

## L 凸関数の凸性の証明について

川崎英文, 九州大学・大学院数理学研究院  
Hidefumi Kawasaki, Faculty of Mathematics, Kyushu University  
kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp

### 1 序

室田は離散凸解析を提唱し凸構造をもつ離散最適化の理論的枠組みを与えることに成功した ([3, 1998][4, 2001][5, 2003]). それは藤重 [1] の劣モジュラ解析の拡張になっている.

離散凸解析では, 古典的な凸解析と異なり, 2 種類の離散凸性が現れる. ひとつはマトロイドに基づく M 凸性であり, もうひとつは M 凸性と共役関係にある L 凸性である.

本稿では L 凸性を考察する. 条件 (1)(2) を満たす関数  $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を **L 凸関数** とよぶ.

$$g(x \wedge y) + g(x \vee y) \leq g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \quad (1)$$

$$\exists r \in \mathbb{R} \quad g(x + k\mathbf{1}) = g(x) + kr \quad \forall x \in \mathbb{Z}^n, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

ただし  $x \wedge y := (\min\{x_i, y_i\})$ ,  $x \vee y := (\max\{x_i, y_i\})$ ,  $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)$ . (1)(2) を満たす関数を, それぞれ**劣モジュラ**, **対角方向に線形**であるという.

離散的な関数  $g: \mathbb{Z}^n (\{0, 1\}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^n ([0, 1]^n)$  上で定義された連続関数  $\hat{g}$  に拡張する方法のひとつに Freudenthal 分割を基に区分的線形拡張 (4) をとる方法がある.

**定理 1** (室田 [3]) L 凸関数  $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  の区分的線形拡張  $\hat{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  は凸関数で対角方向に線形である.

しかし証明が完結していないように思われるので, 本稿で別ルートの証明を与えることにした. さらに, 定理 1 の逆も与える.

### 2 区分的線形拡張

$V = \{1, \dots, n\}$  とし,  $e_i$  を第  $i$  標準単位ベクトルとする.  $V$  上の任意の置換  $\pi$  に対し,  $\{0, e_{\pi(1)}, e_{\pi(1)} + e_{\pi(2)}, \dots, e_{\pi(1)} + e_{\pi(2)} + \dots + e_{\pi(n)}\}$  の凸包で定義される単体を  $\sigma_\pi$  で表す. このとき,  $\{\sigma_\pi \mid \pi: \text{置換}\}$  で定まる  $[0, 1]^n$  の単体分割を **Freudenthal 分割** とよぶ.

整数点  $p \in \mathbb{Z}^V$  に対し, 超立方体  $\{x \in \mathbb{R}^V \mid p \leq x \leq p + \mathbf{1}\}$  を  $C_p$  で表すと,  $C_p$  の頂点は  $U \subset V$  を用いて  $p + \sum_{u \in U} e_u$  と表される. 任意の  $x \in C_p$  に対し,  $x' := x - p \in [0, 1]^V$  の成分を降順に並べ, それを適当な置換  $\pi$  を用いて  $x'_{\pi(1)} \geq \cdots \geq x'_{\pi(n)}$  と表すと,

$$x - p = (1 - x'_{\pi(1)})\mathbf{0} + \sum_{i=1}^{n-1} (x'_{\pi(i)} - x'_{\pi(i+1)}) \sum_{j=1}^i e_{\pi(j)} + x'_{\pi(n)} \sum_{j=1}^n e_{\pi(j)}$$

となる. よって,  $x$  は単体  $\sigma_\pi$  の頂点の凸結合として次のように表される.

$$x = (1 - x'_{\pi(1)})p + \sum_{i=1}^{n-1} (x'_{\pi(i)} - x'_{\pi(i+1)})(p + \sum_{j=1}^i e_{\pi(j)}) + x'_{\pi(n)}(p + \sum_{j=1}^n e_{\pi(j)}). \quad (3)$$

