

ワイブル分布の頑健予測区間

東理大理工 小谷孝一 (Kouichi Kotani)
湘南工大工 石川武司 (Takeshi Ishikawa)
東理大理工 田宮高紀 (Takanori Tamiya)

§ 1. 問題の設定

ここでは2母数ワイブル分布における未来標本の頑健予測区間について議論する。ワイブル分布は信頼性理論などで、代表的な分布の1つである。

2母数ワイブル分布 $W(\sigma, \lambda)$ とは密度関数 (pdf) が次式で与えられるような分布である。

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\lambda\right) \quad (x \geq 0, \lambda \in \Lambda = (0, \infty)) \quad (1-1)$$

ここで、 σ は尺度母数で、 λ は形状母数である。 $\lambda < 1$ のときは $x=0$ で発散し単調減少、 $\lambda = 1$ のときは指数分布で、 $\lambda > 1$ のときは $x=0$ で pdf は 0 となる単峰型である。このように λ の値によって分布形はさまざまな形になる。

ここで議論する予測問題は「1標本問題」と呼ばれているもので、これは大きさ n の順序統計量 $Z_1 < Z_2 < \cdots < Z_m < \cdots < Z_s < \cdots < Z_n$ のうち、はじめの m 個 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ を観測して、それに基づいて Z_s ($s > m$) を予測するという問題である。これに対して、「2標本問題」は $Z_1, \cdots, Z_n$ とは独立なもう1組の順序統計量 $Z'_1 < Z'_2 < \cdots < Z'_s < \cdots < Z'_n$ の s 番目を予測する問題である。この場合は信頼区間の問題と本質的には同じであり、本来の予測問題は、過去と未来が独立でない一標本問題である。

Z_s の標本空間の部分集合 S を予測区間という。 $Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_m)$ を観測したときに、これに S を対応させる写像 δ を Z_s の予測方式という (すなわち、 $\delta: Z \rightarrow S$)。 S の典型的なものは $[L(Z), U(Z)]$ の形をしている。以後、予測方式 δ と予測区間を同一視することにする。

種々の確率変数や母数が登場して混線するおそれがあるので、あらかじめ次の表のように記法を約束しておく。

	一般の分布	ワイブル分布	極値分布
順序統計量の i 番目	Z_i	X_i	X_i^*
位置母数	θ_1	0	u
尺度母数	θ_2	σ	b
形状母数	λ	λ	(λ)

§ 2. 頑健予測区間の定義

予測区間としては基準の入れ方に応じてさまざまなものが得られるが、それらの「良さ」を測る尺度を導入しなければならない。まず、ここでは予測区間 δ は位置・尺度変換に対して「不変」であることを要求する。これは、予測区間 S が $[L(Z), U(Z)]$ で与えられるときは、 L, U としては、

$$L(aZ+b) = aL(Z) + b \quad (1 = (1, 1, \dots, 1)) \quad (2-1)$$

$$U(aZ+b) = aU(Z) + b$$

という条件を満足するものに限るということである。この条件が満たされれば、次に定義する「リスク」は母数 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ に依存しない。(位置母数が 0 のときは単に尺度不変だけを要求すればよく、この場合は上式で $b=0$ と考えればよい。)

予測区間の「リスク」として次の 2 つを考える。

第 1 のリスク : $R_1(\delta, \lambda) = 1 - P_{\theta, \lambda}\{Z_s \in S\}$ (2-2)
 ここで、 $P_{\theta, \lambda}\{Z_s \in S\}$ は、 Z_s の値が予測区間に落ちる確率を表す。

第 2 のリスク : $R_2(\delta, \lambda) = \frac{1}{\theta_2} \int_S f(z; \theta, \lambda) dz$ (2-3)

ここで、 $f(z; \theta, \lambda)$ は $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ の同時 pdf を表す。

$$S \text{ が } [L(Z), U(Z)] \text{ で与えられるときは、} R_2(\delta, \lambda) = \frac{1}{\theta_2} E_{\theta, \lambda}(U - L)$$

すなわち予測区間の長さの平均を θ_2 を単位として測ったものである。

この 2 つのリスクを用いて、良い予測区間を得るための手続きをどのように定義

するかを、 λ が既知である場合とそうでない場合とにわけて紹介する。

(1) 形状母数が既知もしくは形状母数がない場合

信頼水準が $1 - \varepsilon$ の、すなわち $R_1(\delta, \lambda) \leq \varepsilon$ を満足する不変予測区間 δ の集合を Δ_λ^1 とし、この集合のなかで最短のもの、すなわち

$$R_2(\delta_\lambda^1) = \min_{\delta \in \Delta_\lambda^1} R_2(\delta, \lambda) \quad (2-4)$$

を満足する δ_λ^1 を λ のもとでの信頼水準 $1 - \varepsilon$ の最良不変予測区間 (best invariant prediction interval: B I P I と略す) という。また予測区間 δ の λ のもとでの「効率」を次式で定義する。

$$e(\delta, \lambda) = \frac{R_2(\delta_\lambda^1)}{R_2(\delta, \lambda)} \quad (2-5)$$

(2) 形状母数 λ が未知であるとき

不変予測区間 δ で、任意の λ に対して $R_1(\delta, \lambda) \leq \varepsilon$ を満足するものを保証水準 $1 - \varepsilon$ の予測区間といい、それらの全体を Δ_ε^g で表す。これに含まれる δ は「有効頑健性 (robustness of validity)」をもつという。この δ の保証効率を

$$e_g(\delta) = \min_{\lambda \in \Lambda} e(\delta, \lambda) \quad (2-6)$$

で定義する。 e_g が大きいほど δ は「効率頑健性 (robustness of efficiency)」をもつという。

Δ_ε^g の中で e_g を最大にする予測区間、すなわち

$$e_g(\delta^g) = \max_{\delta \in \Delta_\varepsilon^g} e_g(\delta) \quad (2-7)$$

