

ソリトン対の量子生成における不純物の効果

大阪市立大学工学部応用物理学科 加藤 岳生¹

1 イントロダクション

準安定相から安定な相へ一次転移を起こす時、安定相の核形成が転移の引き金になることがよく知られている。このような核形成現象は、宇宙という究極的にマクロな系を含む、物理のあらゆる分野において議論されている。ここで扱う量子トンネル効果による核形成の議論は、文献 [1] によって取り扱われたのが最初であるが、理論と比較しうる良質なデータが得られるようになったのは、ごく最近のことである。これまでに、 ^4He - ^3He 希薄混合系 [2] を始めとして、 ^4He 固体核形成 [3]、液体 ^4He 中のキャビテーション生成 [4] などについて、量子核形成の観測が報告されている。加えて、ソリトン対の量子生成も核形成の一種とみなすことができ、固体中の転位の運動 [5] や電荷密度波のスライディング伝導 [6, 7]、長いジョセフソン接合 [8] などの物理系で議論されている。

さて、量子核形成のどのような点が興味深いのであろうか？核形成の際立った特徴は、この現象に多くの自由度が関わっていることである。核形成では、核の表面エネルギーのために、核の半径が小さいとせっかくできた核が消滅してしまふ。そのため一次転位を引き起こすためには、ある程度の大きさの半径を持った核が必要となる。その半径内にある原子数は、しばしば数十から数百におよぶ。つまり、核形成での量子効果を議論することは、必然的に多自由度でなかつ(セミ)マクロな量子効果を扱うことに相当する [9]。

この特徴を深く考察することは興味深いことであるが、ここではもう 1 つの特徴に注目したい。それは、核形成は一樣なバックグラウンドから生成することである。この特徴は、実際に理論的に核形成確率を求める際に重要となる。半古典理論によって核形成確率は $\Gamma = A \exp(-B)$ の形にかかれ、 B の値は次の節で述べる bounce と呼ばれる鞍点解によってきまり、またファクター A は鞍点解の周りの揺らぎで決まる。このとき、核形成が一樣なバックグラウンドから生じることに起因して、鞍点解の揺らぎのうち 1 つがゼロモード (Goldstone mode) になる。これをうまく処理することによって、 A は系のサイズに比例するようになる。これは、一般の量子トンネル効果には見られない、核形成特有の現象である。

しかし、もし「一樣なバックグラウンド」という前提が崩れた場合はどうだろうか。例えば局所的な非一樣性があつたときに、以上の計算はどのように変更されるだろうか。このような問いは、現実の実験系でも問題となる。つまり系には、ある程度の非一樣性・不純物が存在し、核形成に影響を及ぼすことが予想される。では不純物の影響は、具体的にどのような形で観測される

¹E-mail: kato@a-phys.eng.osaka-cu.ac.jp

のだろうか。また核形成を詳しく比べることで、不純物の強さを評価することができるだろうか。これを詳しく調べるのが本研究の目的である [10]。この問題は電荷密度波の量子スライディング現象で、有効トンネル変数の近似を用いて解析された [11] が、その近似の妥当性はよくわかっていない。ここでは、数値計算を用いて bounce の方法の範囲内で (数値誤差を除き) 近似のない評価を行うことで、不純物の効果を定量的に解析することを試みる。

2 定式化

核形成の1つのモデルとして、sine-Gordon 方程式

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi - f - \varepsilon \delta(x) \sin \phi = 0 \quad (1)$$

を取り上げる²。この方程式は、長いジョセフソン接合を取り扱うときに現れ [12]、この場合は f は電流バイアスを表し、 ε は局所的に超伝導臨界電流が変化する効果を表す。

まず場の方程式を経路積分によって量子化する。本研究では特に高バイアス側に注目し、ポテンシャルを3次関数として近似する。新しい場の変数を ϕ から $\varphi = (\phi - \pi/2)/\sqrt{2(1-f)} + 1$ に変更すると、分配関数は、

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi(x, \tau) \exp \left(-\frac{S[\varphi(x, \tau)]}{\hbar} \right) \quad (2)$$

$$S[\varphi(x, \tau)] = 2(1-f) \int dx \int d\tau \left[\frac{\varphi_x^2}{2} + \frac{\varphi_\tau^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{6} - \tilde{\varepsilon} \delta(x) \varphi(x) \right] \quad (3)$$

となる。ここで $\hbar$ は、注目している系の特徴的な長さ、時間、エネルギーによって決まる無次元化されたプランク定数である。不純物の有効的な強さは $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(2(1-f))^{-3/4}$ で与えられ、バイアスによって変化させることができる³。