そこで, 任意の関数  $g: \mathbb{Z}^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  に対し,  $\hat{g}: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  を

$$\hat{g}(x) := (1 - x'_{\pi(1)})g(p) + \sum_{i=1}^{n-1} (x'_{\pi(i)} - x'_{\pi(i+1)})g\left(\sum_{j=1}^i (p + e_{\pi(j)})\right) + x'_{\pi(n)}g\left(p + \sum_{j=1}^n e_{\pi(j)}\right) \quad (4)$$

で定義し, Freudenthal 分割による  $g$  の区分的線形拡張とよぶ. 特に,  $g$  が  $\{0, 1\}^V$  で定義されているとき,  $\hat{g}$  を Lovász 拡張とよぶ. 通常 Lovász 拡張では  $f(0) = 0$  を仮定するが, 理解の妨げになるので, 本稿では課さないことにする.

**定理 2** (Lovász [2]) 関数  $g: \{0, 1\}^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  が劣モジュラであるための必要十分条件は Lovász 拡張  $\hat{g}$  が  $\mathbb{R}^V$  で凸になることである.

**補題 1**  $g: \mathbb{Z}^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  が対角方向に線形ならば,

$$\hat{g}(x + s\mathbf{1}) = \hat{g}(x) + rs \quad \forall x \in \mathbb{R}^V, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

証明. Case 1:  $x$  と  $y := x + s\mathbf{1}$  が同じ  $C_p$  にある場合.  $y_{\pi(i)} = x_{\pi(i)} + s$  なので, (3) から

$$x + s\mathbf{1} = (1 - x'_{\pi(1)} - s)p + \sum_{i=1}^{n-1} (x'_{\pi(i)} - x'_{\pi(i+1)})(p + \sum_{j=1}^i e_{\pi(j)}) + (x'_{\pi(n)} + s)(p + \sum_{j=1}^n e_{\pi(j)}).$$

$p \leq x + s\mathbf{1} \leq p + \mathbf{1}$  なので, 右辺は凸結合の形をしている.  $\pi_i := \pi(i)$  と書くと,

$$\begin{aligned} & \hat{g}(x + s\mathbf{1}) \\ &= (1 - x'_{\pi_1} - s)g(p) + \sum_{i=1}^{n-1} (x'_{\pi_i} - x'_{\pi_{i+1}})g\left(p + \sum_{j=1}^i e_{\pi_j}\right) + (x'_{\pi_n} + s)g\left(p + \sum_{j=1}^n e_{\pi_j}\right) \\ &= (1 - x'_{\pi_1})g(p) + \sum_{i=1}^{n-1} (x'_{\pi_i} - x'_{\pi_{i+1}})g\left(p + \sum_{j=1}^i e_{\pi_j}\right) + x'_{\pi_1}g(p + \mathbf{1}) + s(g(p + \mathbf{1}) - g(p)) \\ &= \hat{g}(x) + sr. \end{aligned} \quad (6)$$

Case 2:  $x$  と  $y = x + s\mathbf{1}$  が異なる超立方体にある場合.  $x$  と  $y$  を結ぶ線分は複数個の超立方体を通るので, 線分  $|x, y|$  は適当な  $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{k+1} = s$  を用いて, 小線分  $|x + s_i\mathbf{1}, x + s_{i+1}\mathbf{1}|$  ( $i = 0, \dots, k$ ) に分割される. (6) を繰り返し使うと

$$\hat{g}(x + s\mathbf{1}) = \hat{g}(x + s_k\mathbf{1}) + r(s - s_k) = \hat{g}(x + s_{k-1}\mathbf{1}) + r(s - s_{k-1}) = \cdots = \hat{g}(x) + rs. \quad \blacksquare$$

任意の集合  $C \subset \mathbb{R}^V$  に対し, 超平面  $H' := \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(V) := x_1 + \cdots + x_n = 0\}$  への  $C$  の対角方向からの射影を  $C'$  で表す. つまり,

$$C' := \{x' \in H' \mid \exists s \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x' + s\mathbf{1} \in C\}.$$

