

2 重周期円柱列

を過ぎるストークス流れ

東大 理 橋 本 英 典

§ 1 はしがき

2次元および3次元の周期格子状に周期的に配置された物体を過ぎるストークス流れに対応する周期巡回数方程式のフーリエ級数による構成とその球群、円柱群および3次元の任意物体群を構成する物体に働く力に対する応用等について^{1, 2}は文献1), 2) に述べたが、こゝでは複素関数論の応用として2次元格子に対する周期複素巡回数方程式の基本解を楕円関数を用いて構成し、従前の結果とを比較をこゝろみる。また円柱列の場合に於て、軸に垂直な流れと並行な流れとの関係をしらべる。また格子の间隔に比し、半径が小さいときに於いて、力の方向と平均流の方向が一般には平行であることとを示す。また全体を多孔媒質と見たときの平均流と圧力勾配との関係におけるダルシーの法則が一般には非等力場でテニソール形をとることを示し、その係数を求める。

§ 2 基本解

複素面 $z = x + iy$ の周期点 X_{mn} : $z = \Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$
 ($n, m = \pm 1, \pm 2, \dots$) に物障を周期的に配置するとき, この系
 のストークス流の基本解は各物障に働く力 $K = F_x + iF_y$
 流速度 $w = u - iv$, 圧力 p と z と X_{mn} の support とする
 の関数の和を右辺に持つ複素方程式 (一は複素共役を表わす)

$$\mu \Delta \bar{w} \equiv \frac{\mu}{4} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \bar{w} = K \sum_{m,n} \delta(z - X_{mn}) + 2 \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (2.1)$$

を満足する。一方渦度

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.2)$$

は連続方程式

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.3)$$

を考慮すれば $\bar{w}$ から微分

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{i}{2} \omega \quad (2.4)$$

によつて導かれる。(2.4) を (2.1) に代入して $\bar{w}$ を消去し, X_{mn}
 の support とするデルタ関数の複素表示

$$\delta(z - X_{mn}) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z - X_{mn}} \right) \quad (2.5)$$

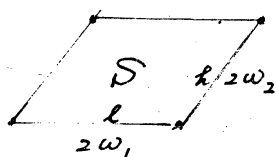
を用ゐる。

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (p - i\mu\omega) = -\frac{K}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{m,n} \frac{1}{z - z_{mn}} \quad (2.6)$$

を得る。これを積分すれば

$$p - i\mu\omega = g'_F(z) = -\frac{K}{2\pi} \zeta(z) - pz \quad (2.7)$$

を得る。ところで $\zeta(z)$ は z_{mn} に 1 位の極を持ち、Weierstrass の ζ 関数である、擬周期的



$$\zeta(z + 2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j \quad (2.8)$$

を得る。ここで、 ω が周期的、 p の分配が周期的であるから、 ζ は $2\omega_j$ を周期とし、 pz の項を加えてある。単位 $z \rightarrow z + 2\omega_j$ に対する変換 δ_j があり、 ω の周期性と (2.8) を考慮すると、

$$0 = \text{Im}[\delta_j g'] = \text{Im}[2p\omega_j + 2A\eta_j] = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{よって} \quad A = K/(2\pi) \quad (2.10)$$

を得る。また

$$\frac{\pi}{2i} = \{\omega, \eta\} \equiv \omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = -\{\bar{\omega}, \bar{\eta}\} \quad (2.11)$$

$$\frac{S}{2i} = \{\omega, \bar{\omega}\} = -\{\bar{\omega}, \omega\} \quad (2.12)$$

を用いて (2.9) の解は P と ω

$$P = \frac{1}{S} (\beta A + \pi \bar{A}) \quad (2.13)$$

$$\text{ただし} \quad \beta = 2i \{ \bar{\omega}, \eta \} \quad (2.14)$$

とわかる。よって β は ω の共役な値である。 $\text{ただし } S$ は周期平行四辺形の面積である。

§ 3. 一般解 I (p と ω)

一般解の基底解の任意個の微分を重ねることによって、 2 階の方程式を得る。

$$p(z) = -\zeta'(z)$$

これを n 回微分を用いて (2.7) を得る。

$$p - i\mu\omega = g'(z) = -Pz - A\zeta(z) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \wp^{(n)}(z) \quad (3.1)$$

の形になる。よって A_n は任意定数である。 $\text{ただし } A_n$ は任意定数である。 (3.1) より

$$- \delta_j p = \frac{\pi}{S} \operatorname{Re} [A \bar{\omega}_j] \quad (3.2)$$

を得、これを平均圧力勾配 $-\dot{P}_x, -\dot{P}_y$ の圧力差

$$- \delta_j [\dot{P}_x x + \dot{P}_y y] = -2 \operatorname{Re} [\bar{\omega}_j (\dot{P}_x + i \dot{P}_y)] \quad (3.3)$$

と比較して

$$\dot{\pi} = \dot{P}_x + i \dot{P}_y = - \frac{2\pi}{S} A = - \frac{1}{S} (F_x + i F_y) \quad (3.4)$$

