L_{f,m}^{(2)}(y,1)$ に注意する．したがって $y > 1$ に対して (20) かつ (24) より次の不等式を得る．

$$(y-1)L_{f,n}^{(1)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \quad (25)$$

また $y < 1$ に対して (21) かつ (23) より次の不等式を得る．

$$(1-y)L_{f,n}^{(1)}(1,y) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \quad (26)$$

同様に $1 < t < 2$ のとき, $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で concave であるので, 同様な方法で次の不等式を得られる． $y > 1$ に対して

$$(y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,n}^{(1)}(1,y). \quad (27)$$

また $y < 1$ に対して

$$(1-y)L_{f,m}^{(2)}(1,y) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,n}^{(1)}(1,y). \quad (28)$$

Tsallis relative operator entropy の上界・下界を得るために次の lemma を必要とする．

Lemma 4.1 A, B を *positive invertible operators*, また $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする. $t < 1$ または $t > 2$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次の不等式が成り立つ. $\ell > 1$ のとき

$$(B - A) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y).$$

$L < 1$ のとき

$$(B - A) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y).$$

$1 < t < 2$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次の不等式が成り立つ. $\ell > 1$ のとき

$$(B - A) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y).$$

$L < 1$ のとき

$$(B - A) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y).$$

Proof. $t < 1$ または $t > 2$ とする. $\ell > 1$ のとき, $1 < \ell \leq y \leq L$ であるので次を得る.

$$(y - 1) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) \leq \frac{y^t - 1}{t} \leq (y - 1) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y). \quad (29)$$

$L < 1$ のとき, $\ell \leq y \leq L < 1$ であるので次を得る.

$$(1 - y) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) \leq \frac{1 - y^t}{t} \leq (1 - y) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y).$$

つまり

$$(y - 1) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) \leq \frac{y^t - 1}{t} \leq (y - 1) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y). \quad (30)$$

$1 < t < 2$ とする. $\ell > 1$ のとき, $1 < \ell \leq y \leq L$ であるので次を得る.

$$(y - 1) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) \leq \frac{y^t - 1}{t} \leq (y - 1) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y). \quad (31)$$

$L < 1$ のとき, $\ell \leq y \leq L < 1$ であるので次を得る.

$$(1 - y) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) \leq \frac{1 - y^t}{t} \leq (1 - y) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y).$$

つまり

$$(y - 1) \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) \leq \frac{y^t - 1}{t} \leq (y - 1) \max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y). \quad (32)$$

$\ell A \leq B \leq LA$ かつ A は invertible であるので, 両辺に左右から $A^{-1/2}$ をかけることにより $\ell 1_H \leq A^{-1/2} B A^{-1/2} \leq L 1_H$ である. $X = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ とおく. $[\ell, L]$ に含まれる spectra をもつ X に対する functional calculus を用い, かつ不等式 (29), (30), (31) および (32) より結論が得られる. $\square$

Theorem 4.1 A, B を *positive invertible operators*, また $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする. $t < 1$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次を得る. $\ell > 1$ のとき

$$(B - A)L_{f,n}^{(1)}(1, \ell) \leq T_t(A|B) \leq (B - A)L_{f,m}^{(2)}(1, L).$$

$L < 1$ のとき

$$(B - A)L_{f,m}^{(2)}(1, L) \leq T_t(A|B) \leq (B - A)L_{f,n}^{(1)}(1, \ell).$$

$t > 1$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次を得る. $\ell > 1$ のとき

$$(B - A)L_{f,m}^{(2)}(1, L) \leq T_t(A|B) \leq (B - A)L_{f,n}^{(1)}(1, \ell).$$

$L < 1$ のとき

$$(B - A)L_{f,n}^{(1)}(1, \ell) \leq T_t(A|B) \leq (B - A)L_{f,m}^{(2)}(1, L).$$

Proof. $t < 1$ のとき

$$\max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) = L_{f,n}^{(1)}(1, \ell), \quad \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) = L_{f,n}^{(1)}(1, L)$$

かつ

$$\max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) = L_{f,m}^{(2)}(1, \ell), \quad \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) = L_{f,m}^{(2)}(1, L).$$

$1 < t < 2$ または $t > 2$ のとき

$$\max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) = L_{f,n}^{(1)}(1, L), \quad \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,n}^{(1)}(1, y) = L_{f,n}^{(1)}(1, \ell)$$

かつ

$$\max_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) = L_{f,m}^{(2)}(1, L), \quad \min_{\ell \leq y \leq L} L_{f,m}^{(2)}(1, y) = L_{f,m}^{(2)}(1, \ell).$$

$t = 2$ のときは明らかであるので, Lemma 4.1 より結論が得られる. □

Theorem 4.1 において $m = n = 1$ とする. このとき次の Corollary が得られる.

