

Modular 表現論の現状と問題

大阪市大 理 津島行男

有限群の表現論, 特に modular 表現に関して昔から興味ある問題があるが, 重要と思われるものの大部分は未解決である。限られた時間内ではそれらの意味づけ, 現状報告にふれる事はできなかったが, 幸いに 12 Feb の報告 (Santa Cruz 1979) に詳しいので御参照していただく事にして, ここでは最近めざましい活躍をしてゐる M. Broué, L. Puig による modular 表現の再構成にスポットを当てて現状報告の代わりにさせていたゞきます。これは Broué のイリノイ大学における講義 (1980, 4月~6月) を基にしたものでありますが, いずれ, Springer の Lecture notes series より刊行されるという事, そのための案内役となれば幸いである。

I. Broué - Puig の方法

§ 1. Brauer homomorphism for G -algebras

この章では G -algebra に対する Brauer homo. を

定義し, Brauer の *1 主定理と Green 対応の理論が同じアイディアから出てくる事を示す。記号は以下の通りである。

$(\mathcal{O}, m)$: complete valuation ring of rank one, 標数 0

$F = \mathcal{O}/m$ は標数 $p > 0$

$R = \mathcal{O}$ または F

A : 有限生成 R -algebra, $P_i(A) = A$ の原始中等元の集合

以下の Lemma は既知であるが便宜上まとめておく。

[1.1] (Lifting idempotent Theorem) I を A の両側イデアルで

Jacobson radical に包含される。 $e_1, e_2, \dots, e_r$ を $\bar{A} = A/I$ の直交

中等元とすれば A の直交中等元 $e_1, e_2, \dots, e_r$ があって

$\bar{e}_i = e_i \pmod{I}$ $1 \leq i \leq r$ とできる。

= A の直接の系として

[1.2] I を A の両側イデアル。 $A \rightarrow A/I$ により $\{I$ に包含さ

る $P_i(A)$ の同型類 $\} \xleftrightarrow{1:1} \{P_i(\bar{A})$ の同型類 $\}$ が induce する

3. (但し $e, f \in P_i(A)$ e と f が同型 $\Leftrightarrow Ae \supset Af \Leftrightarrow eA \supset fA$)

[1.3] (Rosenberg's Lemma) $e \in P_i(A)$, $I_1, \dots, I_k$ を A の
左イデアル。 $e \in \sum_{j=1}^k I_j \Rightarrow e \in I_{j'} e \quad 1 \leq j' \leq k$

[1.4] $e \in P_i(A)$, $f \in P_i(A)$ s.t. $f \in AeA$

$\Leftrightarrow Ae \simeq Af$ ($\Leftrightarrow e=ab, f=ba \quad \exists a, b \in A$)

[1.5] A : 任意の環 M : left A -mod. $E = \text{End}_A(M)$

e, f を E の中等元とするとき。

$eM \simeq fM$ as A -modules $\Leftrightarrow Ee \simeq Ef$ as E -modules

証明は [1.1] を除き易しい。

Def. A が (右) RG -module のとき A を G -algebra とよぶ。

(G の作用は右肩につけて書くことにする) G は有限群。

$$A^G = \{a \in A \mid a^g = a \quad \forall g \in G\}$$

$G \supset P$ を subgroup とした時 ~~次のように定義する~~

$$T_{R_P}^G : A^P \longrightarrow A^G \quad \text{を} \quad T_{R_P}^G(a) = \sum_{g \in G/H} a^g \quad \text{と define する}$$

$$A_P^G = T_{R_P}^G(A^P) \quad \text{と} \quad \text{かく。次の Lemmas は容易}$$

$$[1.6] \quad G \supset H \supset P \Rightarrow T_{R_P}^G = T_{R_H}^G \cdot T_{R_P}^H$$

2) (Mackey 分解) $G \supset P, H$

$$T_{R_P}^G(a) = \sum_{\Delta \in P \backslash G/H} T_{R_{H \cap \Delta^{-1}P\Delta}}^H(a^\Delta)$$

$$3) \quad G \supset P, H \quad \text{のとき} \quad T_{R_P}^G(a) T_{R_H}^G(b) = \sum_{\Delta \in P \backslash G/H} T_{R_{H \cap \Delta^{-1}P\Delta}}^H(a^\Delta b)$$