可解な "平均圧力分布" と物体に働く力は互に平行である。力の大きさは圧力分布を ρ 倍したものに等しい" と、一般の場合を得る。

(3.1) 物体に働く力の公式⁵⁾

$$K = F_x + iF_y = i \oint_C g'(z) dz \quad (3.5)$$

(注) 1 種な路の物体を反時計回りにまわす任意の閉曲線に代入すれば当然、この圧力 ρ (3.1) によって $2\pi A$ となる。また、任意の閉曲線平行四辺形の周囲 C にとれば、同様に ρ と圧力 ρ の積分 ρ の $\oint_C g'(z) dz$ に代入し、同様の結果が得られる。

5

§ 4. 一般解 II. ($w = u - iv$) と軸方向の流 w

(3.1) を (2.4) に代入し、 w を表すのは z の任意関数 $f(z)$ を加えて

$$\begin{aligned} 4\mu w &= \bar{z} g' - \bar{g} + f(z) \quad (= \int (g' - \bar{g}') d\bar{z}) \\ &= -p z \bar{z} - A \bar{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi^{(n)}(z) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{p} \bar{z}^2 + \bar{A} \log \bar{\sigma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \varphi^{(n+1)}(z) + f'(z) \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

を得る。右の $\sigma(z)$ の関数 $(\log \sigma)' = \zeta$

で表す。

$$\log \sigma(z + 2\omega_j) = \pi i + 2\eta_j(z + \omega_j) + \sigma(z) \quad (4.2)$$

を得る。 w の周期性を満たすためには f' は $z^2, \log \sigma, \zeta$ の項と種々な関数以外に加える必要があり、結局

$$4\mu w = \bar{A} L + \frac{SA}{2\pi} L_z^2 + \frac{S}{\pi} L_z \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi^{(n)}(z) \\ - \bar{A}_0 G + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \bar{\varphi}^{(n-1)}(\bar{z}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi^{(n)}(z) + C \quad (4.3)$$

次に

$$L \equiv L(z, \bar{z}) = \ln a \bar{a} + \frac{1}{2s} (\beta z^2 - 2\pi z \bar{z} + \bar{\beta} \bar{z}^2) \quad (4.4)$$

$$L_z \equiv \partial L / \partial z = \zeta + \frac{1}{s} (\beta z - \pi \bar{z}) \quad (4.5)$$

$$G \equiv \bar{\zeta} + \frac{1}{\pi} (\bar{\beta} \zeta - \gamma \bar{z}) \quad (4.6)$$

$$\gamma = 2i + \bar{\beta}, \bar{\beta} \quad (4.7)$$

を得る。ここに函数 $L(z, \bar{z})$ は

$$\Delta L = -\frac{4\pi}{s}$$

を満足し、圧力勾配が軸方向に加わったとき、流れ $w_{||}$ は支配する方程式

$$\mu \Delta w_{||} = -\dot{P}_{||} \quad (4.8)$$

の解が一般に

$$4\mu w_{||} = \frac{S\dot{P}}{\pi} [L(z, \bar{z}) + C_{||} + \left\{ \sum_0^{\infty} b_n \varphi^{(n)}(z) + \text{複素共役} \right\}] \quad (4.9)$$

で与えられることを示す。このとき柱の軸、円筒の S_b とすれば、 $w_{||}$ が軸方向に働く単位長当りの力 $F_{||}$ は、圧力勾配とのバランスから

$$F_{||} = (S - S_b) \dot{P} \quad (4.10)$$

で与えられる。

§5 円柱格子

与に半径 ε の格子の周りを z とし $(\varepsilon \ll |\omega_1|)$ 円柱格子に
 沿って、格子周りで $w = 0$ とすれば (4.1) から $C = O(1)$, $A = O(1)$, $A_1 = O(\varepsilon^2)$
 $A_2 = O(\varepsilon^4) \dots$, $B_0 = O(1)$, $B_2 = O(A_1) = O(\varepsilon^2)$, $A_{2n} = 0$, $B_{2n+1} = 0$
 $B_{2n} = O(A_{2n-1})$ と $n \rightarrow \infty$ がわかれ、各 n の ε 比較から

$$C = -\frac{\beta \varepsilon E}{\pi} A - [\ln \varepsilon^2 - \phi] \bar{A} + O(\varepsilon^2) \quad (5.1)$$

$$B_0 = -\frac{\beta A}{2\pi} E^2 + O(\varepsilon^2) \quad (5.2)$$

から

$$E = 1 - \phi, \quad \phi = \pi \varepsilon^2 / S \quad (5.3)$$

と $n \rightarrow \infty$ がわかれ。これを (4.1) に積分すれば、平均
 流 $W = U - iV$ が

$$W = U - iV = \frac{2}{S} \{ \bar{\omega} \delta \psi \} = \frac{2}{S} (\bar{\omega}_1 \delta_1 \psi - \bar{\omega}_2 \delta_2 \psi) \quad (5.4)$$