Corollary 4.1 A, B を *positive invertible operators*, また $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする. $t < 1$ のとき, 次の不等式が成り立つ. $\ell > 1$, 即ち, $A \leq B$ のとき

$$(B - A) \left(\frac{1 + \ell}{2} \right)^{t-1} \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \left(\frac{1 + L^{t-1}}{2} \right).$$

$L < 1$, 即ち, $B \leq A$ のとき

$$(B - A) \left(\frac{1 + L^{t-1}}{2} \right) \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \left(\frac{1 + \ell}{2} \right)^{t-1}.$$

$t > 1$ のとき, 次の不等式が成り立つ. $\ell > 1$, 即ち, $A \leq B$ のとき

$$(B - A) \left(\frac{1 + L^{t-1}}{2} \right) \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \left(\frac{1 + \ell}{2} \right)^{t-1}.$$

$L < 1$, 即ち, $B \leq A$ のとき

$$(B - A) \left(\frac{1 + \ell}{2} \right)^{t-1} \leq T_t(A|B) \leq (B - A) \left(\frac{1 + L^{t-1}}{2} \right).$$

Proof. $m = n = 1$ より

$$L_{f,1}^{(1)}(1, \ell) = \left(\frac{1 + \ell}{2} \right)^{t-1}, \quad L_{f,1}^{(2)}(1, L) = \frac{1 + L^{t-1}}{2}.$$

したがって結論が得られる. □

$f(x) = \frac{b}{x} - 1$ とする. このとき $L_{f,n}^{(1)}(a, b)$ かつ $L_{f,m}^{(2)}(a, b)$ はそれぞれ次のように表される.

$$L_{f,n}^{(1)}(a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \frac{2k-1}{2n}}{(1 - \frac{2k-1}{2n})a + \frac{2k-1}{2n}b}$$

かつ

$$L_{f,m}^{(2)}(a, b) = \frac{b-a}{2m} \left\{ \frac{1}{a} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \frac{k}{m}}{(1 - \frac{k}{m})a + \frac{k}{m}b} \right\}.$$

エルミート・アダマール不等式より

$$L_{f,n}^{(1)}(a, b) \leq \frac{1}{b-a} \{b \log \frac{b}{a} - (b-a)\} \leq L_{f,m}^{(2)}(a, b).$$

$0 < a < b$ のとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)^2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \frac{2k-1}{2n}}{(1 - \frac{2k-1}{2n})a + \frac{2k-1}{2n}b} \\ & \leq b \log \frac{b}{a} - (b-a) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2m} \left\{ \frac{1}{a} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \frac{k}{m}}{(1 - \frac{k}{m})a + \frac{k}{m}b} \right\}. \end{aligned} \tag{33}$$

同様に $0 < b < a$ のとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)^2}{2m} \left\{ \frac{1}{a} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \frac{k}{m}}{(1 - \frac{k}{m})a + \frac{k}{m}b} \right\} \\ & \leq b \log \frac{b}{a} - (b-a) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \frac{2k-1}{2n}}{(1 - \frac{2k-1}{2n})a + \frac{2k-1}{2n}b}. \end{aligned} \tag{34}$$

(33) において $a = 1$ かつ $b = y$ とする. このとき

$$\begin{aligned}
 & \frac{(y-1)^2}{ny} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{2k-1}{2n-(2k-1)}y} \\
 & \leq \log y - \frac{y-1}{y} \\
 & \leq \frac{(y-1)^2}{2my} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{m-k}y} \right\}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

また (33) において $a = y$ かつ $b = 1$ とする. このとき

$$\begin{aligned}
 & \frac{(y-1)^2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{y + \frac{2k-1}{2n-(2k-1)}} \\
 & \leq y - 1 - \log y \\
 & \leq \frac{(y-1)^2}{2m} \left\{ \frac{1}{y} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{y + \frac{k}{m-k}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

一方, (34) において $a = y$ かつ $b = 1$ とする. このとき

$$\begin{aligned}
 & \frac{(y-1)^2}{2m} \left\{ \frac{1}{y} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{y + \frac{k}{m-k}} \right\} \\
 & \leq y - 1 - \log y \\
 & \leq \frac{(y-1)^2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{y + \frac{2k-1}{2n-(2k-1)}}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

同様に, (34) において $a = 1$ かつ $b = y$ とする. このとき

$$\begin{aligned}
 & \frac{(y-1)^2}{2my} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{m-k}y} \right\} \\
 & \leq \log y - \frac{y-1}{y} \\
 & \leq \frac{(y-1)^2}{ny} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{2k-1}{2n-(2k-1)}y}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

次を定義する.