**補題 2** 関数  $f: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  が対角方向に線形, 即ち

$$\exists r \in \mathbb{R} \quad f(x + s\mathbf{1}) = f(x) + rs \quad \forall x \in \mathbb{R}^V, \forall s \in \mathbb{R}$$

とする. このとき,  $f$  が  $H'$  上で凸ならば,  $f$  は  $\mathbb{R}^V$  全体で凸である. 逆に,  $f$  が  $C_p$  で凸ならば,  $f$  は射影  $C'_p$  で凸である.

証明. 任意の  $x, y \in \mathbb{R}^V$  に対し, ある  $s, t \in \mathbb{R}^V$  を用いて  $x' := x - s\mathbf{1}, y' := y - t\mathbf{1} \in H'$  となる. 線形性により  $f(x) = f(x') + rs, f(y) = f(y') + rt$  なので

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) &= \lambda f(x') + (1 - \lambda)f(y') + r(\lambda s + (1 - \lambda)t) \\ &\geq f(\lambda x' + (1 - \lambda)y') + r(\lambda s + (1 - \lambda)t) \\ &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y). \end{aligned}$$

逆も同様に示される.  $\blacksquare$

### 3 2次元の場合

定理 2 と補題 2 は定理 1 を証明するために我々がなすべきことを示している. つまり,  $\hat{g}$  が各超立方体  $C_p$  で凸であるという事実から,  $\hat{g}$  が  $H'$  で凸になることを導けばよい

$n = 2$  の場合,  $C_p$  は単位正方形で, その射影  $C'_p$  は線分になる. 2つの正方形  $C_p, C_q$  が隣接するとき,  $C'_p$  と  $C'_q$  は少なくとも半分重なる (図 1). 定理 2 により,  $\hat{g}$  は  $C_p$  上で凸である. よって補題 2 から,  $\hat{g}$  は  $C'_p$  上で凸になる.  $\hat{g}$  は区分的線形なので, そのグラフを線分  $C'_p$  に制限したものは折れ線になる. しかも凸関数であることから, 折れ線の傾きは  $C'_p$  上で単調増加である.  $C'_q$  は  $C'_p$  に少なくとも半分重なるので, 折れ線の傾きは  $C'_p \cup C'_q$  上でも単調増加である. この議論を繰り返せば,  $\hat{g}$  の傾きが直線  $H'$  上で単調増加であることが分かり,  $\hat{g}$  は凸となる.  $\blacksquare$

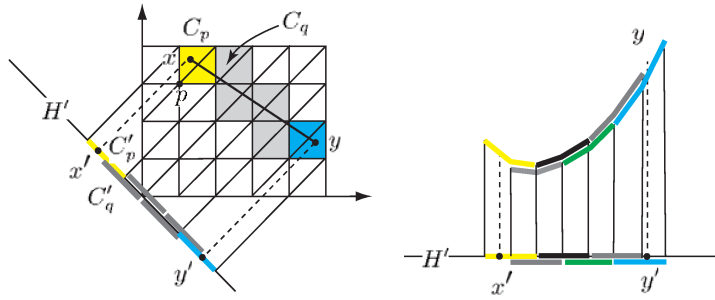


図 1: 局所的に凸の折れ線をつなぎ全体で凸にすることができる.

## 4 一般の場合

前節のアイデアは  $n \geq 3$  のときも機能する. 例えば  $n = 3$  のとき,  $C_p$  は立方体,  $C'_p$  は正六角形になり,  $C_p, C_q$  が隣接するとき  $C'_p$  と  $C'_q$  は少なくとも 3 分の 1 が重なる (図 2).

