

漸近解析としての Wilson 流繰り込み群と 包絡線

国広 悌二 (龍谷大学理工学部)

くりこみ群 (RG) の方法は、場の理論や臨界現象などの統計物理学の問題に適用され大きな成功を収めている [1]。RG は最初、摂動論に基づいて定式化されたが、その本質は非摂動的である。RG のこの非摂動性のため、くりこみ群には少なくとも次の 2 つのメリットがある。(1) 低次の摂動計算の結果に、Gell-Mann-Low 型のくりこみ群方程式を作用させることであるクラスのダイアグラムを無限次足し上げることができる。すなわち、RG 法は摂動級数の総和法になっている。(2) ウィルソン型の RG は、低エネルギーでの実効的な、すなわち、低エネルギーおよび長波長の領域で漸近的に厳密な有効作用あるいはハミルトニアンを得る体系的な方法になっている。

ところで、摂動級数が発散級数になっていることは場の理論に限らず数学を使うすべての科学の分野で一般的であり、何らかの便利な「総和法」が必要とされ、実際、いくつかの総和法が知られている [2]。また、ゆっくりした長波長の運動を記述する少数自由度の方程式をもとの多自由度の系から取り出す問題は、パターン形成の物理を含む統計物理学、多体系の集団運動理論等、物理学のほとんどあらゆる分野で基本的な課題である。概括して、「発展方程式の縮約」の問題と言える。

最近、Gell-Mann-Low 型の RG が通常の実数型方程式の漸近解析に有効である事がイリノイ大学のグループによって、多くの例を用いて示された [3]。本報告では、まず、[4, 5, 6, 7, 8] に基づいて、RG 法による縮約の背景にある一般的構造および解析のことばによる RG 法の手順の説明を行った。これは、RG になじみのない者には RG とは場の理論における神秘的な数学的手続きであるという印象のみを与える議論がまだ絶えない現状においては特に貴重である点を強調したい。もう少し具体的に言うと、以下のようなものである。

1. 非摂動解が中立安定解を持つとき RG 法による方程式の縮約が可能であるということ を明らかにした。[5, 7] これは 10 年前に蔵本 [9] が提示していた発展方程式の縮約の 普遍的構造と一致する。
2. RG 方程式が古典解析でよく知られている包絡線を構成するための基本方程式と同じ 形であることを指摘し、RG 法による漸近解析の解析的な側面が包絡線概念を使っ て解釈できることを示した。逆に、場の理論の RG の有効性も包絡線概念で直感的 に理解することができる。[4]
3. くりこみ群による縮約は、不変多様体の構成およびその上の縮約方程式の構成として 理解できる。摂動論が適用可能なときは、無摂動解に現れる積分定数が不変多様体の 自然な座標を与え、高次項まで考慮したとき RG 方程式がその「定数」の発展方程式 を与える。[8]
4. この方法は、無摂動方程式の線形演算子が半単純の場合のみならず、ジョルダン細胞 を持つ場合にも適用可能であることを示した。[8]

5. 時間依存 Ginzburg-Landau 方程式や KdV 方程式で記述される界面のゆっくりした運動を何の仮定もなく RG 法で取りだすことに成功した。これは、Ei-Ohta[10] の理論の基礎づけとなる。[8]
6. 量子力学に現れる摂動級数の総和法として使えることを示した。これは、摂動級数の計算が Bender-Wu の方法 [11] で可能なときは常に適用可能な強力な方法である。[6, 7]

さらに、新たな応用としてボルツマン方程式の流体力学極限を求める問題について議論した。1 次の摂動では、オイラー方程式が得られることを示した。高次の場合何らかの工夫、たとえば「平均場」のくりこみを行わなければ、ナビエーストークスではなくバーネット方程式が得られる可能性があることを指摘した。[12]

詳しい内容は上で引用された文献をご覧ください。以上。

参考文献

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1989; S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields II", Cambridge U.P., 1996.
- [2] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978).
- [3] N. Goldenfeld, O. Martin and Y. Oono, *J. Sci. Comp.* **4**(1989),4; *Phys. Rev. Lett.* **73**(1994),1311; *Phys. Rev. E* **54**(1996),376、およびそこに引用されている文献。
- [4] T. Kunihiro, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995), 503; (E) **95** (1996), 835; *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* **14**(1997),51.
- [5] T. Kunihiro, *Prog. Theor. Phys.* **97**(1997), 179.
- [6] T. Kunihiro, *Phys. Rev.* **D57**(1998), R2035.
- [7] T. Kunihiro, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131** (1998), 459; また、patt-sol/979003 も参照。
- [8] S.-I. Ei, K. Fujii and T. Kunihiro, to be published in *Ann. Phys.* (1999); see also hep-th/9905088.
- [9] Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **99** (1989) 244; 蔵本 由紀、*物性研究* **49**(1987) 299.
- [10] S.-I. Ei and T. Ohta, *Phys. Rev.* **E50** (1994), 4672.
- [11] C. M. Bender and T. T. Wu, *Phys. Rev.* **184**(1969),1231; *ibid.* **D7**(1973),1620.
- [12] T. Kunihiro、準備中。