Def. P を G の p -subgroup (p は $F = \mathbb{Q}/m$ の標数!)

$$I^P(A) = \sum_{\theta \in P} A_\theta^P + m A^P \quad \text{は } A^P \text{ のイデアルで}$$

且 $N_G(P)$ -invariant. natural map (当然 $N_G(P)$ -alg. homo.)

$$A^P \longrightarrow A(P) = A^P / I^P(A)$$

を Brauer homo. とよび Br_P とかく。

[1.6] 2) f) $\mathcal{N}$ の基本的関係式を得る。

$$[1.7] \quad B_{\mathcal{N}P} T_{\mathcal{N}P}^G = T_{\mathcal{N}P}^{N_G(P)} B_{\mathcal{N}P} \quad (\text{on } A^P)$$

Example 1. $G \xrightarrow{\text{act.}} X : \text{finite group. } A = F[X]$

$$= \text{ のとき } A^P = F(C_X(P)) \oplus \sum_{Q < P} A_Q^P$$

よ、 $B_{\mathcal{N}P} : (FX)^P \longrightarrow F(C_X(P))$ は $C_X(P)$ による "cut" に他

ならない。 $X = G$ の場合は従って古典的な Brauer homo.

となるが定義域はたがえており、その分 map は epimorphism

になっている。次の主張の前半は古典的、即ち G -algebra に

おける defect group の理論である。証明は Rosenberg's Lemma

と [1.6] 3) より直ちにできる。

[1.8] (Min-Max Theorem) $e \in \text{pi}^i(A^G)$ に対し

$\exists D : p$ -subgroup of G unique up to G -conjugacy s.t.

$$(i) \quad e \in A_D^G \quad (ii) \quad e \in A_H^G \implies D \leq H$$

D は e の defect group とよみ $D = D(e)$ とかく。 = の時

$$(iii) \quad B_{\mathcal{N}D}(e) \neq 0 \quad \text{且} \quad B_{\mathcal{N}P}(e) \neq 0 \implies P \leq D.$$

Proof. (iii) の 2 が問題である。 $B_{\mathcal{N}D}(e) = 0$ とする。

従って $e \in \sum_{Q < D} A_Q^D$ 一方仮定より $e = T_{\mathcal{N}D}^G(a), \exists a \in A^D$

$$\therefore e = T_{\mathcal{N}D}^G(ea) \in T_{\mathcal{N}D}^G\left(\sum_{Q < D} A_Q^D\right) = \sum_{Q < D} T_{\mathcal{N}Q}^G(A_Q)$$

$\therefore e \in T_{\mathcal{N}Q}^G A^Q$ for some $Q < D$ by Rosenberg's Lemma.

矛盾。 $\therefore B_{\mathcal{N}D}(e) \neq 0$ 次に $B_{\mathcal{N}P}(e) \neq 0$ とする。

$e \in A_D^G \subset \sum A_{P \cap D}^P$. よ、最後のイテールは $I^P(A)$

に $\lambda \in \mathbb{C}^*$ なる λ が存在して $\lambda P \in D$ である。 $\therefore P \in D$ である。 $\therefore P \in D$ である。

Def. $I(A, G, P)$ = isomorphism classes of $P_i(A^G)$ with defect group P (= λ is well defined, 即ち $e, f \in P_i(A^G)$ 且 $A^G e \cong A^G f$ ならば $D(e) = D(f)$ 例 2 は "[1.4]")

且 $A^G e \cong A^G f$ ならば $D(e) = D(f)$ 例 2 は "[1.4]")

[1.9] (1) $B_{\mathbb{Z}P}$ induces $I(A, G, P) \xrightarrow{1:1} I(A(P), N_G(P), P)$

(2) $N_G(P) < H < G$ がある。 " $A^G < A^H$ " induces

$I(A, G, P) \xrightarrow{1:1} I(A, H, P)$

Proof. やや雑な書き方であるがアイデアは以下の通り。

$$A^G \supset A_P^G \xrightarrow{B_{\mathbb{Z}P}} A(P)_P^{N_G(P)} \subset A(P)^{N_G(P)}$$

は epimorphic by [1.7].