を満足する δ^g を Δ_ε^g に関し最良頑健予測区間 (B R P I) という。

以上、形状母数既知の場合の信頼水準および効率の概念を用いて形状母数未知の場合の予測区間の頑健性の概念を定式化した。この定式化の方法は、信頼区間に関して Morgenthaler(1986) および Gross(1976) が用いている方法を参考にした。

従来の論文は有効頑健性のみを扱っているが、ここでは、頑健とは有効頑健か

つ効率頑健であること、すなわち、保証水準 $1 - \varepsilon$ で、かつ保証効率 e_0 を出来るだけ大きくするという意味で用いられる概念である。

§ 3. 既存の一般的な予測区間の構成法

(1) 位置尺度母数モデル (E-型モデル)

従来、予測区間は位置尺度母数モデル (ここではそれをEstimator-型、略してE-型モデルと呼ぶ) にもとづいて構成されている。すなわち $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ の不変推定量 $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ を用いて、ピボット

$$W = \frac{Z_0 - \tilde{\theta}_1}{\tilde{\theta}_2} \quad (3-1)$$

をつくり、このWのpdfが単峰型であることが確かめられた場合、

$$Pr\{\alpha \leq W \leq \beta\} = 1 - \varepsilon \quad (3-2)$$

より信頼水準 $1 - \varepsilon$ の予測区間

$$\tilde{\theta}_1 + \alpha \tilde{\theta}_2 \leq Z_0 \leq \tilde{\theta}_1 + \beta \tilde{\theta}_2 \quad (3-3)$$

を得る。このとき、第2のリスクは

$$R_2 = (\beta - \alpha) E_* \left(\frac{\tilde{\theta}_2}{\theta_2} \right) \quad (3-4)$$

であるが、これは推定量不変から、 θ -free な量となっている。

既存の論文では、

(イ) $\alpha = -\infty$ または $\beta = +\infty$ の場合の予測区間、すなわち片側予測区間を求める。

(ロ) 両側だが、 α , β として、それぞれWの分布の下側および上側 $\varepsilon/2$ の点を採用する。

という立場のいずれかで書かれ、しかもどちらの場合も、ワイブル分布の予測区間に関しては R_2 については考慮されていない。これに対し、ここでは

(ハ) $Pr\{\alpha \leq W \leq \beta\} = 1 - \varepsilon$ を満たす限りにおいて、 $\beta - \alpha$ が最小になるように α , β を決定する。

という立場で進める。このような α , β の決定の仕方は、 W の分布または近似分布にもとづいて解析的に求めるか、あるいはシミュレーションによるしかないが、前者は指数分布のように特別な場合（高田(1982)参照）以外は困難なので、ここでは、後者の方法を採用する。

(2) 既存のワイブル分布の予測区間の作り方（極値分布経由方式）

2 母数ワイブル分布 $W(\sigma, \lambda)$ にしたがう確率変数 X を $X^* = \log X$ と変換すると、 X^* は極値分布 $E_v(u, b)$ に従う。ここで、 $u = \log \sigma$, $b = 1/\lambda$ で、それぞれ位置母数および尺度母数である。 $E_v(u, b)$ は、密度関数が次式で与えられる分布である。

$$g(x) = \frac{1}{b} \exp \left\{ -\frac{x-u}{b} - \exp \left(-\frac{x-u}{b} \right) \right\} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3-4)$$

これは位置尺度族に属するので、極値分布の世界で考えれば、上で紹介した E-型モデルが適用できる。すなわち、 $W(\sigma, \lambda)$ からの順序統計量

$$X_1 < X_2 < \cdots < X_m < \cdots < X_s < \cdots < X_n$$

において、 $X = {}^t(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ にもとづいて X_s の予測区間を求めるかわりに、

$X_i^* = \log X_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$) と変換し、 $E_v(u, b)$ の順序統計量

$$X_1^* < X_2^* < \cdots < X_m^* < \cdots < X_s^* < \cdots < X_n^*$$

における、 $X^* = {}^t(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_m^*)$ にもとづく X_s^* の予測区間を E-型モデルを適用して求め、その結果を $\tilde{u} + \alpha^* \tilde{b} \leq X_s^* \leq \tilde{u} + \beta^* \tilde{b}$ とすると、この区間の両端の値を指数変換して、 X_s の不変予測区間

$$\exp(\tilde{u} + \alpha^* \tilde{b}) \leq X_s \leq \exp(\tilde{u} + \beta^* \tilde{b}) \quad (3-5)$$

を得る。この予測区間は λ -free で、第 2 のリスクは、

$$R_2(\delta, \lambda) = \frac{1}{\sigma} E_{\sigma, \lambda} \{ \exp(\tilde{u} + \beta^* \tilde{b}) - \exp(\tilde{u} + \alpha^* \tilde{b}) \} \quad (3-6)$$

で与えられる。

ワイブル分布の予測区間についての既存の論文はすべて、この方式を採用して

いる。Mann & Sanders(1969), Mann(1970), Antle & Rademaker(1972), Lawless(1973), Engelhardt & Bain(1979, 1982), Fertig, Meyer & Mann(1980)等の仕事がある。ただし、これらはいずれも R_2 については考慮していない。また、わずか1回抽出された標本から予測区間の長さを比較して、良さを議論しているにすぎない。また、いずれも2標本問題のみを取り扱っている。

§ 4. 修正位置尺度母数モデル (P-型モデル)

ここでは、従来の予測方式に加えて、E-型モデルで用いたピボットを修正して、

$$W = \frac{Z_s - \widetilde{Z}_s}{\widetilde{\theta}_2} \quad (4-1)$$

という統計量を使う方式を提案する。ここで、 $\widetilde{Z}_s$ は Z_s の不変予測量である。これは、 $\widetilde{Z}_s$ で点予測を行うと同時に、 $[\widetilde{Z}_s + \alpha \widetilde{\theta}_2, \widetilde{Z}_s + \beta \widetilde{\theta}_2]$ によって区間予測もできるという意味で魅力的である。この方式を Predictor-型、略して P-型モデルということにする。これにもとづく予測区間を求める手続きは、前節で述べたのと同様である。