作用 (3) の鞍点解は、方程式

$$\varphi_{\tau\tau} + \varphi_{xx} - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \tilde{\varepsilon} \delta(x) = 0 \quad (4)$$

によって決まる。この方程式には、安定解と呼ばれる時刻に依存しない解 $\varphi_0(x)$ と時刻に依存する bounce 解と呼ばれる解の $\varphi_B(x, \tau)$ の二つが存在する。この鞍点解とそのまわりの二次の揺らぎを考慮して、トンネル確率を評価する [1, 13, 14]。その結果、トンネル確率 $\Gamma = A \exp(-B)$ は、

$$B = \frac{S[\varphi_B(x, \tau)] - S[\varphi(x)]}{\hbar} \quad (5)$$

$$A = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|\omega_i^{(B)}|}{\omega_i^{(0)}} \right)^{-1/2} \quad (6)$$

と計算される。 $\omega_i^{(B)}$, $\omega_i^{(0)}$ はそれぞれ bounce 解、安定解まわりの揺らぎの固有モード振動数である (ただし bounce 解まわりの τ 方向の Zero モードは除く)。

²sine-Gordon モデルで得られる結果は、他の ϕ^4 モデルなどでの結果と定性的に同じであることがわかる。

³不純物の強さ ε が変化した時も、バイアスと作用を適当にスケール変換すると、核形成確率は同じバイアス依存性を持つことがわかる。つまり本質的に、不純物の強さそれ自体ではなく、有効的な不純物強度 $\tilde{\varepsilon}$ が不純物効果を決定する。

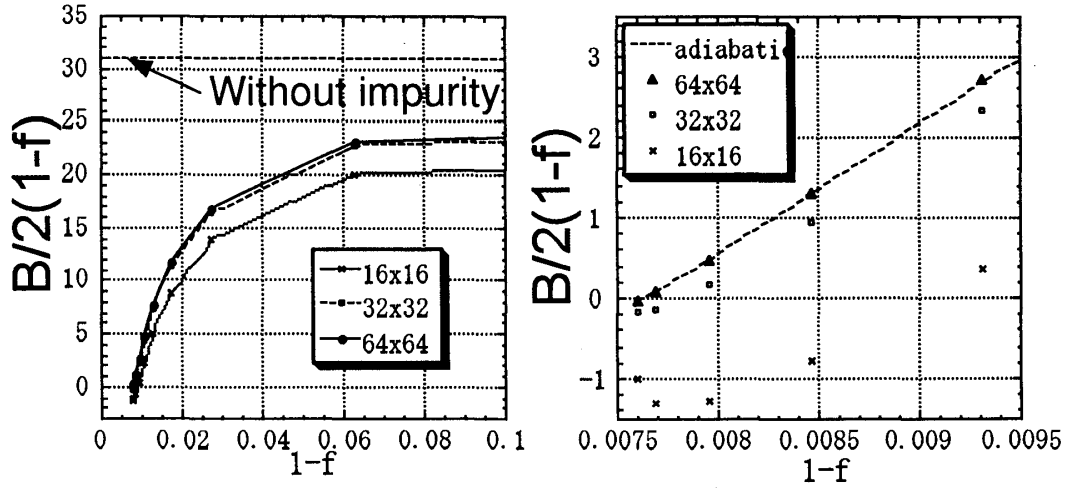


図 1: トンネル確率の指数 B のバイアス依存性。数値計算に用いたメッシュの数 (16×16 , 32×32 , 64×64) の依存性も示した。また右図は臨界バイアス近傍を拡大したもので、点線は一モード近似による結果 (8) を示す。

方程式 (4) は解析的に解けないので、次の節で数値計算によって解を求め、指数 B を決める。また A は、理論的に求めるのが難しい上に、実験的に測定するのが困難でもあるので、ここではシステムサイズ依存性のみを議論する。

3 結果

図 1 に $\varepsilon = 0.1$ での B のバイアス依存性を示す。バイアス f が臨界バイアス $f_c = 1$ に近づくにつれて、図 1 の左図中の水平な点線で示されるような不純物がない場合のバイアス依存性、

$$B = \frac{31.00(1-f)}{\hbar} \quad (7)$$

からのずれが大きくなる。また臨界バイアス f_c は $\tilde{\varepsilon}_c = \varepsilon(2(1-f_c))^{3/4} = 4/\sqrt{3}$ で決まる新しい値になる。この新しい臨界バイアスに向かって、指数 B は急速にゼロになっていく。臨界バイアス近傍の振る舞いは、不純物近傍のもっとも低い振動モードをトンネルのモードとみなして一変数近似を行った結果 [10]