故に $I(A, G, P) = \{ e \in P_i(A_P^G) \mid B_{\mathbb{Z}P}(e) \neq 0 \}$ 又

$I(A(P), N_G(P), P) = \{ f \in P_i(A(P)_P^{N_G(P)}) \}$ (since $P > Q$

$\Rightarrow A(P)_P^{N_G(P)} = 0$) $\therefore$ λ と [1.2] より (1) は自明。

次に $e \in P_i(A^G)$, $D(e) = P$ とする。 e を A^H において直交原始中等元分解をする。 $e = \sum e_i$. $\therefore$ n とし [1.8] (iii) と同じ方法で $D(e_i) \leq P$ $\forall i$, 且 $D(e_j) = P$ $\exists j$ である事が示される。(従って $B_{\mathbb{Z}P}(e_j) \neq 0$) $\therefore$ $B_{\mathbb{Z}P}(e) = \sum B_{\mathbb{Z}P}(e_i)$ は $A(P)^{N_G(P)} = A(P)^{N_H(P)}$ で原始的。 $\therefore$ $B_{\mathbb{Z}P}(e) = B_{\mathbb{Z}P}(e_j)$ 即ち $D(e_j) = P$ とする e_j は唯一つである。 $\therefore$ $B_{\mathbb{Z}P}(e) = B_{\mathbb{Z}P}(e_j)$ (1) と合わせて "制限写像" $e \rightarrow e_j$ は $I(A, G, P)$ と $I(A, H, P)$ との間の 1:1 対応を与える。

[1.9] の系を述べる。

[1.10] (i) Brauer's First Main Theorem. $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ は [1.9] (i) で

$A = FG$ とすればよい

(ii) (Green 対称性) $N_G(p) < H < G$, M : indecomposable RG -module

$P = \nu\kappa(M)$: vertex of M とする。 $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ と $\Leftarrow$ $\exists f(M)$:

indecomposable RH -module s.t. $MH \cong f(M)$, $\nu\kappa(f(M)) = P$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$ は $A = \text{End}_R(M)$ と $L \subseteq [1.9](2)$ より出る。 $\text{pr}(A) = \{1\}$

であるが $\nu\kappa(M) = D(1) = P$ である。

(iii) (Green) 記号は上と同じ。 δ : block idempotent of RG

且 $\delta M = M$ とする。 $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ と $\Leftarrow$ $P = \nu\kappa(M) \leq D(\delta)$

Proof. $A = \text{End}_R(M)$. $\Leftarrow$ L , $\rho: RG \rightarrow A$ を自然な写像。

$$\begin{array}{ccc} (RG)^P & \xrightarrow{\rho} & A^P \\ \downarrow B_{\mathcal{L}_P}^G = B_{\mathcal{L}_P} & & \downarrow B_{\mathcal{L}_P}^A = B_{\mathcal{L}_P} \\ FG(p) & \xrightarrow{\rho_P} & A(p) \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho(\sum_{a \in P} (RG)_a^P) \subseteq \sum_{a \in P} A_a^P \text{ であるが} \\ \text{左の図形を可換にする } \rho_P \text{ が} \\ \text{存在する。} \end{array}$$

$$B_{\mathcal{L}_P}^A \rho(\delta) = B_{\mathcal{L}_P}^A (1_M) \neq 0. \quad \therefore B_{\mathcal{L}_P}^G \delta \neq 0, \text{ i.e. } p \leq D(\delta)$$

(iv) (Nagao) 記号, $\&\nu$ 仮定は (iii) (iii) と同じ $\Leftarrow$ L , $H = N_G(p)$

とする。 $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ と $\Leftarrow$ $(B_{\mathcal{L}_P} \delta) f(M) = f(M)$ (但し $R = 0$ の時

$B_{\mathcal{L}_P} \delta$ は 0 -係数に lift したものを同じ記号で書く)

Proof. (iii) の証明と同じ記号を使う。 $\rho(\delta) = 1_M = \sum e_i \in$

原始中等元分解 in $A^{N_G(p)} = \text{End}_{N_G(p)}(M)$. $\exists e_i = e$ s.t.

$D(e) = P$ in $N_G(p)$. $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ と $\Leftarrow$ $f(M) = eM$ by definition.

