

双曲型方程式の必要条件

東大 理 中村 如

目次

§1. Introduction (定義と結果) 1

§2. 定理 1 の証明 4

§3 定理 1 から定理 2 を得る 13.

参考文献 14

§1. Introduction (定義と結果)

この論文で扱う問題は P.D. Lax [4] の論文の定理の拡張である。即ち M を次の形の 1 階の作用素とする。

$$M = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j A_j(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} + B(t, x)$$

ここで $A_j(t, x)$, $B(t, x)$ は analytic 係数の $m \times m$ 行列

D を $t=0$ 上の領域, G を (t, x) -space で D を含む領域とし。

$\phi(x)$ を D における函数, $f(t, x)$ を G における函数とする。

このとき Cauchy 問題とは D における 1 階の連続導函数が

ϕ に等し, $Mu = f$ をみたす u をみつかることである。

そして

定義 M に対する Cauchy 問題が properly posed とは

線型空間 $C^\infty(D)$ と $C^\infty(G)$ との pair に属する任意の ϕ, f に対して

unique な解 $u(t, x) \in C^1(G)$ が存在することである。

この時次の定理が言える。

定理 (P.D. Lax [4])

上のような operator M に対して 平面 $t=0$ が空間的でない

即ち実係数 P_i に対して ある線型結合 $P_1 A_1 + \dots + P_n A_n$ が

実であり 単根を $x=x_0, t=0$ で持つとする。

このとき M に対する Cauchy 問題は x_0 を含む超平面 $t=0$

上の任意の領域 D に対して, incorrectly posed である。

この定理は, formal expansion を利用して, $\{\phi_k\} \cup \{f_k\}$ が
各々 $C^\infty(D)$ と $C^\infty(G)$ で有界で, $C^1(G)$ において発散する解 $\{u_k\}$ を構成
することによって示されている。これをもとにして次のような定義の拡張
と結果を得た。

$P(t, x, \partial_t, \partial_x)$ は real analytic な係数をもつ m 階偏微分
作用素として, $t=0$ は non-characteristic としていけると仮定する。

定義 $P(t, x, \partial_t, \partial_x)$ に対する Cauchy 問題が well-posed

$\Leftrightarrow D$ を $t=0$ における領域, $G \ni D$ を含む (t, x) 空間に
おける領域とする。 $\phi_k(x), f_k(t, x)$ を各々 $D \cup G$ で

定義された ultradistribution とする。ここに任意の ϕ_k, f_k に対して

$$\begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial_x) u(t, x) = f(t, x) \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, x) = \phi_k(x) \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases}$$

に対して 唯一つの解が ultradistribution の範囲で
解ける。

定理1. simple characteristic で, $t=0$ は non-characteristic
とする m 階の偏微分作用素 $P(t, x, \partial_t, \partial_x)$ (実解析係数) に対して
特性方程式

$$P_m(t, x, \lambda, \xi) = 0 \quad (P_m \text{ は } P \text{ の主要部})$$

の根 $\lambda_1(t, x, \xi), \dots, \lambda_m(t, x, \xi)$ の根のうち 少なくとも
1 根が (t, x, ξ) 実のとき, 虚の値をとれば

任意の時間 $t = \varepsilon (> 0)$ で爆発し, (即ち *ultradistribution* に λ なり)
 data は *real analytic* となる解がつけれる。

この定理 1 を用いて 次の定理が言える。

定理 2. 定理 1 の作用素 $P(t, x, \partial_t, \partial_x)$ に対する
Cauchy 問題が *well-posed* ならば, 特性方程式の根は
real である。

この定理 1 は 浜田 [1] の結果を用いて, *ultradistribution*
 を超える解を構成することによって示した。又 *ultradistribution*
 を超えるかどうかの判定には 小松 [2] の常微分作用素に
 関する研究を用いた。

§2. 定理1の証明

simple characteristic を仮定するから, $P_m(t, x, \lambda, \xi) = 0$ の根はすべて原点の近傍で "distinct" かつ holomorphic.