$$B \simeq \frac{15.8(f_c - f)^{5/4}}{\hbar} \quad (8)$$

によく fit できる。

ここで得られた結果で特徴的なことは、 B のバイアス依存性が不純物の有効的な強さによって変化する点である。この変化は次のように解釈できる。バウンス解の空間的な広がり $(1-f)^{-1/4}$ 程度である。よって、一般に d 次元では、高バイアス側では、トンネル確率の指数は、

$$B \propto (1-f)^{(5-d)/4} \quad (9)$$

のように振舞う。不純物の影響が強いときは、バウンス解の変化が不純物近傍に限られて、空間

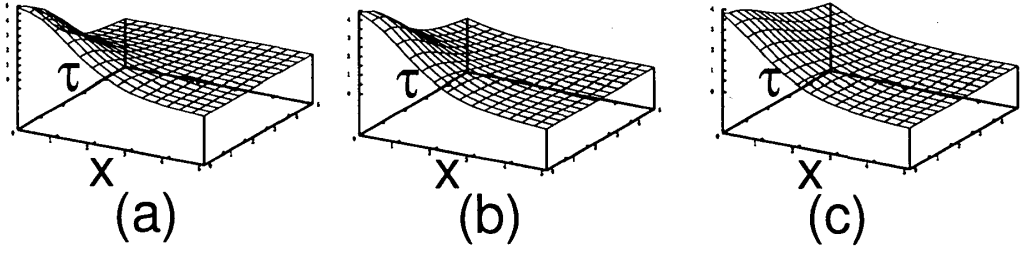


図 2: (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 1.24$, (c) $\varepsilon = 1.98$ でのバウンス解の様子。 $x \geq 0, \tau \geq 0$ の領域のみを示す。なお臨界バイアスにおける有効的な不純物強度 ε_c は 2.31 である。

的な広がりがないので、有効的に次元が $d = 0$ となり、その結果バイアス依存性のべきが変化するのである。この変化は、一種の次元クロスオーバーであり、高次元にいくほど顕著になる。

実際に得られたバウンス解の様子を用いて見てみよう。図 2 に不純物の強さを変えていったときのバウンス解 $\varphi(x, \tau)$ の様子を示す。不純物がない場合には、バウンス解はある領域にわたって全体的に φ が変化していることがわかる。しかし不純物が強くなってくると、 $\varphi(x, \tau)$ の変化は、不純物近傍に限られてくるようになる。つまり、不純物周りの場の小さな変化によってトンネル確率が決まるようになる。このために有効的な空間次元が $d = 1$ から $d = 0$ に下がると、考えられる。

次にファクター A を議論する。以上の計算では、不純物周りの核形成がそのほかの場所での核形成に比べて、優勢であることを仮定してきた。この仮定が正当化される条件は、 A の計算によって明らかになる。まず直観的に議論しよう。もし不純物まわりで核形成に対するエネルギー障壁が ΔU だけ下がると仮定する。不純物以外の場所では、単位長さあたりの核形成確率が Γ_0 で与えられるとすると、不純物周りでの核形成確率 Γ_{imp} と不純物から離れた場所での核形成確率 Γ_{bulk} はそれぞれ

$$\Gamma_{\text{bulk}} \simeq \Gamma_0 L \quad (10)$$

$$\Gamma_{\text{imp}} \simeq \Gamma_0 \exp(\Delta U/\hbar) \quad (11)$$

と見積もることができる。 L はシステムサイズである。もし Γ_{bulk} の方が大きければ、不純物周りの寄与 Γ_{imp} は隠されてしまい、不純物効果は観測されなくなる。しかし、エネルギー障壁 ΔU が十分大きければ、トンネル確率が ΔU の指数関数で決まるために、不純物周りの寄与が優勢になりえる。そのための条件は

$$\Delta U \gg \hbar \log L \quad (12)$$

で与えられる。条件 (12) は、システムサイズが $\log$ 依存で入るので、実験的に実現困難な条件ではない。

この結果を、実際にファクター A を評価して確かめることができる。一般に A の評価は難しいので、ここでは ε が十分小さいとして、不純物を摂動とみなしてよい場合を扱う。このとき、単純にバウンスの方法を用いることはできない。不純物強度が 0 になる極限で、空間の並進対称性から Goldstone モードが存在するからである。不純物があるとこのモードは有限の振動数を持つように

なるが、その場合でもこのモードを慎重に Fadeev-Popov の方法で評価すると、トンネル確率は、

$$\Gamma = \Gamma_0 L + \alpha \Gamma_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left\{ \exp \left[-\frac{2(1-f)\tilde{\varepsilon}}{\hbar} \int d\tau \varphi_B(x_0, \tau) \right] - 1 \right\} \quad (13)$$

