

Martingale difference と Paley の不等式

東北大 教養 吾妻一興

§1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を確率変数列, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

$\mathcal{F}$ の sub σ -field の増加列とする。このとき, 各 n に対し

(i) f_n は $\mathcal{F}_n$ -可測, (ii) $E\{|f_n|\} < +\infty$, $E\{f_n | \mathcal{F}_{n-1}\} = f_{n-1}$ a.s.

とあるとき, $f = (f_n, \mathcal{F}_n)$ を f は martingale といいよ。

更に, $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_n = f_n - f_{n-1}$, $n \geq 2$ とし, $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を定義すると, 各

n に対し

(i') φ_n は $\mathcal{F}_n$ -可測, (ii') $E\{|\varphi_n|\} < +\infty$, $E\{\varphi_n | \mathcal{F}_{n-1}\} = 0$ a.s.

とある。 (i'), (ii') をみたす確率変数列 $\varphi = (\varphi_n, \mathcal{F}_n)$ を φ は,

martingale difference といいよ。以下, 次の記号を用いる。

確率変数列 $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し, $h^*(\omega) = \sup_n |h_n(\omega)|$, $\|h\|_p =$

$\sup_n \|h_n\|_p$ とする。又 $\|h\|_p < +\infty$ とあるとき, h は L^p -bounded

とあるといふ。

martingale f と, f の difference φ に対し

$$S_n(f) = \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) \quad \text{とある。}$$

次に、確率変数列 $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が、 $\sum_n$ に對し、 U_n が $\mathbb{F}_{n-1}$ -可測
 であるときには、 U は multiplier sequence ということができる。
 すると、 f は martingale, $q \in \mathcal{D}$ の difference sequence とし、
 $(U \circ f)_n = \sum_{k=1}^n U_k q_k$ により、 $U \circ f$ は定義でき、 $E\{|U_k q_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}\} < +\infty$ ならば
 $U \circ f$ は martingale である。この U は、 U の f に関する transform
 という。

§2. martingale difference と Haar 系, Walsh 系 を含むある直交系
 の class との関係について 2 の例とし、次の Marcinkiewicz と
 Zygmund の定理の Gundy [3] による証明を述べよう。

定理 1. $q = (q_n)$ は martingale difference とし、 $k \geq 1$ には、
 $E\{q_k^2 \mid \mathbb{F}_{k-1}\} = 1$ a.s.
 $E\{|q_k| \mid \mathbb{F}_{k-1}\} \geq \Gamma > 0$ a.s. (但し Γ は $0 < \Gamma < 1$ なる定数)

なる性質をもつものとする。

すると、任意の multiplier sequence $U = (U_n)$ に対し、次の
 3 つの集合は 同値である。

$$A = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n U_k(\omega) q_k(\omega) \text{ exists and is finite} \right\}$$

$$B = \left\{ \omega : \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2(\omega) < +\infty \right\}$$

$$C = \left\{ \omega : \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2(\omega) q_k^2(\omega) < +\infty \right\}$$

q が、独立正規直交系で、 $E\{|q_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}\} \geq \Gamma > 0$ なるものは、明か

かに, 定理1の条件をみたしているが, Gundy は, もっと興味ある class を含んでいることを証明した。即ち

Proposition f は, 次の性質をもつ $(\mathbb{F}_n)$ に関する martingale とする。

$(\mathbb{F}_n)$ は purely atomic な σ -field の増加列で, $\mathbb{F}_{k+1} \subset \mathbb{F}_k$, $F_k \in \mathbb{F}_k$,

$F_{k+1} \in \mathbb{F}_{k+1}$ なる任意の2つの atom に

$$P\{F_{k+1}\} / P\{F_k\} \geq \delta > 0 \quad (\text{但し } \delta \text{ は定数})$$