$B_{\mathbb{Z}_p}^G \delta \in FC_G(p) \subset (FG)^p$ に注意して $\rho(B_{\mathbb{Z}_p}^G \delta)e \neq 0$ を示せばよい。これは (iii) の証明で用いた可換図形より出る。

§2. Corestriction of algebras

記号は §1. と同じである。 $G \supset H$, M は RH -module

1) (Clifford, Conlon) M が absolutely irreducible とする。
(従って $R = F$ or L) $\Rightarrow \text{End}_{RG}(M^G)$ は twisted group ring $R[I/H, \alpha]$ と同型。 $\Rightarrow$ I は M の inertial group で α は $H^2(I/H, R^*)$ の元。

2) (Green) G/H は p -group とする。 $\Rightarrow$ M が absolutely indecomposable とする M^G もそうである。 $\therefore \text{End}_{RH}(M)/J \simeq F$
つまり $\text{End}_{RG}(M^G)/J \simeq F$ (J は Jacobson radical)

$\text{End}_{RG}(M)$ は G -algebra $\text{End}_R(M)$ の G -invariants の集合であるが Brauer-Pauly はこの計算を工夫することによって上記 1) 2) が同じ原理から導びかれることを示し、同時に 2) に弱くする拡張をした。以下この概略を説明する。

Def. $A : R$ -algebra, $\rho : RG \rightarrow A$ R -alg. homo. が与えられたとき A は interior G -algebra とよぶ。(もちろん $g \in A, a \in A$ に対し $a^g = \rho(g)^{-1} a \rho(g)$ とおくことにし、 A は G -algebra である。) $(A, \rho), (A', \rho')$ が共に interior G -algebra の時 $\alpha : A \rightarrow A'$ が interior G -algebra homo. であるとは α が R -alg. homo. であり、且 $\rho' = \alpha \rho$

をみたすものという。

Example 2. $M: RG$ -module, $E(M) = \text{End}_R M$ とすれば
 自然な写像 $\rho: RG \rightarrow E(M)$ により, $E(M)$ は interior G -algebra
 M' を RG -module とし $E(M) \cong E(M')$ as interior G -algebra
 $\iff M \cong M'$ as RG -modules.

Def. $G \supset H$, (B, ρ) : interior H -algebra であるとき
 double tensor $RG \otimes_H B \otimes_H RG \xrightarrow{\text{put}} \text{Cores}_H^G B$ により
 積を define する。

$$(g \otimes y \otimes h^{-1})(g' \otimes y' \otimes h'^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{if } h'g' \notin H \\ g \otimes y \rho(h'g') y' \otimes h^{-1} & \text{if } h'g' \in H \end{cases}$$

但し $g, g', h, h' \in G$, $y, y' \in B$.

よって $\text{Cores}_H^G B$ は R -algebra となり, さらに

$\rho_H^G: RG \rightarrow \text{Cores}_H^G B$ と $\rho_H^G(x) = \sum_{g \in G/H} xg \otimes 1 \otimes g^{-1}$
 とする。これにより ρ_H^G は R -alg. homo. i.e. $\text{Cores}_H^G B$ は
 interior G -algebra となる。基本的な性質をいくつか述べる。

$$[2.1] \text{ (i) } 1 = \text{単位元} = \sum_{g \in G/H} g \otimes 1 \otimes g^{-1}$$

$$\text{(ii) } \rho_H^G(a)(g \otimes y \otimes h^{-1}) = ag \otimes y \otimes h^{-1} \quad \forall a \in RG$$

$$(g \otimes y \otimes h^{-1}) \rho_H^G(a) = g \otimes y \otimes h^{-1}a$$

これは G -algebra としての作用は

$$(iii) (g \otimes y \otimes h^{-1})^a = a^{-1} g \otimes y \otimes h^{-1} a \quad \forall a \in G$$

coset 分解 $G = \cup gH$ を fix し $e_{g,h} = g \otimes 1 \otimes h^{-1}$ とおく。
 $e_{g,h}$ は n 行 n 列単位となる。即ち

$$e_{g,h} e_{g',h'} = \delta_{h,g'} e_{g,h'} \quad \text{且} \quad 1 = \sum e_{g,g}$$