によって求まる。ただし $\delta_j \psi$ は z と $z + 2\omega_j$ を結ぶ曲線が
 左から右に通過する流量である。かゝる面倒な計算は $O(\varepsilon^2)$
 の程度で、結局得られる結果は

$$8\pi\mu W = \lambda_1 K + \lambda_0 \bar{K} = -S(\lambda_1 \pi + \lambda_0 \bar{\pi}) \quad (5.5), (5.6)$$

を得る。ただし π は複素圧力勾配の平均値 $((3.4)$ 参照) である

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1} + \frac{\pi S}{\omega_1^2} \left(\hat{Q} - \frac{1}{24} \right) + \frac{3\gamma_1 S}{2\pi\omega_1} + \frac{2\beta}{\pi} \phi \quad (5.7)$$

$$\lambda_0 = 2 \ln \frac{R}{\varepsilon} - 2 \ln (2\pi |\hat{Q}_0|^2) + \frac{\pi S}{2R^2} + 2\phi = \text{実数} \quad (5.8)$$

$$\hat{Q}_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \hat{q}^{2n}), \quad \hat{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{q}^{2n}}{1 - \hat{q}^{2n}}, \quad \hat{q} = e^{-\pi i(\omega_1/\omega_2)} \quad (5.9)$$

$$Z_2 = \frac{\pi^2}{\omega_2} \left(\frac{1}{12} - 2\hat{H} \right), \quad \hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \hat{\delta}^{2n}}{1 - \hat{\delta}^{2n}} \quad (5.10)$$

$$\beta = \pi \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2} \left[1 - \frac{\pi \delta}{|\omega_2|^2} \left(\frac{1}{12} - 2\hat{H} \right) \right], \quad \ell = |2\omega_1|, \quad h = |2\omega_2| \quad (5.11)$$

である。座標回転

$$w' = w e^{i\theta}, \quad k' = k e^{-i\theta} \quad (5.12)$$

により主軸を求めれば

$$\theta = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{I_m(\lambda_1)}{Re(\lambda_1)} \right] \quad (5.13)$$

であるから、この2つの通交する方向での力 F と速度 U が釣り合

$$8\pi\mu U = (\lambda_0 \pm |\lambda_1|)F, \quad V = 0 \quad (5.14)$$

となることを示す。

i) 円柱列 $t = h/\ell \ll 1$, $2\alpha = 90^\circ$ とする。

$$4\pi\mu U = \log \frac{h}{\varepsilon} - \log(2\pi) + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{3h^2} \quad (5.15)$$

玉田¹¹⁾, 宮城¹²⁾の結果と一致する。

ii) 円形配置



$h = \ell$, $2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 主軸は対角線
 $Q_0 = \bar{Q}_0 = \hat{Q}$, $Q = \bar{Q} = \hat{Q}$ 方向

$$\lambda_0 = 2 \ln \left[\frac{h}{2\pi|Q_0|^2 \varepsilon} \right] + \frac{\pi}{3} \sin 2\alpha + 2\phi$$

$$\lambda_1 = -4\pi \operatorname{Im}[Q] - \frac{3}{2\pi} \beta + \frac{2\beta}{\pi} \phi$$

$$\beta = -8\pi \operatorname{Im}[H] \quad (5.16)$$

iii) 正方形配置

$$h = \ell$$

$$\alpha = \pi/4$$

$$\text{Isotropic } \lambda_2 = 0$$

$$4\pi\mu W = \left\{ \ln \frac{h}{\varepsilon} - [\log(2\pi Q_0^2) - \frac{\pi}{6}] + \phi \right\} \bar{K}$$

これは1)の特殊な例である。1.3105 (5.17)

iv) 6角格子配置 $h = \ell$, $\alpha = \pi/6$, Isotropic $\lambda_2 = 0$

$$4\pi\mu W = \left\{ \ln \frac{h}{\varepsilon} - [\log(2\pi Q_0^2) - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi] + \phi \right\} \bar{K}$$

1.3931

(5.18)

§6 柱に平行な流れ

(4.9), (4.10) を用いて柱に平行な流れに、… 2行反った計算によれば、正方形、6方形の配置に、 $10(\phi)$ の程度で

$$F_{\perp} = 4\pi\lambda'\mu U_{\perp}, \quad F_{\parallel} = 2\pi\lambda'\mu U_{\parallel} \quad (6.1)$$

$$F_{\perp} \text{ に対する } U_{\parallel} = \frac{Q}{S} (1 - \phi) \quad (6.2)$$

(Qは同期平行4方形内の全流量)

$$U_{\perp} = \frac{\lambda S \dot{P}}{4\pi\mu}, \quad Q = \frac{\lambda S^2 \dot{P}}{2\pi\mu} \quad (6.3)$$

とわかる。

References.

- 1) H. Hasimoto : J. Fluid Mech. 5 (1959) 317.
- 2) H. Hasimoto : Theor. & Appl. Mech. 22 (1974) 287.
- 3) K. Tamada & H. Fujikawa : Quart. J. Mech. Appl. Math. 10 (1957) 423.
- 4) T. Miyagi : J. phys. Soc. Japan 13 (1958) 209.
- 5) 今井 工 : 流体力学 前編 (1973, 裳華房) 338.