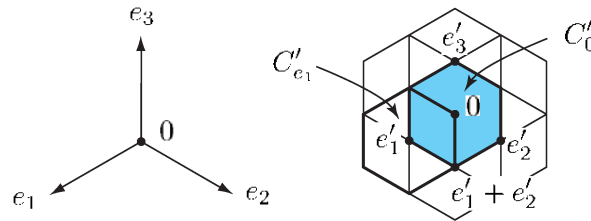


図 2:  $n = 3$  のとき,  $C'_0$  は頂点が  $e'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $e'_i + e'_j$  ( $i \neq j$ ) の正六角形になる.

しかし  $n \geq 4$  のとき,  $C'_p$  の対称性が崩れることが点  $p'$  と頂点  $p' + \sum_{i=1}^k e'_i$  の距離を計算することにより確認できる. 故に, 2つの超立方体  $C_p, C_q$  が隣接するとき  $C'_p$  と  $C'_q$  の内部が重なることを (直感的には明らかに思えるかもしれないが) きちんと示す必要があり, その証明は自明ではない.

**補題 3** 任意の点  $p \in \mathbb{Z}^V$  の射影  $p'$  は  $p' = p - \frac{p(V)}{n} \mathbf{1}$  であり, 超立方体  $C_0, C_p$  の射影はそれぞれ  $C'_0 := \text{co}\{\sum_{u \in U} e'_u \mid U \subset V\}$ ,  $C'_p := p' + C'_0$  になる.

証明. 射影の定義から容易に導かれる.

**補題 4** (a) 射影  $C'_0$  の頂点はある置換  $\pi$  と  $1 \leq k \leq n-1$  を用いて  $\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)}$  と書ける.

(b) 射影  $C'_0$  の超平面  $H'$  における相対内点は次で与えられる.

$$\bigcup_{\pi: \text{置換}} \text{co}\left\{\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)} \mid k = 1, \dots, n-1\right\}.$$

$$(c) \ C'_p = \{x \in H' \mid (e_i - e_j)^T(x - p) \leq 1 \ \forall i \neq j\}.$$

(d) 射影  $C'_0$  の相対境界点は適当な  $p \in \mathbb{Z}^V$  の  $C'_p$  の相対内点である.

証明. (a) :  $\pi(i) = i$  と仮定してよい.  $c = \sum_{i=1}^k e'_i$  をとり, LP : maximize  $c^T x$  s.t.  $x \in C'_0$  を考える.  $C'_0$  の代わりにその頂点を考えれば十分なので,

$$\text{maximize } c^T \left(\sum_{j \in U} e'_j\right) \text{ s.t. } U \subset V. \quad (7)$$

$e'_i{}^T e'_u = \delta_{iu} - 1/n$  から,  $(\sum_{i=1}^k e'_i)^T (\sum_{j \in U} e'_j) = |\{1, \dots, k\} \cap U| - \frac{k|U|}{n}$ . 任意の  $1 \leq k \leq n-1$  に対し,  $U = \{1, \dots, k\}$  は右辺の最大解である. よって, LP の最適解は  $x = \sum_{i=1}^k e'_i$  であり, それは  $C'_0$  の頂点である. 一方,  $C_0$  の頂点のみが  $C'_0$  の頂点になり得るので, 頂点はすべて求まった.

(b) :  $c = e_{\pi(1)} - e_{\pi(n)}$  をとり,  $C'_0$  上で  $c^T x$  を最大化する LP を考える. (7) と同様に,

$$\text{maximize } c^T \left(\sum_{j \in U} e'_j\right) \text{ s.t. } U \subset V \quad (8)$$

を考えれば十分であり,  $U$  が (8) の最適解であるための必要十分条件は  $\pi(1) \in U$  かつ  $\pi(n) \notin U$  である. よって,  $\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)}$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) は最適解である. また, この LP は自明でないで, それらの凸包は  $C'_0$  の相対境界である.