とくに

(iv) $\text{Cores}_H^G B \cong M(n, B)$ full matrix ring over B
of degree $n = [G : H]$

2.13) による Cores の背景も知る = できる。

Example 3. Example 2 の記号の下

$$\text{Cores}_H^G E(M) \cong \text{End}_R M^G \text{ as interior } G\text{-algebras}$$

以下 $G \supset H$ とし $(B, \rho) \in \text{interior } H\text{-algebra}$.

$$\forall g \in G \text{ に対し } B^{(g)} = \{ b \in B : \rho(h) b \rho(h^{-1})^g = b, \forall h \in H \}$$

$B^{(g)}$ が B の unit を含むとき B を g -invariant とする。

$$[2.2] \quad (i) B^{(1)} = B^H, \quad B^{(g)} B^{(g')} \subset B^{(gg')} \quad \forall g, g' \in G$$

$$(ii) B^{(g)h} = B^{(g)} \rho(h) \quad \forall g \in G, h \in H$$

$$(iii) B^{(g)} \ni \exists u : \text{unit of } B \Rightarrow u^{-1} \in B^{(g')} \text{ 且 } B^{(g)} B^{(g')} = B^{(gg')}, \forall g' \in G$$

より特に $G_B = \{ g \in G : B \text{ は } g\text{-inv.} \}$ は G の subgroup
 G_B を B の inertial group. 上のことも証明は容易。

Example 4. $M : RH\text{-mod.}$ $B = \text{End}_R M$

$$B \text{ が } g\text{-inv.} \iff M \simeq g \otimes_H M \text{ as } RH\text{-mod.}$$

次に $A = \text{Cores}_H^G B$ の G -invariants A^G を言回す。

$$g \in G \text{ に対し } A_g = \sum_{x \in G} x \otimes B \otimes g^{-1}x^{-1} = \sum_{\substack{x, y \in G \\ yx = g^{-1}}} x \otimes B \otimes y$$

は gH のみで決まり、又 G による共役で不変であり

$$A = \bigoplus_{g \in G/H} A_g, \text{ 従って } A^G = \bigoplus_{g \in G/H} (A_g)^G$$

[2.3] (i) $1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1}$ は ($\pi = 1$ と) H -inv.

$$(ii) A_g^G = \text{Tr}_H^G (1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1}) \quad (= \text{depends only on } gH)$$

$$(iii) \text{Tr}_H^G (1 \otimes u \otimes g^{-1}) \text{Tr}_H^G (1 \otimes u' \otimes g'^{-1}) = \text{Tr}_H^G (1 \otimes uu' \otimes (gg')^{-1})$$

$$\forall u \in B^{(g)}, u' \in B^{(g')}$$

Proof (i), (ii) は容易。(iii) は [1.6] を用いてできるが、直接示すと次のようになる。 $G = \bigcup_{x \in S} xH = \bigcup_{y \in T} yH$, 但し S は任意の代表系で $T = \{xg\}_{x \in S}$

$$\text{Tr}_H^G (1 \otimes u \otimes g^{-1}) = \sum_{x \in S} x \otimes u \otimes g^{-1}x^{-1}$$

$$\text{Tr}_H^G (1 \otimes u' \otimes g'^{-1}) = \sum_{y \in T} y \otimes u' \otimes g'^{-1}y^{-1}$$

$(x \otimes u \otimes g^{-1}x^{-1})(y \otimes u' \otimes g'^{-1}y^{-1})$ が (自明な形で) 消えるのは $g^{-1}x^{-1}y \in H$ の場合。 $\therefore y = xg$ の時上の積は $x \otimes uu' \otimes g'^{-1}g^{-1}x^{-1}$ となる。 Q. E. D.