が成り立つものとする。すると, 定理1の条件をみたし,

$\|f\|_\infty < +\infty$ なる f があつて, f は $g = (g_n = \sum_{k=1}^n q_k)_n$ に関する transform

としかつてゐる。

これとは, Walsh 級数の 2^n -部分和 $\overline{W}_{2^n}$ に対して, 上の事実が $(r_n)_n$

を Rademacher 系としたとき, $\overline{W}_{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} r_k Y_k + \text{const.}$ の形にかつて

ることと意味するに違ふない。いま, 上のは定理を用ひると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{W}_{2^n} \text{ exists and is finite a.s.} \iff \sum (\overline{W}_{2^n} - \overline{W}_{2^{n-1}})^2 < +\infty \text{ a.s.}$$

を得る。さて最近 B. Davis [2] は, 定理1の条件下では

$$D^+ = \left\{ \omega : \sup_n \sum_{k=1}^n r_k q_k < +\infty \right\}, \text{ 従つて, } D^- = \left\{ \omega : \inf_n \sum_{k=1}^n r_k q_k > -\infty \right\}$$

も, A, B, C と同値であることを証明した。

R. F. Gundy [5] は, martingale difference $g = (g_n, \mathbb{F}_n)$, $\mathbb{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

で, $q_1 = 1$, $E\{q_k^2 | \mathbb{F}_{k-1}\} = 1$ a.s. $\|f\|_\infty < +\infty$ なるものを想定して,

$f_n = \sum_{i=1}^n r_i q_i$ とおいて non negative martingale $f = (f_n, \mathbb{F}_n)_n$ は,

$$\frac{C}{\lambda} \int_{\{f_n^* > \lambda\}} f_n dP \leq P\{f_n^* > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{f_n^* > \lambda\}} f_n dP$$

(但し, $f_n^* = \sup_{1 \leq k \leq n} f_k$, $\lambda \geq \|f\|_1$) が成り立つことを示した。すると, 上の proposition を用いることにより, E.M. Stein (Studies Math. XXXII (1969)) の, Hardy-Littlewood maximal function による class $L \log L$ の characterization と martingale の考えによるものがあまる。

§3. 次の定理は, Poley の Walsh 級数の 2^n -部分和に対し, 示したものであるが, Burkholder による証明は, martingale の理論として, 興味あるものである。ここでは, Burkholder [1], Gundy [4] に従って紹介する。

定理 1 $1 < p < +\infty$ なる p へ, 正数 C_p, C_p' が存在して, $f \in \text{martingale}$ として

$$C_p \|S_n(f)\|_p \leq \|f_n\|_p \leq C_p' \|S_n(f)\|_p.$$

また, L^1 -bounded martingale の Gundy の分解がある。

定理 2 $f \in L^1$ -bounded martingale とすると, $\lambda > 0$ に対し, 次の性質をもつ martingale a, b, d が存在する。

$$f = a + b + d$$

(i) martingale a の difference $\varepsilon \alpha = (\alpha_n)$ とすると,

$$\|a\|_1 \leq C \|\alpha\|_1,$$

$$\lambda P\{\alpha^* \neq 0\} \leq C \|f\|_1,$$

(ii) martingale has a difference ε $\beta = (\beta_n)$ exists,

$$\|\sum |\beta_n|\|_1 \leq C \|f\|_1,$$

$$(iii) \|d\|_\infty \leq C\lambda, \quad \|d\|_2^2 \leq C\lambda \|f\|_1.$$

この分解定理を用い、martingale f と、 $v^* \leq 1$ なる multiplier sequence v に對して、

$$P\{(v \circ f)^* > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1, \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$P\{S(f) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1,$$