従って real でない根 $\tau(t, x, \xi)$ が存在したとしても holomorphic である.

$$\begin{cases} \varphi_t = \tau(t, x, \varphi_x) \\ \operatorname{Im} \tau(0, 0, 1, 0, \dots, 0) \neq 0 \\ \varphi(0, x) = x_1 \end{cases}$$

となる解を考える.

・ このとき Cauchy-Kowalewski の定理より一定の領域で解ける.

今 この解 $\varphi(t, x) = 0$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ との交わりを考える

$$t=0 \text{ で } x_1=0$$

$$t \geq 0 \text{ で } \operatorname{Im} \varphi \geq 0 \text{ であるから } t=0, x_1=0 \text{ が}$$

$\mathbb{R}^{n+1}$ との交わりになる。

$$\frac{d}{ds} f_j(s) = f_{j+1}(s) \quad j = -m, -m+1, \dots$$

$$f_0(s) = \frac{(-1)^{l-1} (l-1)!}{s^2}$$

.....

$$f_l(s) = \log s$$

$$f_{e+a}(s) = \frac{s^a}{a!} \log s - \frac{A_a}{a!} s^a$$

$$A_a = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a} \quad \text{かつ } A_0 = 0$$

となる函数列 f_j を用いて

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi(t, x)) u_k(t, x) \quad \text{なる}$$

形の解で次の方程式を満足するものを考える。

$$\begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial_x) u = 0 \\ \text{かつ} \quad u(0, x) = (-1)^{l-1} (l-1)! \frac{w(x')}{x_1^l} \end{cases}$$

一般に $Q(x, \partial_x)$ を m 階の微分作用素とするとき

$$\begin{aligned} & Q(x, \partial_x) [f(\varphi) u] \\ &= f^{(m)}(\varphi) h(x, \varphi_x) u + f^{(m+1)}(\varphi) \left\{ \sum_{j=1}^n h^{(j)}(x, \varphi_x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c_1 u \right\} \\ &+ f^{(m+2)}(\varphi) L_2 [u] + \dots + f(\varphi) L_m [u] \end{aligned}$$

但し $h^{(j)}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} h(x, \xi)$ $c_1(x)$ は holomorphic

L_p は holomorphic 係数をもつ p -次微分作用素

$h(x, \xi)$ は $Q(x, \xi)$ の主要部

であるから

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi(t, x)) u_k(t, x) \quad \text{に作用させて}$$

各係数について 0 とおき, 次の方程式を得る

$$(1) \dots \mathcal{L}[u_0] = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} + c(t, x) u_0 = 0$$

$$(2) \dots \mathcal{L}[u_k] = - \sum_{p=2}^m L_p [u_{k+1-p}] \quad (k \geq 1)$$

$$u(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_1) u_k(0, x) = f_0(x_1) w(x')$$

$$\text{従って (3)} \dots u_0(0, x) = w(x')$$

$$(4) \dots u_k(0, x) = 0 \quad (\text{for } k \geq 1)$$

(1) と (3), (2) と (4) は 各々 Cauchy-Kowalevski の定理より
解くことができる。

$$\text{以上より} \quad \begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial_x) u_\ell(t, x) = 0 \\ u_\ell(0, x) = \frac{(-1)^{\ell-1} (\ell-1)!}{x_1^\ell} \\ u_\ell(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi) u_{\ell, k}(t, x) \end{cases}$$

となる解 $u_\ell(t, x)$ がつくられたことになる。

$$\text{今} \quad C_\ell = \begin{cases} \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \frac{1}{m!} & \ell = k \equiv m \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と置いて $u(t, x) = \sum C_\ell u_\ell(t, x)$ とおいてやると

$$\begin{cases} P(t, x, \partial_t, \partial_x) u = 0 \\ u(0, x) = \exp \frac{1}{x_1^m} - c \end{cases} \quad \text{となる解が}$$

構成されたことになる。

次に この解の収束性を考察する。その際に

溝畑 [5] による次の命題を使う。

Prop 1. $a(x), b(x)$ holomorphic とする。

$$|D^\nu a(x)| \leq \frac{(r+|\nu|)!}{(kp)^{|\nu|}} A \quad k > 1$$

$$|D^\nu b(x)| \leq \frac{(s+|\nu|)!}{p^{|\nu|}} B$$

r, s は 非負の整数

$$\therefore \text{又} |D^\nu(ab)(x)| \leq \frac{(r+s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} \frac{AB}{C_r^{r+s}} \frac{r}{\rho-1}$$

$$\text{次に } \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum a_j(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(t, x)$$