§ 5. 最良不変予測区間について

以下、さまざまな予測区間 $[t_1 + \alpha t_2, t_1 + \beta t_2]$ を $\delta(t_1, t_2)$ の形で表現するが、 (t_1, t_2) は次の表で示す、各場合に応じた不変な統計量の組を表す。

分布	P-型	E-型
$W(\sigma, \lambda)$	$(\widetilde{X}_s, \widetilde{\sigma})$	$\widetilde{\sigma}$ (註)
$E_v(u, v)$	$(\widetilde{X}_s^*, \widetilde{b})$	$(\widetilde{u}, \widetilde{b})$

(註) この場合、位置母数はないから、Wは単に $Z_s / \widetilde{\sigma}$ となる。

また、すでに述べたように、 α, β は水準 $1 - \varepsilon$ の範囲で $\beta - \alpha$ が最小となるよ

うにとるものとする。

P-型、E-型を問わず、予測区間の良さについて、次の2つの定理が成り立つ。

定理A (t_1, t_2) が与えられているとき、 $\delta(t_1, t_2)$ は $W=(Z_s-t_1)/t_2$ の

pdfが単峰型の場合、 $[t_1+\alpha' t_2, t_1+\beta' t_2]$ の型、あるいはその有限個の和集合でできる型の不変予測区間の中で、保証水準を満たしているもののうちで、 R_2 が最小となる予測区間である。

(この定理は、石井(1980)、高田(1982)とほぼ同様にしてNeyman-Pearsonの補題の証明法を利用して証明できる。ただし、若干の追加的条件が必要である。)

以下、 $\delta(t_1, t_2)$ を (t_1, t_2) - B I P I (Best Invariant Prediction Interval) と呼ぶ。

定理B $k_1(>0), k_2$ を定数として、

$$t'_1 = t_1 - k_2 t_2, \quad t'_2 = k_1 t_2 \quad (5-1)$$

の関係があるとき、 $\delta(t_1, t_2)$ と $\delta(t'_1, t'_2)$ は同一の予測区間である。

(証明は簡単なので省略)

大ざっぱに言えば、定理Aは (t_1, t_2) を与えたとき、それらの線形関数として定まる予測区間の中で、最良の予測区間が $\delta(t_1, t_2)$ であることを示し、定理Bは (t_1, t_2) と異なる (t'_1, t'_2) については、(5-1)の条件を満たしさえすれば、 $\delta(t_1, t_2)$ と $\delta(t'_1, t'_2)$ とは同じだから $\delta(t_1, t_2)$ だけを考えておけばよく、従って考えるべき (t_1, t_2) のペアの個数を大幅にへらすことができるということを示している。

定理Bの例の1つとして、最良線形不偏予測量(推定量)をBLUP(BLUE)とし、最良線形不変予測量(推定量)をBLIP(BLIE)とするとき、 $\delta(BLUP, BLUE) = \delta(BLIP, BLIE)$ である。従って、 $\delta(BLUP, BLUE)$ を考えておけば、 $\delta(BLIP, BLIE)$ は考える必要がない(これらの統計量は点推定や点予測においてよく使われるものなので、この2つの組み合わせはまず一

番に思いつくものであるが)。

上記2つの定理から $\delta(t_1, t_2)$ は、(5-1)の条件を満足する任意の (t'_1, t'_2) からつくられる $[t'_1 + \alpha t'_2, t'_1 + \beta t'_2]$ の型及びその有限個の和集合で出来る型のすべての予測区間の中で最短のものになっている。この意味で $\delta(t_1, t_2)$ を広義 $(t_1, t_2) - \text{B I P I}$ とも呼ぶ。

このような広義 $(t_1, t_2) - \text{B I P I}$ も、区間の左端が観測値のなかの最大のものよりも小さく $(t_1 + \alpha t_2 < Z_m)$ なることがある。すなわち、予測区間が確率0の領域を含むという不合理なことが起こり得る。特に s が m に近い場合に、このようなことが起こる確率が高い。従ってこの場合は、広義 $(t_1, t_2) - \text{B I P I}$ を修正して、 $[\max\{Z_m, t_1 + \alpha t_2\}, t_1 + \beta t_2]$ を採用する。これも不変性を満たす。これをあらためて $(t_1, t_2) - \text{B I P I}$ と呼び、同じ記号で表す。

以上のようにして最良の予測区間を求めようとするとき、問題として残っているのは、 (t_1, t_2) としてどのようなペアーを選べばよいかということである。この問題は今のところ未解決で、さしあたっては点予測量や点推定量でよく知られている不変性をもつものの考えられる限りの組み合わせをとり、得られたさまざまな予測区間のなかから、すでに紹介した意味で頑健なものをさがすことになる。

§ 6. ワイブル分布の予測区間の構成

(1) 極値分布経由方式による予測区間

極値分布 $E_v(u, b)$ を経由して得られる予測区間を $\delta_{EV}(t_1, t_2)$ で表す。

(t_1, t_2) を限定して次の4つの予測区間を比較することにする。

- ① $\delta_{EV}(\text{BLUP}, \text{BLUE})$
- ② $\delta_{EV}(\text{FLUP}, \text{BLUE})$
- ③ $\delta_{EV}(\text{CROSS}, \text{BLUE})$
- ④ $\delta_{EV}(\text{BLUE}, \text{BLUE})$

