

On the Number of Chains in a Hasse Diagram

by

Hiroshi Narushima

Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Tokai University,

Hiratsuka, Kanagawa, Japan

Abstract

A finite partially ordered set P is represented by the Hasse diagram $H(P)$. Therefore an enumeration of chains in P can be carried out by enumerating chains in $H(P)$. In the sequel P and $H(P)$ are identified. Some simple algorithms for enumerating chains in a Hasse diagram are given. Then the algorithms are applied to obtain some recurrence formulas for enumerating non-isomorphic unlabeled rooted trees.

§1. 序 順序集合上の和積定理を応用するにあたり、つぎ点が問題となる。

- (1) 与えられた順序集合 P と写像 $f: P \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ に対して、 f が P 上の弱射であるかどうか。
- (2) 鎖 C に対して、 $m(\bigcap_{x \in C} f(x))$ または $m(\bigcup_{x \in C} f(x))$ が算術的に計算可能かどうか。
- (3) P に含まれる鎖に関する計算 $\sum_{C \in \mathcal{C}} (-1)^{l(C)} m(\quad)$ により経済的な方法があるかどうか。

(4) (3)の計算量の $\sim$ つの目安となる“与えられた順序集合 P に含まれる鎖の個数”を有効に求めるアルゴリズムがあるかどうか、などである。

本講演は問題(4)を考察するものである。§2で、一般のハッセ図に含まれる鎖の数え上げまたは“加減数え上げ”、及び、特に木に含まれる鎖の数え上げと鎖の個数にもとづく木の分類漸代式について述べ、§3で、一般のハッセ図に含まれる極大鎖の数え上げまたは“加減数え上げ”と極大鎖の数え上げにもとづく木の一般分類漸代式について述べる。

§2. 鎖の数え上げ、加減数え上げ、鎖の個数にもとづく木の分類漸代式 始めに、一般の順序集合に含まれる鎖の数え上げをアルゴリズム A で、鎖の加減数え上げをアルゴリズム B で述べ、つぎに、特に、木に含まれる鎖の数え上げに有効であるアルゴリズム C を与え、更に、アルゴリズム C の値づけにもとづく木の分類漸代式について述べる。

P をハッセ図とする。以下、 P の元 x に対して、

$P_x = \{y \in P \mid y < x\}$ 、 $P'_x = \{y \in P \mid x \downarrow y \text{ (} y \text{ は } x \text{ の直下の元)}\}$ とする。

アルゴリズム A (鎖の数え上げ)、 P をハッセ図とする。 P の極小元は値 1 を与える。 P の極小元以外の元 x に対して、

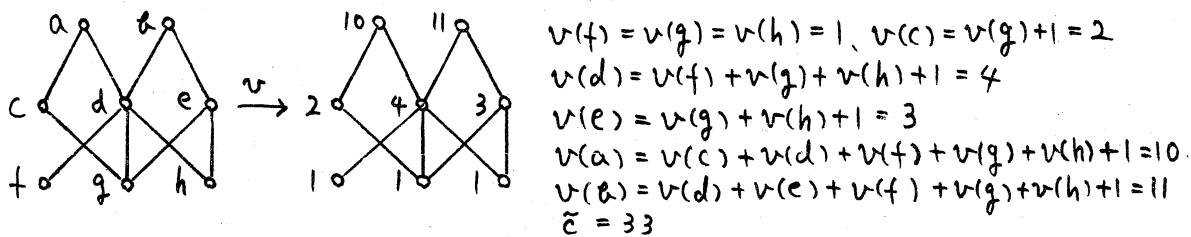
P_x のすべての元が値をもっているならば、 x に値 $\sum_{y \in P_x} v(y) + 1$ を与える。ここで、 $v(y)$ は y の値を示す。この値づけを P のすべての元が値をもつまでつづける。

定理 1. P を順序集合とする。

(1) P の元 x に対して、 $v(x)$ は x を最大元とする鎖の個数である。

(2) $\tilde{c}$ で P に含まれる鎖の個数を表わすとき、 $\tilde{c} = \sum_{x \in P} v(x)$ となる。

例 1. アルゴリズム A による値づけの例



アルゴリズム B (鎖の加減数上げ). つぎの点を除いてアルゴリズム A と同じである。ハッヤ図 P の極小元以外の元 x に対して、 P_x のすべての元が値をもっているならば、 x に値 $-(\sum_{y \in P_x} v_i(y)) + 1$ を与える。ここで、 $v_i(y)$ は y の値である。