上の事より A^G における積が明確となった。とくに $A_1^G = B^H$ と同一視してよい。 A_g^G が gH のみで決まることは強調して $A_g^G = A_{\bar{g}}^G$ とかくことにする。いばよく $G = G_B$ と仮定する。

[2.4] $G = G_B$ とする。

$$(i) A_{\bar{g}}^G A_{\bar{g}^{-1}}^G = A_1^G = B^H \quad \forall \bar{g} \in \bar{G}.$$

$$(ii) A_{\bar{g}}^G = B^H u_{\bar{g}} = u_{\bar{g}} B^H \quad \exists u_{\bar{g}} \in A_{\bar{g}}^G \text{ (unit)}$$

$$(\text{実際 } a \in A_{\bar{g}}^G \Rightarrow a = (a u_{\bar{g}}^{-1}) u_{\bar{g}} \in B^H u_{\bar{g}})$$

$$(iii) A^G J(B^H) = J(B^H) A^G \text{ となり } J(A^G) \text{ に } \lambda \text{ する両側イデアル } (J(*) \text{ は}$$

* の radical)

= 2 体上の crossed product の理論と結びつけたため
この仮定をおく。

$$[2.5] (\text{仮定}) B^H/J(B^H) = F_B \text{ は可換体 } (\supset F)$$

$\bar{g} \in \bar{G}$ に対し $u_{\bar{g}}$ による conjugation に対応する $\sigma = \sigma(\bar{g})$ により

$$\sigma: \bar{G} \longrightarrow \text{Aut}(F_B/F) \quad \text{を得る。}$$

以上より

$$[2.6] G = G_B \text{ 及び 仮定 [2.5] の下}$$

$$\Lambda = A^G/J(B^H)A^G = \bigoplus_{\bar{g} \in \bar{G}} u_{\bar{g}} F_B \quad \text{with}$$

$$(i) u_{\bar{g}} u_{\bar{g}'} = u_{\bar{g}\bar{g}'} \alpha(\bar{g}, \bar{g}') \quad \exists \alpha(\bar{g}, \bar{g}') \in F_B^*$$

$$(ii) \theta u_{\bar{g}} = u_{\bar{g}} \theta^{\sigma(\bar{g})} \quad \forall \theta \in F_B$$

実際上の問題としては、 σ は α のいづれかが存在してく
るのがある難いわけであるが、 $F_B = F$ なる $\sigma = 1$ の場合
初めに述べた Clifford, Condon の結果に対応している。

$\alpha \sim 1$ を保証するものとす

[2.7] $G = G_B$, G/H : p -group, F_B : 完全体 とす。

$$\Rightarrow \Lambda_{J(\Lambda)} \cong \text{End}_{F_1} F_B \quad \text{即ち} \quad F_1 = F_B^G$$

Proof. 仮定からよく知られているように $\alpha \sim 1$ in $H^2(G/H, F_B^*)$

よって初めから $\alpha = 1$ としてよい。 $L = \ker \sigma$ とし I を Λ の

F_B -subspace で $\{u_{\bar{g}} - 1 \mid \bar{g} \in L\}$ で生成されたものとする。 $\bar{G} \triangleright L$

より $\Lambda I = I \Lambda$ 且 中零。 ($F_B L$ は F_B 上の group ring. $I = J(F_B L)$)

$$\Lambda_{I\Lambda} = \bigoplus_{\bar{g} \in \bar{G}/L} u_{\bar{g}} F_B \quad (\text{crossed product}) \quad \text{即ち} \quad \bar{G}/L = \text{Gal}(F_B/F_1)$$

であるからよく知られているように $\Lambda_{I\Lambda} \cong \text{End}_{F_1} F_B$. Q. E. D.

$G > G_B$ の場合を考へる。 $A^G = \bigoplus_{\bar{g} \in \bar{G}} u_{\bar{g}} B^H = \sum_{\bar{g} \in \bar{G}_B} u_{\bar{g}} B^H \oplus M$ (その他)

して $\bar{g}$ を fix する限り $\bar{g} \in \bar{G}_B$ とす

$$A_{\bar{g}}^G = \text{Tr}_H^G (1 \otimes B^{(g)} \otimes \bar{g}^{-1}) \cong B^{(g)} \cong \text{Tr}_H^{G_B} (1 \otimes B^{(g)} \otimes \bar{g}^{-1}) = A_{\bar{g}}^{G_B}$$

よって $A^G = A^{G_B} \oplus M$ と書いてよい。

[2.8] 仮定 [2.5] の下 $A^G = A^{G_B} + J(A^G)$

Proof. 初めから $R = F$ としてよい。 よって $A^G M A^G$ が中零

となることを言えよ。 B^H が local である事より

$\text{Tr}_H^G (1 \otimes B^{(g)} \otimes \bar{g}^{-1})$ は nilpotent (if $\bar{g} \notin \bar{G}_B$) である事が