逆に  $x^*$  を  $C'_0$  の相対内点とする. 適当な  $c (\neq 0) \in H'$  を選ぶと,  $x^*$  は  $C'_0$  上で  $c^T x$  を最大化する LP の最適解になる. このとき  $c^T x^* > 0$  と仮定してよい. 一方,  $x^* + s\mathbf{1} \in C_0$  ( $\exists s \in \mathbb{R}$ ) なので, ある置換  $\pi$  があって  $x^* + s\mathbf{1} \in \sigma_\pi$ . よって,  $x^* + s\mathbf{1}$  は凸結合  $\sum_{k=0}^n \lambda_k (\sum_{i=1}^k e_{\pi(i)})$  で表される. この射影をとると  $x^* = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)})$ . 仮に  $\lambda := \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k < 1$  とすると,  $c^T x^* / \lambda > c^T x^*$  かつ  $x^* / \lambda \in C'_0$  となり,  $x^*$  が最適であることに矛盾. 故に  $\lambda = 1$  となり,  $x^*$  は凸結合  $\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) で表される.

(c) : 最初に  $p = 0$  の場合を考える. (b) の証明で示したように,  $c = e_{\pi(1)} - e_{\pi(n)}$  は境界  $\text{co}\{\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)} \mid k = 1, \dots, n-1\}$  の法線ベクトルなので,  $c^T (\sum_{i=1}^k e'_{\pi(i)}) = 1$  から (c) が得られる. 一般の  $p$  について,  $C'_p - p' = C'_0$  なので,  $x \in C'_p$  は  $(e_i - e_j)^T(x - p') \leq 1 \ \forall i \neq j$  と同値である. 故に  $(e_i - e_j)^T p' = (e_i - e_j)^T p$  から (c) が得られる.

(d) :  $C'_0$  の境界点  $x \in \text{co}\{\sum_{i=1}^k e'_i \mid k = 1, \dots, n-1\}$  を考えれば十分である.  $x$  は凸結合  $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sum_{l=1}^k e'_l$  で表されるので,

$$(e_i - e_j)^T x = \begin{cases} \sum_{k=i}^{j-1} \lambda_k & i < j \\ -\sum_{k=j}^{i-1} \lambda_k & i > j. \end{cases}$$

(c) により, 任意の  $i \neq j$  で右边が  $p_i - p_j + 1$  より小さいことを示せばよい. そこで,  $m$  を  $\lambda_i > 0$  なる最小の番号  $i$  とし,  $p = \sum_{i=1}^m e_i$  とおく. このとき

$$p_i - p_j + 1 = \begin{cases} 2 > \sum_{k=i}^{j-1} \lambda_k & i \leq m < j, \\ 0 > -\lambda_m \geq -\sum_{k=j}^{i-1} \lambda_k & j \leq m < i, \\ 1 \geq \sum_{k=m}^{j-1} \lambda_k > \sum_{k=i}^{j-1} \lambda_k & m < i < j, \\ 1 > -\sum_{k=j}^{i-1} \lambda_k & m < j < i. \quad \blacksquare \end{cases}$$

**定理 1 の証明:** 任意の  $x', y' \in H'$  に対し,  $\hat{g}$  が線分  $|x'y'|$  上で凸になることを示せばよい. 切り下げた点  $p = \lfloor x' \rfloor, q = \lfloor y' \rfloor \in \mathbb{Z}^V$  をとると,  $x' \in C_p, y' \in C_q$ . 一般に, 線分  $|x'y'|$  は幾つかの射影  $C'_z (z \in \mathbb{Z}^V)$  を通過し, それを  $C'_{p^k} (k = 0, 1, \dots, m)$  と表しておく. ただし  $p^0 := p, p^m := q$ . また,  $|x'y'|$  と  $C'_{p^k}$  の共通部分を  $|x'_k y'_k|$  と書くと,  $x'_k$  と  $y'_k$  は  $C'_{p^k}$  の相対境界点になる. 補題 4(d) により, それらは隣接する射影の相対内点になる. よって, 2 つの線分  $|x'_k y'_k|, |x'_{k+1} y'_{k+1}|$  は重なり, 以下  $n = 2$  と同じ議論をすればよい. ■

定理 1 の逆の本質的な部分を述べたのが次の定理である.