このうち、①から③まではP-型で、④はE-型である。ここに登場する諸統計量の具体的な形は次の通りである。

$E_v(0,1)$ からの順序統計量 $U_1^* < U_2^* < \cdots < U_m^* < \cdots < U_s^* < \cdots < U_n^*$ において、
 $U = {}^t(U_1^*, \cdots, U_m^*)$ と U_s^* の平均をおよび分散・共分散行列をそれぞれ、

$$\begin{bmatrix} m \\ m_s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V & w \\ {}^t w & w_s \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

とする。また、 V^{-1} を Ω と書く。

BLUE (最良線形不偏推定量)

$$\begin{aligned} \tilde{u}^v &= \frac{1}{\Delta} (K_{22} {}^t 1 \Omega - K_{12} {}^t m \Omega) X^* \\ \tilde{b}^v &= \frac{1}{\Delta} (-K_{12} {}^t 1 \Omega - K_{11} {}^t m \Omega) X^* \\ &\quad \begin{pmatrix} K_{11} = {}^t 1 \Omega 1 \\ K_{12} = {}^t 1 \Omega m \\ K_{22} = {}^t m \Omega m \\ \Delta = K_{11} K_{22} - K_{12}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6-2)$$

BLUP (最良線形不偏予測量)

$$\tilde{X}_s^{*v} = {}^t w \Omega X^* + \tilde{b}^v (m_s - {}^t w \Omega m) + \tilde{u}^v (1 - {}^t 1 \Omega w) \quad (6-3)$$

FLUP (最終線形不偏予測量)

$$\tilde{X}_s^{*F} = X_m^* + \tilde{b}^v (m_s - m_m) \quad (6-4)$$

CROSS (Cross Validatory Predictor: 交叉確認予測量)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_s^{*C} &= X_m^* + a (m_s - m_m) \\ &\quad \left(a = \frac{\sum_{i=s-m+1}^m (X_i^* - X_{i-s+m}^*) (m_i - m_{i-s+m})}{\sum_{i=s-m+1}^m (m_i - m_{i-s+m})^2} \right) \end{aligned} \quad (6-5)$$

以上の諸統計量については、Balasooriya & Chan (1983) を参照されたい。

上記①から④までの δ_{EV} を $n=15, m=11$ の場合について、次の手順で求めた。

(イ) 10,000 組の $E_v(0,1)$ からの順序統計量 $X_1^* < X_2^* < \cdots < X_{11}^* < \cdots < X_{15}^*$ を乱数からつくり、それぞれの組について、 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_{11}^*$ を用いて u と b の

BLUE および X_s^* ($s=12, 13, 14, 15$) の BLUP 等を計算し、 W の分布を調べ、 $Pr\{\alpha^* \leq W \leq \beta^*\} = 0.9$ となる α^*, β^* のなかで $\beta^* - \alpha^*$ が最小となるものを求める。

(ロ) ワイブル分布からの順序統計量 $X_1 < X_2 < \cdots < X_{11} < \cdots < X_{15}$ のうち、11 番目までが観測されているものとして、 $\log X_1, \dots, \log X_{11}$ および上で得られた α^*, β^* を用いて、 $\log X_s$ ($s=12, 13, 14, 15$) の前節でのべた意味での $(t_1, t_2) - \text{BLIP I } [L, U]$ をつくる。 $[e^L, e^U]$ が X_s の予測区間である。

各 δ_{EV} の良さ比較するために、上記 (ロ) の手順を、 $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ のそれぞれのワイブル分布からの 10,000 組の順序統計量について実行し、予測区間の平均長さおよび、§ 2 で述べた効率および保証効率を計算した。結果は表 1 にまとめた。この結果によれば、 $\lambda \in \Lambda^* = \{1.0, 1.5, 2.0, 2.5\}$ と限定すれば、保証水準 90 % で、考えている 4 つの予測区間の中では、 $s = 12, 13, 14$ のときは $\delta_{EV}(FLUP, BLUE)$ が、 $s = 15$ のときは $\delta_{EV}(BLUE, BLUE)$ がもっとも頑健であることがわかる。点予測では BLIP が最良のものであるが、この結果は、点予測で最良のものを使って作られる $\delta_{EV}(BLIP, BLIE) = \delta_{EV}(BLUP, BLUE)$ が必ずしも最良の予測区間になっているわけではないこと、および、 s の値が大きいときは、E-型モデルの方が頑健であることを示唆している。

(2) 保守的不変予測区間

極値分布を経由する方法は、極値分布の世界での線形推定量や線形予測量が使えることと、あらかじめ形状母数 λ が全くわからない場合でも使えるという利点がある。しかしそこで得られた結果を指数関数で変換した区間は、極値分布というバイパスを経由して作られた区間だから、バイパスを経由しない作り方でよりよい頑健予測区間が求められないかと考えるのが自然であろう。しかし直接 P-型や E-型モデルをワイブル分布に適用しようとしても、 W の分布が未知母数 λ に依存する為、予測区間を構成することができない。そこで次のような工夫をする。

現実に適用されるワイブル分布の問題においては、 λ が $[1, 2]$ あるいは

[1.5, 2.5] という区間に含まれる場合がほとんどであるといわれている (Bala-sooriya & Chan (1983) 参照)。そこで、さらにこれらの区間を有限個の整数または半整数の点で近似して考えることにする。すなわち、 λ がある有限集合 $\Lambda^* = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ に含まれるという仮定をして以下にのべるような保守的な不変予測区間を構成し、そのなかで最適なものを探するという方法が考えられる。なお、 λ の値として整数あるいは半整数だけという仮定をするのは、それ以外の場合には必要とする順序統計量の平均や分散・共分散の計算が困難だからである。

この方法では、 λ が既知の場合の (t_1, t_2) -BIP I $\delta^\lambda(t_1, t_2)$ を構成することになるが、ここで実際に検討する $\delta^\lambda(t_1, t_2)$ は、次の3つである (いずれも P-型モデル)。

- ① $\delta^\lambda(BLUP, BLUE)$
- ② $\delta^\lambda(FLUP, BLUE)$
- ③ $\delta^\lambda(CROSS, BLUE)$