と表される (α は $O(1)$ の定数)。ここで、第一項は不純物以外の場所での核形成確率 Γ_{bulk} とみなすことができ、第二項が不純物周りの核形成確率 Γ_{imp} である。 Γ_{imp} が Γ_{bulk} に比べて十分大きい極限で、これまでの核形成確率の指数 B の結果が正しくなることがわかる。つまり、不純物の影響は確かに条件 (12) の下で顕著になる。

最後に不純物による次元クロスオーバーが観測されるために必要な条件を導こう。次元クロスオーバーは $\varepsilon \sim 1$ で起こる。このときに、条件 (12) を満たしているためには、

$$\varepsilon \gg \hbar \log L \quad (14)$$

を満たしていれば良い。よって、この条件が成り立てば、実験的に不純物による次元クロスオーバーを観測することが可能である。

4 残された課題

本研究では、核形成に不純物を導入した場合の核形成確率を計算し、不純物による次元クロスオーバーの視点から理解できることを示した。実験的に観測されれば、不純物の強さを定量的に求めることが可能である。また次元クロスオーバーを観測するための条件も議論した。

今後に残した課題にはいくつかある。まず目先の問題として、以下のことが挙げられる。(1) ここで得られた結果は、高次元に拡張できるかどうか。(2) 不純物強度が強い場合でも、条件 (12) に相当する式が成り立つかどうか。(3) ここでは高バイアスにのみ注目したが、低バイアスではどうなるか。(4) 系に散逸がある場合には、どうなるか。また、本研究では単一の不純物についての研究を行ったが、不純物の数が多くなり、不純物間の相関が生じ始めたときに、どのようなことが起こるかを調べることも必要であろう。実際、電荷密度波の量子スライディング現象の実験において、単純なソリトン対の量子形成のシナリオに疑問が投げかけられており [15, 16]、不純物効果との関連する可能性がある。

また「bounce の方法による評価は本当に正しいか？」という疑問もある。bounce の方法は、次元の問題では、通常の WKB 近似と同じ結果を与えることが知られているが、多自由度系で bounce の方法が正しい保証はない⁴。不純物がある系での核形成では、ゴールドストーンモードの名残である低エネルギーモードと、トンネルモードが強く結合しているので、二次の揺らぎで近似して求めた因子 A は、バウンスの方法ではそれほどよい値を与えないだろう。これまで bounce の方法がよいとされてきたのは、 A を実験的に決めるのが困難であるからに他ならない。核形成という普遍的な現象を通して、bounce の方法とその適用範囲をもう一度省みる必要があるのではないかと考えている。

⁴1 つのトンネルに関わる自由度が、他の自由度と独立な場合のような特殊な状況では正当化される [14]。

参考文献

- [1] I. M. Lifshitz, and Yu. Kagan, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **62**, 385 (1972) [Sov. Phys. JETP **35**, 206 (1972)].
- [2] T. Satoh, M. Morishita, M. Ogata and S. Katoh, Phys. Rev. Lett. **69**, 335 (1992).
- [3] J. P. Ruutu, P. J. Hakonen, J. S. Penttilä, A. V. Bobkin, J. P. Saramäki, and E. B. Sonin, Phys. Rev. B **77**, 2514 (1996).
- [4] S. Balibar, C. Guthmann, H. Lambare, P. Roche, E. Rolley, and H.J. Maris, J. Low Temp. Phys. **101**, 271 (1995).
- [5] S. Takeuchi, T. Suzuki, and H. Koizumi, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 1727 (2000).
- [6] Ji-Min Duan, Phys. Rev. B **48**, 4860 (1993).
- [7] S. V. Zaitsev-Zotov, Phys. Rev. Lett. **71**, 605 (1993).
- [8] M. G. Castellano, G. Torrioli, C. Cosmelli, A. Costantini, F. Chiarello, P. Carelli, G. Rotoli, M. Cirillo, and R. L. Kautz, Phys. Rev. B **54**, 15417 (1996).
- [9] 高木 伸, 巨視的トンネル現象, (岩波書店, 新物理学選書)
- [10] T. Kato, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 2735 (2000).
- [11] M. Yumoto, H. Fukuyama, H. Matsukawa, and N. Nagaosa, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 2953 (2000).
- [12] D. W. McLaughlin, and A. C. Scott, Phys. Rev. A **18**, 1652 (1978).
- [13] C. G. Callan, and S. Coleman, Phys. Rev. D **16**, 1762 (1977).
- [14] U. Weiss, *Dissipative Quantum Systems*, (World Scientific, Singapore, 1993).
- [15] S. V. Zaitsev-Zotov, Phys. Rev. Lett. **72**, 587 (1994).
- [16] S. V. Zaitsev-Zotov, G. Remenyi, and P. Monceau, Phys. Rev. B **56**, 6388 (1997).