

テータ函数と無限階微分方程式系

京都大学 数理解析研究所
河合隆裕

無限階微分方程式系は解析的に取扱にくい代物ではあるが、それだけに興味深い対象である。また、一次元の場合でも（有限階の場合とは異なり）単独方程式と考えるのでは解空間が無限次元になってしまうから、という理由により、まず手始めとして定数係数の系と一次元の時に考えるのは賢明ではないと考える：事態が退化して難しくなる過ぎるからである。[この付近の話題に就いての議論は別の機会に譲りたい。] 実際、

Sato, M., M. Kashiwara and T. Kawai: Microlocal analysis of theta functions. Adv. Studies in Pure Math. 4 (1984), 267-289

の主題である $\mathbb{R}$ -holonomic 系は本質的に

変数係数であり乍ら、解空間の有限次元性、

Reconstruction theorem 等の良い性質を持って

いる。本講演では、 $\mathbb{R}$ -holonomic 系の最も簡単

な例である、佐藤先生により見出たこと、 θ -zero value

を満たす方程式系、即ち

$$(1) [\exp P_j - 1] f(t) = 0 \quad (j=1, 2)$$

とし

$$(2) \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 4\pi i (t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4\pi i \frac{d}{dt} & 0 \end{bmatrix}$$

を題材に、このように純粹に局所的な条件

のみから、 θ -zero value の虚変換に関する大域的

な結果を導き出せることを示し, "IR-holonomic系
により函数を統制できる" と言うスロ-ガンと立証
することを試みた. その議論の大筋は次の通り:

$t \mapsto s = -1/t$ と言う座標変換を行い, P_j を s -
座標で書き下したものを $\tilde{P}_j$ とすれば, $S = \begin{bmatrix} s^{1/2} & 0 \\ 0 & s^{3/2} \end{bmatrix}$
と

$$S^{-1} \tilde{P}_1 S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4\pi i \frac{d}{ds} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} \tilde{P}_2 S = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ 4\pi i (s \frac{d}{ds} + \frac{1}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

故, (1) より

$$(4) \begin{cases} \exp(-P_2) S^{-1} f(-1/s) = S^{-1} f(-1/s) \\ \exp(P_1) S^{-1} f(-1/s) = S^{-1} f(-1/s) \end{cases}$$

を得る. ここで $\exp(-P_2) \exp(P_2) = 1$ に

注意すれば、(4)は

$$(5) \quad (\exp P_j - 1) S^{-1} f(-1/s) = 0, \quad j=1, 2$$

と同値である。ここで方程式系(1)の正則解の

空間の次元が $(\{ \operatorname{Im} s > 0 \} = \{ \operatorname{Im} t > 0 \})$ で局所的に

1次元である (T. Kawai, An example of a

complex of linear differential operators of

infinite order, Proc. Japan Acad., 59 (1983),

113-115) ことより

$$(6) \quad f(s) = C S^{-1} f(-1/s) \quad (C: \text{定数})$$

を得る。ここで

$$f(t) = \begin{bmatrix} \sum_v \exp(\pi i v^2 t) \\ \sum_v 2\pi i v \exp(\pi i v^2 t) \end{bmatrix}$$

が (1) を満たすことより、(6)の第一成分を

$s = i$ とし $C = \exp(\pi i/4)$ を得る。この

ようにして、純粹に局所的な関係式 (1) から 虚変換

に関する大域的な情報か得られたことになる。なお、

ここでは $t \mapsto -1/t$ とする変換を天下う的に

導入したか、この変換自身も、 P_1, P_2 の特殊な

交換関係を用いて

$$\exp\left(-\frac{\pi}{2} \left(\frac{-P^2 + Q^2}{4\pi i} \right)\right)$$

として理解されることも判っている。これに就いては、

上述の S-K-K, Adv. St. in Pure Math. の報文, §2

を参照されたい。