ここに登場する統計量の具体的な形は次の通りである。

$W(1, \lambda)$ からの順序統計量 $U_1 < U_2 < \dots < U_m < \dots < U_s < \dots < U_n$ において、 $U = {}^t(U_1, \dots, U_m)$ と U_s の平均及び分散・共分散行列をそれぞれ、

$$\begin{bmatrix} m^\lambda \\ m_s^\lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V^\lambda & w^\lambda \\ {}^t w^\lambda & w_s^\lambda \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

とする。また $(V^\lambda)^{-1}$ を Ω^λ と書く。

BLUE

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_1^y &= \frac{1}{K_{22}^\lambda} {}^t m^\lambda \Omega^\lambda X \\ (K_{22}^\lambda &= {}^t m^\lambda \Omega^\lambda m^\lambda) \end{aligned} \quad (7-2)$$

BLUP

$$\widetilde{X}_s^y = {}^t w^\lambda \Omega^\lambda X + \widetilde{\sigma}_1^y (m_s^\lambda - {}^t w^\lambda \Omega^\lambda m^\lambda) \quad (7-3)$$

FLUP, CROSS

(6-4), (6-5) と同様。ただし $\widetilde{b}^y$ は $\widetilde{\sigma}_1^y$ におきかえられる。

形状母数 λ に対して得られる $[t_1 + \alpha^\lambda t_2, t_1 + \beta^\lambda t_2]$ の形で得られる $\delta^\lambda(t_1, t_2)$ は、現実には形状母数が λ であるときに、 (t_1, t_2) -B I P I であるが、他の形状母数 λ のときはそうではない。そこで、 λ の値が Λ^* の中のいずれであっても保証水準を満たす予測区間を次のようにして構成する。

$$\alpha_c = \min_{\lambda \in \Lambda^*} \alpha^\lambda, \quad \beta_c = \max_{\lambda \in \Lambda^*} \beta^\lambda \quad (7-4)$$

として、 $[t_1 + \alpha_c t_2, t_1 + \beta_c t_2]$ を $\delta_c(t_1, t_2)$ で表し、これを保守的不変予測区間 (C I P I : Conservative Invariant Prediction Interval) と呼ぶことにする。この δ_c は保証水準をみたし、第2のリスクは、

$$R_2(\delta_c, \lambda) = (\beta_c - \alpha_c) E_{\sigma-1, \lambda}(t_2)$$

で与えられる。

試みに、 Λ^* として、 $\Lambda_1^* = \{1.0, 1.5\}$ および $\Lambda_2^* = \{1.0, 2.0\}$ としたときの計算例を表2に示す ($n=15, m=11, s=15$ の場合についてのみ)。この計算の手順は、すでに紹介した極値分布経由方式の場合と本質的には同様である。ただし、ここでは今のところシミュレーションの個数は2000である。表2の結果はC I P Iの中で、保証効率が最大という意味で、 Λ_1^* の場合は $\delta^{1.5}(CROSS, BLUE)$ が、 Λ_2^* の場合は $\delta^{2.0}(CROSS, BLUE)$ がそれぞれ頑健であることを示している。ただし、この予測方式は予測区間を保守的にとりすぎて、 λ によつては第1のリスク R_1 が小さくなりすぎて（小さくなるのはいいのだが、そのために逆に）、予測区間が長くなりすぎるすなわち R_2 が大きくなりすぎるという欠陥をもっている。

これを改善するのが次に述べる適応的予測区間である。なお、C I P Iを問題にする限りでは、 $\delta^\lambda(t_1, t_2)$ の (t_1, t_2) は、 λ のもとでの(7-2)以降の統計量を用いることが前提になっている。

(3) 適応的予測区間

説明を簡単にするため、 $\Lambda^* = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ とする。 $\Lambda = (0, \infty)$ を

$$I_1 = (0, \xi_1), I_c = [\xi_1, \xi_2], I_2 = [\xi_2, \infty)$$

の3つの区間に分割する。この分割を Δ と表す。 λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ を求めて、 $\hat{\lambda} \in I_1$ のときは $\delta^{\lambda_1}(t_1, t_2)$ を採用し、 $\hat{\lambda} \in I_2$ のときは $\delta^{\lambda_2}(t_1, t_2)$ を採用し、

$\hat{\lambda} \in I_c$ のときは $CIP I \delta_c(t_1, t_2)$ を採用する。このようにして作られる予測区間を $\delta^A(t_1, t_2)$ で表し、これを適応的予測区間 (API: Adaptive Prediction Interval) と呼ぶ。この意味は図1を見れば明かであろう。図1では予測区間そのもののかわりに、統計量 W に対する区間を示している。図は $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 2.0$ の場合で、 $\hat{\lambda}$ が I_1 , I_2 , I_c のいずれに含まれるかによって、採用する W の区間としてそれぞれ $I_1^W = [\alpha^1, \beta^1]$, $I_2^W = [\alpha^2, \beta^2]$, $I_c^W = [\alpha^2, \beta^1]$ を選ぶということを示している。

このようにして作られた API のリスクは、次式で与えられる。ここで $|I_i^W|$ 等は区間の長さを表す。

$$R_1(\delta^A, \lambda) = 1 - \sum_{i=1}^2 Pr\{\hat{\lambda} \in I_i, W \in I_i^W | \lambda\} - Pr\{\hat{\lambda} \in I_c^W, W \in I_c^W | \lambda\}$$

$$R_2(\delta^A, \lambda) = \sum_{i=1}^2 |I_i^W| \cdot E_{\sigma-1, \lambda}(t_2 | \hat{\lambda} \in I_i) \cdot Pr\{\hat{\lambda} \in I_i | \lambda\} \\ + |I_c^W| \cdot E_{\sigma-1, \lambda}(t_2 | \hat{\lambda} \in I_c) \cdot Pr\{\hat{\lambda} \in I_c | \lambda\}$$