$$\begin{aligned}
 \alpha(n, y) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2j-1}{2n-(2j-1)}y \right)^{-1}, \\
 \beta(m, y) &= \frac{1}{2m} \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(1 + \frac{j}{m-j}y \right)^{-1} \right\}, \\
 \gamma(n, y) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(y + \frac{2j-1}{2n-(2j-1)} \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\delta(m, y) = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{1}{y} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(y + \frac{j}{m-j} \right)^{-1} \right\}.$$

$y > 1$ に対して $\alpha(n, y) \leq \beta(m, y)$, $\gamma(n, y) \geq \delta(m, y)$, また $y < 1$ に対して $\alpha(n, y) \geq \beta(m, y)$, $\gamma(n, y) \leq \delta(m, y)$ が成り立つので (35), (36), (37), (38) より次の 2 つの表現が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{(y-1)^2}{y} \min\{\alpha(n, y), \beta(m, y)\} \leq \log y - \frac{y-1}{y} \\ & \leq \frac{(y-1)^2}{y} \max\{\alpha(n, y), \beta(m, y)\} \end{aligned} \quad (39)$$

かつ

$$\begin{aligned} & (y-1)^2 \min\{\gamma(n, y), \delta(m, y)\} \leq y-1-\log y \\ & \leq (y-1)^2 \max\{\gamma(n, y), \delta(m, y)\}. \end{aligned} \quad (40)$$

$0 < k < K$ とする. このとき

$$\begin{aligned} M(k, K) &= \max_{k \leq y \leq K} \frac{(y-1)^2}{y}, & m(k, K) &= \min_{k \leq y \leq K} \frac{(y-1)^2}{y}, \\ N(k, K) &= \max_{k \leq y \leq K} (y-1)^2, & n(k, K) &= \min_{k \leq y \leq K} (y-1)^2. \end{aligned}$$

とおくと, 次の 2 つの不等式が得られる.

$$m(k, K) \min\{\alpha(n, K), \beta(m, K)\} \leq \log y - \frac{y-1}{y} \leq M(k, K) \max\{\alpha(n, k), \beta(m, k)\}$$

かつ

$$n(k, K) \min\{\gamma(n, K), \delta(m, K)\} \leq y-1-\log y \leq N(k, K) \max\{\gamma(n, k), \delta(m, k)\}.$$

operator inequality を証明するために次の Lemma を必要とする.

Lemma 4.2 $0 < k \leq x \leq K$ かつ $t > 0$ とする. このとき

$$\begin{aligned} 0 & \leq \min\{\alpha(n, K^t), \beta(m, K^t)\} \left(\frac{x^t-1}{t} - \frac{1-x^{-t}}{t} \right) \\ & \leq \log x - \frac{1-x^{-t}}{t} \\ & \leq \max\{\alpha(n, k^t), \beta(m, k^t)\} \left(\frac{x^t-1}{t} - \frac{1-x^{-t}}{t} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} 0 & \leq \min\{\gamma(n, K^t), \delta(m, K^t)\} t \left(\frac{x^t-1}{t} \right)^2 \\ & \leq \frac{x^t-1}{t} - \log x \\ & \leq \max\{\gamma(n, k^t), \delta(m, k^t)\} t \left(\frac{x^t-1}{t} \right)^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Proof. (39) かつ (40) において $y = x^t$ とおくことにより結論が得られる. $\square$

Theorem 4.2 A, B を *positive invertible operators*, $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする. このとき任意の $t > 0$ と任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L^t), \beta(m, L^t)\}(T_t(A|B) - T_{-t}(A|B)) \\ &\leq S(A|B) - T_{-t}(A|B) \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell^t), \beta(m, \ell^t)\}(T_t(A|B) - T_{-t}(A|B)), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\gamma(n, L^t), \delta(m, L^t)\}tT_t(A|B)A^{-1}T_t(A|B) \\ &\leq T_t(A|B) - S(A|B) \\ &\leq \max\{\gamma(n, \ell^t), \delta(m, \ell^t)\}tT_t(A|B)A^{-1}T_t(A|B), \end{aligned} \quad (44)$$

ただし

$$\begin{aligned} A_t^\sharp B &= A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^tA^{1/2}, \\ S(A|B) &= A^{1/2}\log(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}, \\ T_t(A|B) &= A^{1/2}\ln_t(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}. \end{aligned}$$

Proof. $\ell A \leq B \leq LA$ かつ A は invertible であるので, 両辺に左右から $A^{-1/2}$ をかけると $\ell 1_H \leq A^{-1/2}BA^{-1/2} \leq L1_H$. $X = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ とおく. $[\ell, L]$ に含まれる spectra をもつ X についての functional calculus を施すと不等式 (41) より任意の $t > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L^t), \beta(m, L^t)\} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right) \\ &\leq \log X - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell^t), \beta(m, \ell^t)\} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