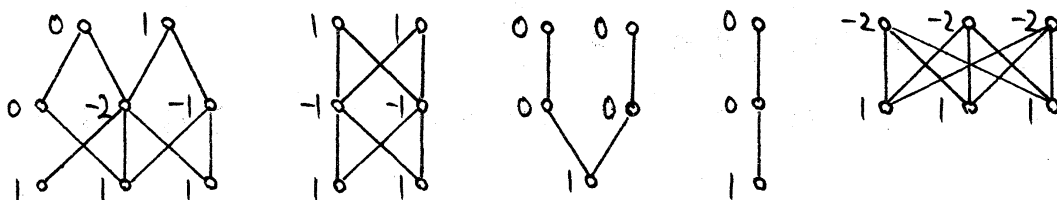
定理 2. P を順序集合とする。

(1) c_i^x で x を最大元とする長さ i の鎖の数を表わすとき、 P の元 x に対して、 $v_i(x) = \sum_{0 \leq i} (-1)^i c_i^x$ が成り立つ。

(2) c_i で P に含まれる長さ i の鎖の数を表わすとき、

$$\sum_{0 \leq i} (-1)^i c_i = \sum_{x \in P} v_1(x) \quad \text{が成り立つ。}$$

例 2. 例 2 のハッセ図に対するアルゴリズム B による値づけとその他の例



$$\sum_{0 \leq i} (-1)^i c_i = \underline{1}, \quad \underline{2}, \quad \underline{1}, \quad \underline{1}, \quad \underline{-3}$$

[文献 3]

注意. 予稿 1) の Proposition 1) の (1) によって、最大元あるハッセ図に對しては、常に $\sum_{0 \leq i} (-1)^i c_i = 1$ である。

さて、例 4 の木に對して、アルゴリズム A を適用すれば、4.1 のように値づけられるが、特に、木に含まれる鎖の数を求めるときには、つぎのアルゴリズムが有効である。

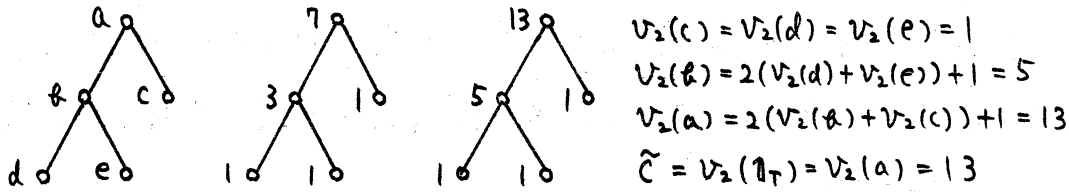
アルゴリズム C (木の鎖の数の上げ). つぎの点を除いてアルゴリズム A と同じである。木 T の極小元以外の元 x に對して、 P'_x のすべての元が値をもっているならば、 x に値 $2(\sum_{y \in P'_x} v_2(y)) + 1$ を与える。ここで、 $v_2(y)$ は y の値である。

定理 3. T を木 (rooted tree) とする。

(1) T の元 x に對して、 $v_2(x)$ は x 以下の (T の) 部分木に含まれる鎖の数である。

(2) T に含まれる鎖の数を $\tilde{c}$ で表わし、 T の最大元を 1_T で表わすとき、 $\tilde{c} = v_2(1_T)$ が成り立つ。

例3. 木に対するアルゴリズム A と C による値づけの比較



注意. ^{4.1} アルゴリズム A と C の値づけのちがひ:

$$(A) \quad v(x) = \sum_{y \in P_x} v(y) + 1 \quad (C) \quad v_2(x) = 2 \left(\sum_{y \in P'_x} v_2(y) \right) + 1$$