このとき、保証水準 $1 - \varepsilon$ すなわち $R_1(\delta^A, \lambda) \leq \varepsilon$ ($\forall \lambda \in \Lambda^*$) を満たす分割 Δ について、 δ^A は δ_c を改良している。すなわち、

$$R_2(\delta^A, \delta) \leq R_2(\delta_c, \lambda) \quad (\forall \lambda \in \Lambda^*)$$

が成立する。すなわち、保証水準を満たすように分割をすれば δ_c は改良可能である。そのような改良可能な分割 Δ のなかで、保証効率 $e_c(\delta^A)$ を最大にする分割を Δ^* とする。 $\delta_A = \delta^{\Delta^*}$ は最適分割 Δ^* に関する API である。この $\delta_A(t_1, t_2)$ を (t_1, t_2) -最適適応的予測区間といい、 (t_1, t_2) -BAPI と表す。

試みに、CIP I について調べたのと同じ2種類の Λ^* について、各種の BAPI の効率を調べた結果が表3と表4である。やはり、 $n=15, m=11, s=15$ の場合で、シミュレーションの個数は2000である。ここでは、 $\delta^A(t_1, t_2)$ における (t_1, t_2) として、 Λ^* に含まれる各 λ のもとでの統計量を用いてそれぞれ6種類の BAPI を作って比較されている。一目で分かるように、各組み合わせについて API は CIP I を保証効率が高いという意味で改良している。また、最良なものが CIP I の場合とは異なることもこの表から読み取れる。表3と表4ではさらに、すでに計算してある極値分布経由型と BAPI の比較がされている。 Λ_1^* については最良の BAPI が極値分布経由型の最良なものよりすぐれている

が、 Λ_2^* についてはそうではないというのが、この2つの表から読み取れる結論である。しかし、シミュレーションの個数を増やし、かつさまざまな n, m, s の値、および Λ^* についてしらべないと、確定的な結論は下せないと思われる。

§ 7. まとめ

形状母数未知の分布の、かつ1標本の場合の区間予測の問題へのアプローチの1つとして、ワイブル分布をとりあげてきた。従来なされてきた仕事の多くは2標本問題であるが、未来標本が過去標本とは独立でないという意味で、1標本問題こそが本来の予測問題である。ワイブル分布を考える限りでは、従来やられてきているように極値分布経由方式で位置尺度族の問題に帰着できるが、その結果の「良さ」については全く検討されてきていない。また、いわゆるE-型モデルが当たり前のように採用されてきているが、これでは点予測量との関連がつかない。。さらに、極値分布経由方式そのものがワイブル分布に特有なもので、同じく形状母数をもつガンマ分布のような場合はどうするのかという問題がある。

そこでわれわれは、予測区間の「良さ」の基準を提案し、点予測と区間予測を同時に行えるP-型モデルも提案し、さらに形状母数の存在範囲を限定して考えてC I P IやB A P Iを構成する手法を提案し、種々の予測方式の優劣を調べてきた。特にC I P IやB A P Iはガンマ分布などを考えるときに有力な方法であろう。

これまで紹介してきたことの範囲で、以下の結論を下してもよからう。

- ① 極値分布経由方式を考える限り、最大値もしくはそれに近いものの予測をのぞけば、P-型モデルが効率の高い予測区間を与える。このとき、点予測量としては、BLUPやBLIPにくらべてより単純なFLUPを用いた方がわずかなではあるが、効率が高いようである。
- ② λ の存在範囲を2点に制限してP-型モデルで最大値のC I P Iを構成すると、点予測量としてはCROSS（交叉確認不変予測量）を用いた場合の効率が高いようである。
- ③ A P Iは確かにC I P Iを改良する。
- ④ ②の結果とは異なり、最大値のB A P Iは、CROSSではなく、BLUP

あるいはFLUPを用いて作られる。

数値例をより豊富化して、もっと全般的な結論を導き、後日発表したい。

謝辞

この報告を作成するにあたり、筑波大学の杉浦成昭教授および赤平昌文教授に有益なコメントをいただいたことを感謝します。

参考文献

- [1] Antle, C. E. and Rademaker, F. (1972), "An upper confidence limit on the maximum of m future observations from a type I extreme value distribution." Biometrika, 59, 475-477.
- [2] Balasooriya, U. and Chan, L. (1983), "The prediction of future order statistics in the two-parameter Weibull distributions - a robust study." Sankya, B, 45, 320-329.
- [3] Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1979), "Prediction limits and two-sample problems with complete or censored Weibull data." Technometrics, 21, 233-237.
- [4] Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1982), "On prediction limits for samples from a Weibull or extreme-value distribution." Technometrics, 24, 147-150.
- [5] Fertig, K. W., Meyer, M. E. and Mann, N. R. (1980), "On constructing prediction intervals for samples from a Weibull or extreme value distribution." Technometrics, 22, 567-573.
- [6] Gross, A. M. (1976), "Confidence interval robustness with long-tailed symmetric distributions." Journal of the American

Statistical Association, 71, 409-416.

[7] Ishii, G. (1980), "Best invariant prediction region based on an adequate statistic." Recent Developments in Statistical Inference and the Data Analysis (ed. K. Matsushita), North-Holland.

[8] Kaminsky, K. S., Mann, N. R. and Nelson, P. I. (1975), "Linear invariant prediction of order statistics in location and scale families." Applied Mathematics Research Laboratory / LB Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 45433.

[9] Kaminsky, K. S. and Nelson, P. I. (1975), "Best linear unbiased prediction of order statistics in location and scale families." Journal of the American Statistical Association, 70, 140-150.

[10] Lawless, J. F. (1973). "On the estimation of safe life when the underlying life distribution is Weibull." Technometrics, 15, 857-865.

[11] Lawless, J. F. (1982), Statistical models and methods for lifetime data, New York:John Wiley.