**定理 3**  $\hat{g}$  が各超立方体  $C_p$  上で凸ならば,  $g$  は  $\mathbb{Z}^V$  で劣モジュラになる.

証明. Topkis[6, 定理 3.2] によれば,  $g(x_1, \dots, x_n)$  が劣モジュラであるための必要十分条件は  $g$  が任意の変数の組  $(x_i, x_j)$  に関して劣モジュラになることである. 簡単のため, 変数

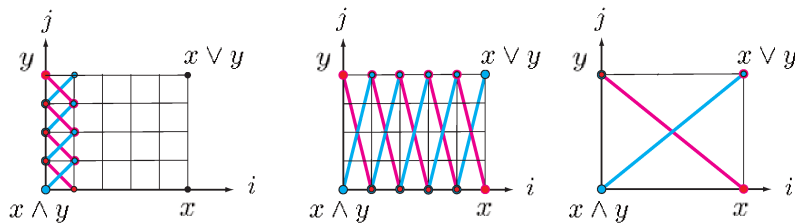


図 3: この図を不等式で表してもよいし, 帰納法で証明してもよい.

$x_k (k \neq i, j)$  を省略し  $g = g(x_1, x_2)$  と書くことにする.  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  が

比較可能, 即ち,  $x \leq y$  または  $x \geq y$  の場合, 劣モジュラ不等式 (1) は自明に成立するので,  $x_1 > y_1$  かつ  $x_2 < y_2$  の場合を考えればよい. また, 平行移動により  $x \wedge y = (0, 0)$  と仮定してよい.  $|x_1 - y_1|$  と  $|x_2 - y_2|$  に関する帰納法で (1) を示す.  $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 1$  のとき, (1) は定理 2 の直接の結果である. つまり

$$g(0, 0) + g(1, 1) \leq g(0, 1) + g(1, 0).$$

$|x_1 - y_1| = 1$  かつ  $|x_2 - y_2| \geq 2$  の場合, 各超立方体  $(0, 1) + \{0, 1\}^2, \dots, (0, y_2 - 1) + \{0, 1\}^2$  において, 同じ理由により

$$g(0, j) + g(1, j+1) \leq g(0, j+1) + g(1, j) \quad (j = 1, \dots, y_2 - 1).$$

これから

$$g(0, 0) + g(1, y_2) \leq g(0, y_2) + g(1, y_2 - 1). \quad (9)$$

このとき,  $y' := (1, y_2)$  と  $x = (x_1, 0)$  について,  $|x_1 - y'_1| = |x_1 - y_1| - 1$ ,  $|x_2 - y'_2| = |x_2 - y_1| - 1$  なので, 帰納法の仮定により,

$$g(1, 0) + g(x_1, y_2) \leq g(1, y_2) + g(x_1, 0). \quad (10)$$

(9) と (10) を足すと結論が得られる. ■

## 5 謝辞

本研究は JSPS 科研費 23540142 の助成を受けている.

## 参考文献

- [1] S. Fujishige, *Submodular Functions and Optimization* (Elsevier, Tokyo, 1991).
- [2] L. Lovász, Submodular functions and convexity, In A. Backem, M. Grötschel, and B. Korte (eds.): *Mathematical Programming - The State of The Art* (Springer, Berlin, 1983), 235-257.
- [3] K. Murota, Discrete convex analysis, *Mathematical Programming*, **83** (1998), 313-371.
- [4] 室田一雄, 離散凸解析, 共立出版 (2001).
- [5] K. Murota, *Discrete convex analysis* (SIAM, Philadelphia, 2003).
- [6] D. Topkis: Minimizing a Submodular Function on a Lattice, *Operations Research*, **26** (1978), 305-321.