つきに、アルゴリズム C の値づけにもとづく、同型で "unlabel" な木の分類漸化式を述べる。

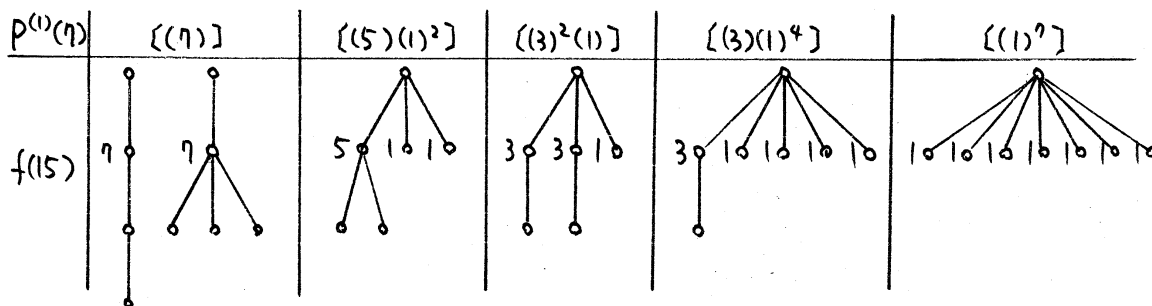
定理4. 正の整数 n に対して、 $v_2(1_T) = 2n+1$ となる木 T の数を $f(2n+1)$ で表わし、数 n の奇数因子への分割全体を $P^{(n)}(n)$ で表わすとき、つぎの漸化式が成立する。

$$f(2n+1) = \sum_{x \in P^{(n)}(n)} \prod_{i=1}^k f(2i-1)^{\lambda_{2i-1}}$$

こゝで、 $x = \{(1)^{\lambda_1} (2)^{\lambda_2} \dots (2i-1)^{\lambda_{2i-1}} \dots (2k-1)^{\lambda_{2k-1}}\}$ 、

$\sum_{i=1}^k \lambda_{2i-1} (2i-1) = n$ 、であり、 H は重複組合せを表わす。

例4. 鎖の数が15となる木: $v_2(1_T) = 2n+1 = 15$, $n=7$



例5. $f(2n+1)$ の計算例

$2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$f(2n+1)$	1	1	1	2	2	3	4	6	7	10	13	17	22	29	38

§ 3. 極大鎖の数之上げ、加減数之上げ、木の分類漸化式
 ハッセ図 P に含まれる鎖 $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_k$ を、
 $\forall i (0 \leq i \leq k-1)$ に対して x_{i+1} が x_i の直上の元 ($x_i \uparrow x_{i+1}$) であるとき、極大鎖という。

アルゴリズム D (極大鎖の数之上げ)、つぎの点を除いて
 アルゴリズム A と同じである。ハッセ図 P の極小元以外の元
 x に対して、 P'_x のすべての元が値をもっているならば、 x に
 値 $\sum_{y \in P'_x} v'(y) + 1$ を与える。 $v'(y)$ は y の値である。

定理 5. P を順序集合とする。

(1) P の元 x に対して、 $v'(x)$ は x を最大元とする極大鎖
 の数である。

(2) P に含まれる極大鎖の数を $\tilde{d}$ で表わすと、 $\tilde{d} = \sum_{x \in P} v'(x)$
 となる。

アルゴリズム E (極大鎖の加減数之上げ by H. Era (尊羅)).
 つぎの点を除いてアルゴリズム A と同じである。ハッセ図 P
 の極小元以外の元 x に対して、 P'_x のすべての元が値をもっ
 ているならば、 x に値 $-(\sum_{y \in P'_x} v'_1(y)) + 1$ を与える。 $v'_1(y)$ は y
 の値である。

定理 6. P を順序集合とする。

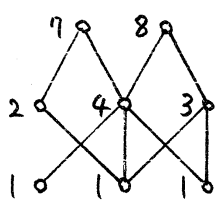
(1) d_i^x で x を最大元とする長さ i の極大鎖の数を表わすとき、
 $v'_1(x) = \sum_{0 \leq i} (-1)^i d_i^x$ が成り立つ。