ここで (45) の両辺に左右から $A^{1/2}$ をかけると次を得る.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L^t), \beta(m, L^t)\}A^{1/2} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right) A^{1/2} \\ &\leq A^{1/2}\log X - A^{1/2}\frac{1_H - X^{-t}}{t}A^{1/2} \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell^t), \beta(m, \ell^t)\}A^{1/2} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right) A^{1/2}. \\ A^{1/2}\frac{1_H - X^{-t}}{t}A^{1/2} &= A^{1/2}\frac{X^{-t} - 1_H}{-t}A^{1/2} = T_{-t}(A|B) \end{aligned}$$

であるので (43) を得る. 同様に (42) を用いると任意の $t > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \min\{\gamma(n, K^t), \delta(m, K^t)\}t \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 \\
 &\leq \frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} - \log(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \\
 &\leq \max\{\gamma(n, k^t), \delta(m, k^t)\}t \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{46}$$

(46) の両辺に左右から $A^{1/2}$ をかけると次を得る.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \min\{\gamma(n, L^t), \delta(m, L^t)\}tA^{1/2} \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 A^{1/2} \\
 &\leq A^{1/2} \frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} A^{1/2} - A^{1/2} \log(A^{-1/2}BA^{-1/2}) A^{1/2} \\
 &\leq \max\{\gamma(n, \ell^t), \delta(m, \ell^t)\}tA^{1/2} \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 A^{1/2}. \\
 A^{1/2} \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 A^{1/2} &= T_t(A|B)A^{-1}T_t(A|B)
 \end{aligned}$$

であるので (44) を得る. □

(43) と (44) において $t = 1$ とおくと次が得られる.

Corollary 4.2 A, B を positive invertible operators, $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする. このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \min\{\alpha(n, L), \beta(m, L)\}(B - A)(A^{-1} - B^{-1})A \\
 &\leq S(A|B) - (B - A)B^{-1}A \\
 &\leq \max\{\alpha(n, \ell), \beta(m, \ell)\}(B - A)(A^{-1} - B^{-1})A, \\
 0 &\leq \min\{\gamma(n, L), \delta(m, L)\}(B - A)A^{-1}(B - A) \\
 &\leq B - A - S(A|B) \\
 &\leq \max\{\gamma(n, \ell), \delta(m, \ell)\}(B - A)A^{-1}(B - A).
 \end{aligned}$$

Proof. $t = 1$ のとき $T_1(A|B) = B - A$ かつ $T_{-1}(A|B) = (B - A)B^{-1}A$.

$$\begin{aligned}
 T_1(A|B) - T_{-1}(A|B) &= B - A - (B - A)B^{-1}A \\
 &= (B - A)(I - B^{-1}A) = (B - A)(A^{-1} - B^{-1})A
 \end{aligned}$$

であるので, 結論が得られる. □

Acknowledgement The author was partially supported by JSPS KAKENHI 19K03525. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

- [1] P. Cerone and S.S.Dragomir, *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives satisfying certain convexity assumptions*, Demonstratio Math., vol.37, no.2, pp.299-308, 2004.
- [2] S.S.Dragomir and R.p.Agarwal, *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula*, Appl. Math. Lett., vol.11, no.5, pp.91-95, 1998.
- [3] S.S.Dragomir, P.Cerone and A.Sofa, *Some remarks on the midpoint rule in numerical integration*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Math., vol.XLV, no.1, pp.63-74, 2000.
- [4] S.S.Dragomir, P.Cerone and A.Sofa, *Some remarks on the trapezoid rule in numerical integration*, Indian J. Pure Appl. Math., vol.31, no.5, pp.475-494, 2000.
- [5] A.El Farissi, Z.Latreuch and B.Balaidi, *Hadamard type inequalities for near convex functions*, Gazata Matematica Seria A, no.1-2, 2010.
- [6] S.Furuichi and H.R.Moradi, *Advances in mathematical inequalities*, De Gruyter, 2020.
- [7] F.Kubo and T.Ando, *Means of positive operators*, Math. Ann. vol.264, pp.205-224, 1980.
- [8] F.C.Mitroi-Symeonidis, *About the precision in Jensen-Steffensen inequality*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., vol.37, no.4, pp.73-84, 2010.
- [9] R.Pal, M.Singh, M.S.Moslehian and J.S.Aujla, *A new class of operator monotone functions via operator means*, Linear and Multilinear Algebra, vol.64, no.12, pp.2463-2473, 2016.
- [10] Slavko Simic and Bandar Bin-Mohsin, *Some generalizations of the Hermite-Hadamard integral inequality*, Journal of Inequalities and Applications, 2021:72, pp.1-7, 2021.
- [11] K.Yanagi, *Refined Hermite-Hadamard inequality and weighted logarithmic mean*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.6, no.2, pp.167-177, 2020.
- [12] K.Yanagi, *Refined Hermite-Hadamard inequality and its application*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.7, no.2, pp.173-183, 2021.