[12] Mann, N. R. (1970), "Warranty period based on three ordered sample observations from a Weibull population." IEEE Transactions on Reliability, 19, 167-171.

[13] Mann, N. R. and Saunders, S. C. (1969), "On evaluation of warranty assurance when life has a Weibull distribution." Biometrika, 56, 615-625.

[14] Mann, N. R., Schafer, R. E. and Singpurwalla, N. D. (1974),

Methods for statistical analysis of reliability and life data,
New York: John Wiley.

[15] Morgenthaler, S. (1986), "Robust confidence intervals for a location parameter: The configural approach." Journal of the American Statistical Association, 81, 518-525.

[16] Nelson, W. and Schemee, J. (1981), "Prediction limits for the last failure time of a normal sample from early failure." General Electric Co. Corp. Research and Development TIS report.

[17] Patel, J. K. (1989), "Prediction intervals - a review." Commun. Statist. -Theory Meth., 18(7), 2393-2465.

[18] Takada, Y. (1982), "Application of an adequate statistic to the invariant prediction region." Ann. Inst. Statist. Math., 34, A, 491-503.

[19] Thoman, R. D., Bain, J. L. and Antle, E. C. (1970) "Maximum likelihood estimation, exact confidence intervals for reliability, and tolerance limits in the Weibull distribution." Technometrics, 12, 363-371.

図1. 適応的予測区間の説明 (本文参照)

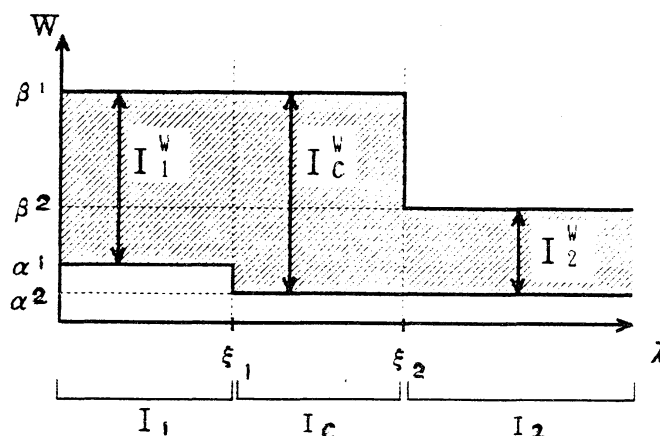


表1. 極値分布経由によるワイブル分布の4つの予測区間の平均長さおよび
効率の比較 (保証水準0.9: $n=15, m=11$ の場合; 計算の仕方は本文参照)

各予測方式の次の α^*, β^* の欄は上段が α^* 、下段が β^* の値を表す。

予測区間は、本文の(3-5)式の形で与えられる。各 λ の値の欄の上段に
予測区間の平均長さを書き、下段に効率を()にに入れて書いてある。

最後の列には保証効率も書いてある。効率や保証効率は、本文(2-5)式およ
び(2-6)式で定義したものである。

S	方式	α^*, β^*	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$	$\lambda=2.5$	保証効率
12	$\delta_{EV}(BLUP, BLUE)$	-0.198	0.775	0.429	0.295	0.224	0.997
		0.277	(0.999)	(0.998)	(0.997)	(1.000)	
	$\delta_{EV}(FLUP, BLUE)$	-0.186	0.774	0.428	0.294	0.224	1.000
		0.276	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.000)	
	$\delta_{EV}(CROSS, BLUE)$	-0.337	0.919	0.500	0.341	0.258	0.842
		0.343	(0.842)	(0.856)	(0.862)	(0.868)	
	$\delta_{EV}(BLUE, BLUE)$	0.086	0.823	0.453	0.311	0.236	0.940
		0.647	(0.940)	(0.945)	(0.945)	(0.949)	
	$\delta_{EV}(BLUP, BLUE)$	-0.375	1.815	0.913	0.601	0.446	0.990
		0.464	(0.991)	(0.913)	(0.990)	(0.991)	
13	$\delta_{EV}(FLUP, BLUE)$	-0.371	1.798	0.905	0.595	0.442	1.000
		0.459	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.000)	
	$\delta_{EV}(CROSS, BLUE)$	-0.476	2.090	1.026	0.668	0.492	0.860
		0.540	(0.860)	(0.882)	(0.891)	(0.898)	
	$\delta_{EV}(BLUE, BLUE)$	0.153	1.855	0.930	0.611	0.452	0.969
		1.026	(0.969)	(0.973)	(0.974)	(0.978)	
14	$\delta_{EV}(BLUP, BLUE)$	-0.532	3.620	1.601	0.993	0.713	0.999
		0.655	(0.999)	(0.999)	(0.999)	(0.999)	
	$\delta_{EV}(FLUP, BLUE)$	-0.531	3.617	1.599	0.992	0.712	0.961
		0.654	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.000)	
	$\delta_{EV}(CROSS, BLUE)$	-0.638	3.951	1.723	1.064	0.762	0.915
		0.695	(0.915)	(0.928)	(0.932)	(0.934)	
	$\delta_{EV}(BLUE, BLUE)$	0.263	3.762	1.649	1.020	0.730	0.961
		1.470	(0.961)	(0.970)	(0.973)	(0.975)	
15	$\delta_{EV}(BLUP, BLUE)$	-0.748	8.472	3.055	1.733	1.183	0.972
		0.906	(0.972)	(0.983)	(0.989)	(0.992)	
	$\delta_{EV}(FLUP, BLUE)$	-0.742	8.533	3.068	1.738	1.186	0.965
		0.911	(0.965)	(0.979)	(0.986)	(0.990)	
	$\delta_{EV}(CROSS, BLUE)$	-0.832	9.479	3.325	1.870	1.272	0.869
		0.962	(0.869)	(0.903)	(0.917)	(0.923)	
	$\delta_{EV}(BLUE, BLUE)$	0.352	8.233	3.004	1.714	1.174	1.000
		2.014	(1.000)	(1.000)	(1.000)	(1.000)	