(2) d_i で P に含まれる長さ i の極大鎖の数を表わるとき、

$$\sum_{0 \leq i} (-1)^i d_i = \sum_{x \in P} v'_1(x) \text{ が成り立つ。}$$

注意、アルゴリズム A, B とアルゴリズム D, E のちがいは、 P_x の元についての和が P'_x の元についての和となっていること。

例 6、例 1 のハッセ図に対するアルゴリズム D 及び E による値づけ



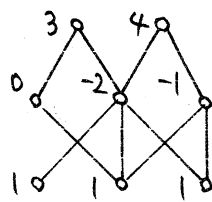
f, g, h, c, d, e に対しては A と同じ。

$$v'_1(a) = v'_1(c) + v'_1(d) + 1 = 7$$

$$v'_1(b) = v'_1(c) + v'_1(e) + 1 = 8$$

$$\tilde{d} = 27$$

D による値づけ



f, g, h, c, d, e に対しては B と同じ。

$$v'_1(a) = -(v'_1(c) + v'_1(d)) + 1 = 3$$

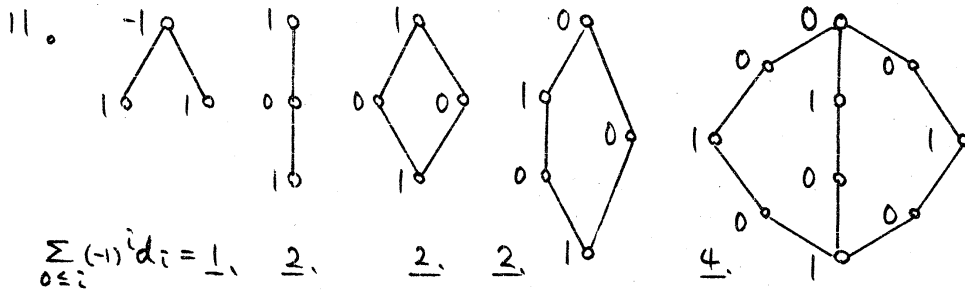
$$v'_1(b) = -(v'_1(c) + v'_1(e)) + 1 = 4$$

$$\sum_{0 \leq i} (-1)^i d_i = 7$$

E による値づけ

文献 (予稿 1)

注意、極大鎖に関して、 $V[4]$ の Proposition の (1) は成立しない。最大元をもつハッセ図に対して、 $\sum_{0 \leq i} (-1)^i d_i = \text{一定とは限らない}$ 。



さて、アルゴリズム D による木の分類を考えるに当たって、つぎの補題が重要である。

補題、木 T の元 x に対して、 $v'_1(x)$ は x を最大元とする (T) 部分木の元の個数に等しい。

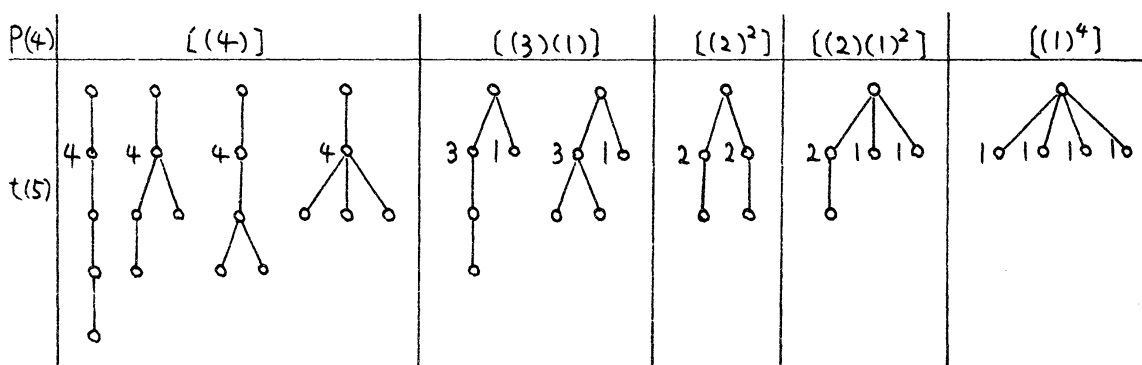
定理 7. 正の整数 n に対して、 $v'(\Pi_r) = n$ となる木、すなわち、点の個数が n である木の数を $t(n)$ で表わし、数 n の分割全体を $P(n)$ で表わすとき、つぎの漸化式が成立する。

$$t(n+1) = \sum_{\lambda \in P(n)} \prod_{k=1}^n t(k) H_{\lambda_k}$$

ここで、 $\lambda = [(1)^{\lambda_1} (2)^{\lambda_2} \dots (k)^{\lambda_k} \dots (n)^{\lambda_n}]$ 、 $\sum_{k=1}^n k \lambda_k = n$ であり、 H は重複組合せを表わす。

注意. $t(n)$ の (上の) 漸化式はアルゴリズム D によらず自然に与えられることもできる。

例 7. 点の数が 5 である木



文献

1. 成島 弘、組合せ理論の基礎、数解研講究録 119、1-18、1973.
2. 成島 弘、和積定理と Reduced Maps について、同 259、44-61、1976.
3. 成島 弘、Hasse 図に含まれる鎖の個数について、L A sym. 論文集、1977. to appear.
4. H. Narushima, Principle of Inclusion-Exclusion on Partially Ordered Sets, to appear.
5. F. Harary and E. M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, 1973.