$a_j(t, x), c(t, x)$ は holomorphic functions と

$$|D_{t,x}^\nu a_j(t, x)| \leq \frac{(|\nu|-1)!}{(\exists \rho)^{|\nu|-1}} \gamma (|\nu| \geq 1) \quad |a_j(t, x)| \leq \gamma_0$$

$$|D_{t,x}^\nu c(t, x)| \leq \frac{|\nu|!}{(\exists \rho)^{|\nu|}} \gamma \quad (|\nu| \geq 0)$$

なる estimate を満たすとす。

$$\text{Prop. 2. } \mathcal{L}[u] = f(t, x)$$

$$u(0, x) = 0 \quad \text{なる Cauchy 問題を考える}$$

$f(t, x)$ が次の評価を満たすとせよ。

$$|D_t^\delta D_x^\nu f(t, x)| \leq \frac{(r+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (\gamma n)^\delta A$$

(但し $r \geq 1$)

$$\therefore \text{又} |D_t^\delta D_x^\nu u(t, x)| \leq 2 \frac{(r-1+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (\gamma n)^\delta A$$

$$\therefore \text{又} K(|t|) = \exp(\gamma n |t|) (1 + \gamma n |t|) \quad \gamma, \rho < 1$$

$$\gamma \geq \min(6\gamma_0, 27), \quad 0 < \rho \leq \frac{1}{18} \quad \text{を満たす定数}$$

$$\text{Prop. 3. } \mathcal{L}[u] = 0 \quad \text{と}$$

$$\text{初期条件 } u(0, x) \text{ が } |D_x^\nu u(0, x)| \leq \frac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A \quad (r \geq 0)$$

を満たす。

$$\Rightarrow |D_t^\delta D_x^\nu u(t, x)| \leq 2 \frac{(r+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (\gamma n)^\delta A$$

$\therefore \gamma, \rho$ は Prop. 2. の条件を満たす。

ここで $u_{\ell,k}(t,x)$ について induction より次の estimate が
いえる。

$$(5) \dots |D_t^\delta D_x^\nu u_{\ell,k}(t,x)| \leq C(k) \frac{(k+\delta+|\nu|)!}{\rho^{k+\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{k+\delta+|\nu|} (\gamma n)^\delta$$

$C(k) = C_0^k N$ ($C_0 > 1$), N は $P(t, \alpha, \partial_t, \partial_x)$ の η に関する定数

$k=0$ は Prop. 3 より すぐでる。

k まで仮定して $(k+1)$ をたず。

$2 \leq p \leq m$ に対して

$$|D_t^\delta D_x^\nu L_p [u_{\ell,k+2-p}]| \leq N_p C(k+2-p) \frac{(k+2+\delta+|\nu|)!}{\rho^{k+2+\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{k+2+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta+p}$$

N_p は L_p に関する定数。

$$L = \sum_{p=2}^m N_p \text{ とおき, } p=2 \text{ から } m \text{ まで加えて}$$

$$\left| \sum_{p=2}^m D_t^\delta D_x^\nu L_p [u_{\ell,k+2-p}] \right| \leq L C(k) \frac{(k+2+\delta+|\nu|)!}{\rho^{k+2+\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{k+2+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta+m}$$

L は $P(t, \alpha, \partial_t, \partial_x)$ の η に関する定数

Prop. 2 より

$$|D_t^\delta D_x^\nu u_{\ell,k+1}(t,x)| \leq 2L C(k) \frac{(k+1+|\nu|+\delta)!}{\rho^{k+1+|\nu|+\delta}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{k+1+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta+m}$$

$$K(|t|) \leq K(1) \quad \text{for } |t| \leq 1 \text{ より}$$

$$|D_t^\delta D_x^\nu u_{\ell,k+1}(t,x)| \leq 2L \frac{K(1)}{\rho} C(k) \frac{(k+1+|\nu|+\delta)!}{\rho^{k+1+|\nu|+\delta}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{k+1+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta+m}$$

$$C_0 = 2 \max \left(2L \frac{K(\delta)}{\rho} (\delta n)^m, 1 \right) \quad \text{と } \delta < \varepsilon$$