表2. C I P I (保守的不変予測区間) の効率の比較例

$n=15, m=11, s=15$ のときで、 $\Lambda^* = \Lambda^{*}_1 = \{1.0, 1.5\}$ および
 $\Lambda^* = \Lambda^{*}_2 = \{1.0, 2.0\}$ と限定した場合。それぞれの予測区間の効率は、ここで考えている限りの (t_1, t_2) の組み合わせの中で、 Λ^* に含まれる各 λ に対して最短の R_2 を与える $\delta(t_1, t_2)$ の R_2 を分子にして、本文(2-5)にもとづいて計算されている。保証効率は、(2-6)にもとづいているが、ここでは2つのうち小さい方である。最大の保証効率をアンダーラインで示しておいた。その他、本文参照。

予測方式	効率		保証 効率
	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	
$\delta^{1.0}(\text{BLUP}, \text{BLUE})$	0.981	0.415	0.415
$\delta^{1.0}(\text{FLUP}, \text{BLUE})$	0.981	0.415	0.415
$\delta^{1.0}(\text{CROSS}, \text{BLUE})$	0.931	0.394	0.394
$\delta^{1.5}(\text{BLUP}, \text{BLUE})$	0.952	0.415	0.415
$\delta^{1.5}(\text{FLUP}, \text{BLUE})$	0.971	0.423	0.423
$\delta^{1.5}(\text{CROSS}, \text{BLUE})$	0.976	0.425	<u>0.425</u>
予測方式	効率		保証 効率
	$\lambda=1.0$	$\lambda=2.0$	
$\delta^{1.0}(\text{BLUP}, \text{BLUE})$	0.963	0.242	0.242
$\delta^{1.0}(\text{FLUP}, \text{BLUE})$	0.963	0.242	0.242
$\delta^{1.0}(\text{CROSS}, \text{BLUE})$	0.931	0.234	0.234
$\delta^{2.0}(\text{BLUP}, \text{BLUE})$	0.933	0.251	0.251
$\delta^{2.0}(\text{FLUP}, \text{BLUE})$	0.938	0.253	0.253
$\delta^{2.0}(\text{CROSS}, \text{BLUE})$	0.992	0.267	<u>0.267</u>

表3. B A P I (最適適応的予測区間) の効率および極値分布経由型
予測区間との比較—その1

$n=15, m=11, s=15$ かつ、 $\Lambda^* = \{1.0, 1.5\}$ と限定した場合。効率の計算の仕方については、表2. の説明参照（極値分布経由型の場合も表1. とは別に、あらためて計算し直している）。保証効率は2つの数字を比べれば一目で明らかなので特別の欄は作っていない。なお、統計量 t_2 に相当する部分を「 $\cdot$ 」と略したが、それぞれ対応するBLUEである。この表は、 (t_1, t_2) の各組み合わせについて、保証効率の意味で予測区間がC I P I よりも改良され、その中でも $\delta_A(\text{BLUP}^{1.5}, \cdot)$ がもつとも頑健であることを示している。また、それは、極値分布経由型の中で、最良であった $\delta_{EV}(\text{BLUE}, \cdot)$ よりも保証効率が高いことも示している。その他本文参照。

予測方式	効 率		最適分割	
	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	ξ_1	ξ_2
$\delta_A(\text{BLUP}^{1.0}, \cdot)$	0.989	0.447	0.92	2.38
$\delta_A(\text{FLUP}^{1.0}, \cdot)$	0.989	0.447	0.92	2.38
$\delta_A(\text{CROSS}^{1.0}, \cdot)$	0.932	0.400	2.97	2.97
$\delta_A(\text{BLUP}^{1.5}, \cdot)$	0.979	<u>0.503</u>	0.87	1.95
$\delta_A(\text{FLUP}^{1.5}, \cdot)$	0.986	0.480	0.87	2.13
$\delta_A(\text{CROSS}^{1.5}, \cdot)$	0.982	0.432	3.26	3.26
$\delta_{EV}(\text{BLUP}, \cdot)$	0.475	0.578		
$\delta_{EV}(\text{FLUP}, \cdot)$	0.472	0.576		
$\delta_{EV}(\text{CROSS}, \cdot)$	0.425	0.531		
$\delta_{EV}(\text{BLUE}, \cdot)$	<u>0.489</u>	0.588		

表4. BAPI (最適適応的予測区間) の効率および極値分布経由型予測区間との比較—その2

$\Lambda^* = \{1.0, 2.0\}$ であることをのぞいて、表3. と同様。

この場合、極値分布経由型の方が、なお最良のBAPIよりも保証効率が低いことを示している。

予測方式	効 率		最適分割	
	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	ξ_1	ξ_2
$\delta_A(\text{BLUP}^{1.0}, \cdot)$	0.970	0.354	0.71	2.38
$\delta_A(\text{FLUP}^{1.0}, \cdot)$	0.970	0.354	0.71	2.38
$\delta_A(\text{CROSS}^{1.0}, \cdot)$	0.932	0.258	3.07	3.07
$\delta_A(\text{BLUP}^{2.0}, \cdot)$	0.958	0.436	0.87	2.13
$\delta_A(\text{FLUP}^{2.0}, \cdot)$	0.963	<u>0.467</u>	0.85	2.06
$\delta_A(\text{CROSS}^{2.0}, \cdot)$	0.993	0.297	3.07	3.07
$\delta_{EV}(\text{BLUP}, \cdot)$	0.475	0.628		
$\delta_{EV}(\text{FLUP}, \cdot)$	0.472	0.626		
$\delta_{EV}(\text{CROSS}, \cdot)$	0.425	0.582		
$\delta_{EV}(\text{BLUE}, \cdot)$	<u>0.489</u>	0.635		