[2.2], [2.3] を用いて示される。 従って $A^G M A^G$ の F -basis が

nilpotent であることがわかる。

以上から

[2.9] $G \supset H$, G/H : p-group $B \in \text{interior } H\text{-algebra}$

$B^H/J(B^H) = F_B$ は完全体とする。 $A = \text{Cores}_H^G B$ とすれば

$$A^G/J(A^G) \cong \text{End}_F F_B, \quad F_B \supset \exists F \supset F$$

直接の系として

[2.10] (Green) $G \supset H$, G/H : p-group $M \in \text{indecomposable}$

$RH\text{-mod.}$ とし $\text{End}_{RH} M/J$ は完全体とする

$\Rightarrow M^G$ は同型の直既約加群の直和

Cores 概念の応用としては例えば Puig による p-可解群の場合の nilpotent block の特徴づけがある (Santa Cruz 1979)

尚 Green の定理で G/H が p-group というのは一般論として過大では無い。むしろ必要条件に近いものでなくてはならない。即ち古くから知られていた事であるが

[2.11] (Tucker 1963) F : 代数的閉体 $G \supset H$, $\text{ch } F = p > 0$

M : irreducible $FH\text{-mod.}$ $I \in M$ の inertial group

であるとき M^G が indecomposable $\Rightarrow I/H$ は p-group

証明にはこの章の初めに上げた Clifford, Condon 当りの結果を使えばよい。

§3. Sylow theory for blocks

Alperin - Broué による モジュラ-表現への Sylow theory

の導入, 及びその応用としての Brauer-Puig による一般指標のある構成法が中心となるが, 共に論文の形で発表されているので解説は避け筆者にとり若干気になつてゐる事を一寸書かせていただきます。

$G \supset P$: p -subgroup, $e \in F(G(P))$ の block (idempotent) とするとき (P, e) を Brauer pair とする。

Def. 2つの Brauer pair $(Q, f), (P, e)$ が $(Q, f) < (P, e)$ とは ① $Q < P$ (従つて $(FG)^P < (FG)^Q$)

② $\forall i \in p_i(FG)^P$ s.t. $Br_P(i)e = Br_P(i) \neq 0$ に対し

$$Br_Q(i)f = Br_Q(i)$$

Brauer-Puig によれば, (P, e) 及び P の subgroup Q を任意に与えると $\exists f$: block of $F(G(Q))$ があつて $(Q, f) < (P, e)$ (かもしの definition の $<$ は Alperin-Brauer で与へたものと一致する。Alperin-Brauer の definition は inductive なものであつたかうやや気持ちのよいものになつてゐる。もう一度上の definition にもどる。 $Br_Q(i)$ は $F(G(Q))$ で原始中等元分解される。 $Br_Q(i) = \sum e_k$. 各 e_k に対し $F(G(Q))$ の block f_k で $e_k f_k = e_k$ なるものが唯一つある。Brauer-Puig は f_k が e_k によつて決まる (s.t. $Br_P(i)e = Br_P(i)$) にもよつて e だけで一意に決まることを主張しているわけである。もちろん ② をみたす f は存在すれば一意で

あるか? 存在だけが問題であるが $(p \neq 0)$ による induction
なのでこの“不思議な事実”の中味まではよくわからない。

本報告集で奥山氏が p' -subgroup H に対する $(FG)^H$ について
問題提起されているが、 $(FG)^p$ についても何か掘り下げ
ものがあると思われた。

II. 多元環の直既約表現論との関係

Roggenkamp による次の結果の証明手法に興味をもつ、
簡単にふれてみた

“ R を $\hat{\mathbb{Z}}_p$ の不分岐拡大、 B を defect 1 の p -block、 $\triangleleft RG$ 。

B が e 個の直交 proj. module をもてば B は $3e$ 個の
直交 lattice をもつ。”

最終的に Graph の表現論に持ちこたれているが詳細は
Roggenkamp のモントリオール大における Lecture note (市販済)
にある。

以上