求める estimate が 1/2 に 2 に なる。

$$\text{よって } |(t, x)| \leq \delta \quad \text{と } \delta$$

$$\begin{aligned} (6) \dots & |D_t^k D_x^\nu u_{l,k}(t, x)| \\ & \leq C_0^k N \frac{(k + \delta + |\nu|)!}{\rho^{k + \delta + |\nu|}} \exp(\gamma \delta) K(\delta)^{k + \delta + |\nu|} (\delta n)^{k + |\nu|} \\ & \leq N \frac{(k + \delta + |\nu|)!}{\rho^{k + \delta + |\nu|}} C(\delta)^k \exp(\gamma \delta) \\ & \text{for } |(t, x)| < \delta \\ & \text{よって } C(\delta) = \frac{K(\delta) C_0}{\rho} \quad \rho(\delta) = \frac{\rho}{K(\delta) \delta n} \end{aligned}$$

$$u(t, x) = \sum C_l u_l(t, x) \quad \text{と}$$

$$\sup_{\substack{\varepsilon \leq |x| \leq \rho \\ |x'| \leq \rho}} |C_l u_l(0, x)| \leq \sup_{\substack{\varepsilon \leq |x| \leq \rho \\ |x'| \leq \rho}} |u(0, x)| = M(\varepsilon)$$

$$- \delta \cdot u_l(0, x) = \frac{(-1)^{l-1} (l-1)!}{x_l^l} \quad \text{と}$$

$$(7) \dots C_l (l-1)! \leq \varepsilon^l M(\varepsilon)$$

$$(8) \dots |u_{l,k}(t, x)| \leq N k! C(\delta)^k \exp(\gamma \delta)$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{l=1}^{\infty} C_l \left[\sum_{\alpha=1}^l (-1)^\alpha \frac{(\alpha-1)!}{\varphi^\alpha} u_{l, l-\alpha} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} u_{l, l+k} \log \varphi \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{k!} \varphi^k u_{l, l+k} \end{aligned}$$

よって $u(t, x)$ の収束性を第 1 項について計算すると

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} (l-1)!}{\varphi^l} \sum_{k=0}^{\infty} C_k u_{k, k-l} \quad \text{と } (7) \text{ と}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{\infty} |C_k u_{k, k-l}| &\leq \sum_{k=l}^{\infty} \frac{e^k M(\varepsilon)}{(k-l)!} N (k-l)! (c\sigma)^{k-l} \exp(\sigma\delta) \\
&\leq \frac{N M(\varepsilon) \exp(\sigma\delta)}{(l-1)!} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(k-l)! (l-1)!}{(k-1)!} \varepsilon^{k-l} (c\sigma)^{k-l} \\
&\leq \frac{N M(\varepsilon) \exp(\sigma\delta)}{(l-1)!} \frac{\varepsilon^l}{1 - \varepsilon c\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l-1)!}{|\varphi|^l} \sum_{k=l}^{\infty} |C_k u_{k, k-l}| &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{N M(\varepsilon) \exp(\sigma\delta)}{1 - \varepsilon c\sigma} \left(\frac{\varepsilon}{|\varphi|}\right)^l \\
\varepsilon/|\varphi| < 1 \quad \text{即ち} \quad \varepsilon < |\varphi| \quad \text{なら 4) 成立する}
\end{aligned}$$