などの不等式を得ることが出来る。しかし、このとき、 $Tf = (v \circ f)^*$ 、又は $Tf = S(f)$ とおけば、 T は確率変数列から確率変数への、次の性質をもつ mapping であることが、平直的である。

$$1^\circ \quad |T(f+g)| \leq C(|Tf| + |Tg|)$$

$$2^\circ \quad P\{|Tf| \neq 0\} \leq C P\{f^* \neq 0\}$$

$$3^\circ \quad (a) \quad \|Tf\|_2 \leq C \|f\|_2$$

$$(b) \quad \|Tf\|_1 \leq C \|\sum |\beta_n|\|_1.$$

従って、いま、この性質をもつ T は class B mapping ということができる。上の不等式は、一般に、

Proposition L^1 -bounded martingale 上の class B mapping

は、weak type (1,1)。

が成ることとして証明出来る。

以下では、不等式 (1) に注目するのではなく、次の Burkholder の定理の special case を考える。

定理 3 $f, g \in \mathcal{F}$, 同値 σ -field に属し 2 の martingale とする。
 すると, $S(g) \leq S(f)$ であることは $P\{g^* > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$ 。

次に, $v^* \leq 1$ なる multiplier sequence v に對し,

$$T_n = v_1 E\{\cdot | \mathcal{F}_1\} + \sum_{k=2}^n v_k [E\{\cdot | \mathcal{F}_k\} - E\{\cdot | \mathcal{F}_{k-1}\}]$$

を考える。 T_n は linear である。又 $h' \in L^\infty$ は, $h'_n = E\{h' | \mathcal{F}_n\}$ とし、martingale h を作れば, $T_n h' = (v \circ h)_n$ であるから、定理 3 又は不等式 (1) により T_n は weak type (1,1) であり、更に、

$$\|T_n h'\|_2^2 = \|(v \circ h)_n\|_2^2 \leq \|h_n\|_2^2 \leq \|h'\|_2^2$$

であるから、Marcinkiewicz の interpolation により, $1 < p < 2$ に對し, $\|T_n h'\|_p \leq C_p \|h'\|_p$ なる C_p が存在する。

$p > 2$ には對し,

$$\int T_n h' \cdot h'' dP = \int h' \cdot T_n h'' dP$$

であることに注意し, C_p が存在する。 h は martingale f に對し, $(v \circ f)_n = T_n f_n$ となるから、次の定理を得る。

定理 4 $1 < p < +\infty$ なる p に對し, 正数 C_p が存在し、martingale f と, $v^* \leq 1$ なる multiplier sequence v に對し,

$$\|(r \circ f)_n\|_p \leq C_p \|f_n\|_p.$$

この定理と, (r_k) が Rademacher 系 ならば $1 \leq p < +\infty$ に対し,

$$A_p \left(\sum a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \int_0^1 \left| \sum a_k r_k \right|^p dt \leq B_p \left(\sum a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

が成り立つことを用いると, 定理1は次のように証明出来る。

$$\begin{aligned} A_p C_p^{-p} \|S_n(f)\|_p^p &\leq C_p^{-p} E \left\{ \int_0^1 |(r \circ f)_n|^p dt \right\} \\ &= C_p^{-p} \int_0^1 E \left\{ |(r \circ f)_n|^p \right\} dt \\ &\leq \|f_n\|_p^p \\ &\leq B_p C_p^{-p} \|S_n(f)\|_p^p. \end{aligned}$$

但し, $n \in \mathbb{N}$, $g = r \circ f$ とすると, $f = r \circ g$ であることを用いる。

文献

- [1] D.L. Burkholder, Martingale transforms, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 1494-1504.
- [2] B. Davis, Divergence properties of some martingale transforms, Ann. Math. Statist., 40 (1969), 1852-1854.
- [3] R.F. Gundy, The martingale version of a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund, Ann. Math. Statist., 38 (1967), 725-734.
- [4] R.F. Gundy, A decomposition for L^1 -bounded martingales, Ann. Math. Statist., 39 (1968), 134-138.

[5] R.F. Gundy, On the class $L \log L$ martingales, and singular integrals, *Studia Math.*, 33 (1969), 109-118.