第2項について

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi|^k}{k!} |u_{2, l+k}| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} N \frac{(l+k)!}{k!} (c\sigma)^{l+k} \exp(\sigma\delta) |\varphi|^{l/2} \\
&\leq (c\sigma)^l l! N \exp(\sigma\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l+k)!}{k! l!} (c\sigma |\varphi|)^k \\
&\leq (c\sigma)^l l! N \exp(\sigma\delta) \frac{1}{(1 - c\sigma |\varphi|)^{l+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{l=1}^{\infty} C_l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi|^k}{k!} |u_{2, l+k}| &\leq N M(\varepsilon) \exp(\sigma\delta) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l (\varepsilon c\sigma)^l}{(1 - c\sigma |\varphi|)^{l+1}} \\
\text{よって} \quad \left| \frac{\varepsilon c\sigma}{1 - c\sigma |\varphi|} \right| < 1 \quad \text{即ち} \quad |\varphi| < \frac{1 - \varepsilon c\sigma}{c\sigma}
\end{aligned}$$

のとき 4) 成立する。

第3項についても同様に成り立つ。

以上より $t < 0$ で $u(t, x)$ が real analytic である。

ことがわかった。

従って

$$\begin{cases} P(t, x; \partial_t, \partial_x) u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \exp \frac{1}{x_1^R} - c \\ t < 0 \text{ で } u(t, x) \text{ real analytic} \end{cases}$$

と存在解 $u(t, x)$ が構成された。

小本 § 27 には次の定理が言明されている。

定理. $S > 1$ とするとき

$$\text{微分作用素 } P(x, \frac{d}{dx}) = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + \dots + a_0(x)$$

に対し 次は同値

$$(a) \quad \mathcal{B}^P(a, b) \subset \mathcal{O}^{(S)'}(a, b) \quad (\mathcal{O}^{(S)'}(a, b))$$

$$(b) \quad (a, b) \text{ に属するすべての特異点の非正則度 } \sigma \text{ が}$$

$$\sigma \leq \frac{S}{S-1}, \quad (\sigma < \frac{S}{S-1})$$

を満たす。

$$\text{いま } P(x, \frac{d}{dx}) = x^{R+1} \frac{d}{dx} + k, \quad (a, b) = (1, -1)$$

に適用すると

$$\exp \frac{1}{x_1^R} \in \mathcal{O}^{(S)'}(-1, 1) \iff k+1 \leq \frac{S}{S-1}$$

$$\exp \frac{1}{x_1^R} \in \mathcal{O}^{(S)}(-1, 1) \iff k+1 < \frac{S}{S-1}$$

$$\text{従って } k > \frac{1}{S-1} \text{ とすれば}$$

$$\exp \frac{1}{x^2} \notin \mathcal{D}^{(s)}, \mathcal{D}^{(s)'} \text{ となり}$$

ultradistribution をこえることがいえる。

従って $P(t, x, \partial_t, \partial_x) u(t, x) = 0$ を満足し。

$t < 0$ で data が real analytic であり,

$t = 0$ で ultradistribution を超える解が

つくれたことになる。任意の時間 $\varepsilon(>0)$ を初期値として

とれば, ε で爆発する解がつけられたことになる。

以上より定理 1 は言明された。

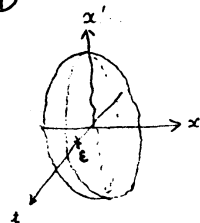
§3. 定理 1 から定理 2 をたず

well-posed より $t=0$ における領域 D

$\mathbb{R}^n$ を含む (t, x) -space の領域 G があり

D に Cauchy data, G に函数 ε を与えたとき

G で 解 $u(t, x)$ が存在して unique である。



— オ 定理 1 より 特性方程式の根が

real でなければ $t=0$ で real analytic data ε にも

任意の時間 $\varepsilon(>0)$ で ultradistribution を与えたとき

解がつかぬ。

そこで G と $x=0$ との切り口を G_t とし

$\varepsilon < \text{dist}(0, \partial G_t)$ とすると well-posed と矛盾する。

即ち 特性方程式の根は real である。

参考文献

- [1] Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. vol. 5 (1969), 21-40
- [2] H. Komatsu, 常微分作用素について
数理研講究金録 145 (1972), 123-146
- [3] H. Komatsu, Ultradistributions, I,
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A, vol 20
No. 1 25-105
- [4] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), 627-646
- [5] S. Mizohata, Analyticity of the fundamental solutions of hyperbolic systems, J. Math. Kyoto Univ. 1-3 (1962), 327-355