

Pomeau-Manneville 型間欠性カオスのクロスオーバー

名大工 樹神弘也

本田勝也

静大教養 佐藤信一

力学系が外部パラメータの変化にともなって周期運動からカオスに至る道筋の一つに intermittency route がある。Pomeau と Manneville によって発見された、このカオスの発生機構は、分岐の仕方によって大きく Type I, II, III に分類された(表1)。¹⁾

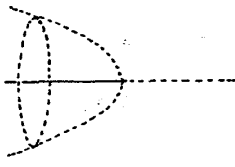
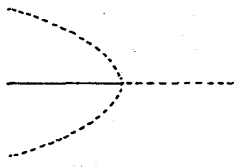
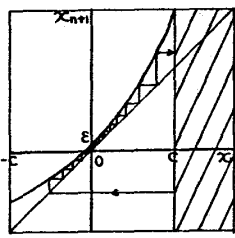
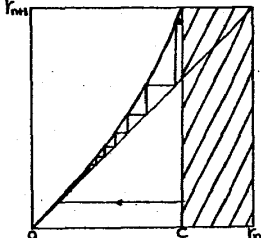
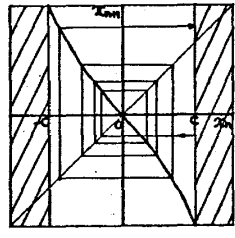
タイプ	I	II	III
分岐	鞍部結節点分岐	逆ホップ分岐	逆倍周期分岐
分岐図			
臨界モードに対するマップ (basic model)	 $X_{n+1} = \epsilon + X_n + X_n^2$	 $r_{n+1} = (1+\epsilon)r_n + r_n^3$ $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$	 $X_{n+1} = -(1+\epsilon)X_n - X_n^3$

表1 3つのタイプの間欠性カオス

q 次のレニーエントロピー K_q や $h(q)$ スペクトラムは力学系の動的な性質を明らかにするが、Pomeau-Manneville 型間欠性カオスの場合、分岐点近傍においてこれらの量に関連した様々なスケーリング則が成り立つことが期待される。本研究は、Type I ~ III の basic model に対して分岐近傍における K_q , $h(q)$ を解析的手段を用いて求め、その特徴を考察したものである。 K_q や $h(q)$ を議論するときの要は分配関数 $Z_n(q) = \sum_{i_0, \dots, i_n} P\{i_0, \dots, i_n\}^q$ である。但し、 i_j は相空間を分割したときの1つの boxを表わし、 $P\{i_0, \dots, i_n\}$ は軌道 $x_0, \dots, x_n$ がそれぞれ box $i_0, \dots, i_n$ に入る結合確率である。間欠性カオスに対しては、

$$f(q) \equiv (q-1)K_q = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(q) \quad (\equiv -\bar{p}(q))$$

が代数方程式

$$\Phi(\bar{p}, q) \equiv \sum_j \exp\{-\bar{p}(q)j - qU(j)\} = 1 \quad (1)$$

$$U(j) = \begin{cases} -\ln b & (j=1) \\ -\ln(aP(j)) & (j \geq 1) \end{cases} \quad (P(j): \text{長さ } j \text{ のラミナーを見出す確率})$$

(a :バーストの後にラミナーが起る確率, b :バーストの後にバーストが起る確率)

の解として与えられることが報告されている。²⁾

幸いにして、Type I ~ III に対する $P(j)$ は近似的に初等関数で表わせることが分かっているのので：

$$\text{Type I : } P_{\varepsilon}(j) = \frac{\varepsilon}{2c} \operatorname{cosec}^2 \left\{ \sqrt{\varepsilon} \left(j + \frac{1}{c} \right) \right\} \quad , \quad 0 \leq j \leq j_{\max} \left(= \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{2}{c} \right)$$

$$\text{Type II : } P_{\varepsilon}(j) = \frac{2\varepsilon^2 (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j)}{\left\{ (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j) - c^2 \right\}^2} \quad , \quad 0 \leq j \leq \infty$$

$$\text{Type III : } P_{\varepsilon}(j) = \frac{\varepsilon^{3/2} (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j)}{\left\{ (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j) - c^2 \right\}^{3/2}} \quad , \quad 0 \leq j \leq \infty$$

これらを用いて (1) 式より $f(q)$ を評価できる。また、バーストの頻度の q 次平均量

$$\Psi_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_0, \dots, i_n} m\{i_0, \dots, i_n\} P\{i_0, \dots, i_n\}^q / Z_n(q)$$

($m\{i_0, \dots, i_n\}$ は、 $x_0, \dots, x_n$ のうちのバーストの数)

は (1) 式で決められる $\bar{p}$ により

$$\Psi_q = \left. \frac{1}{\frac{\partial \Phi(\bar{p}, q)}{\partial \bar{p}}} \right|_{\bar{p} = \bar{p}}$$

と与えられるので、これも評価した。以下に結果を示す。

Type I

	$ q - 1 < 1$
$\bar{p}_q$	$-\sqrt{\varepsilon}(q - 1)$
K_q	$\sqrt{\varepsilon}$
γ_q	$\sqrt{\varepsilon}$
$h(\gamma_q)$	$\sqrt{\varepsilon}$
Ψ_q	$\sqrt{\varepsilon}$

Type II

	$-\varepsilon \ln \varepsilon < 1 - q < 1$	$ q - 1 < -\varepsilon \ln \varepsilon$	$-\varepsilon \ln \varepsilon < q - 1 < 1$
$\bar{p}_q$	$(q - 1) / \ln(1 - q)$	$(q - 1) / \ln \varepsilon$	$-\varepsilon - \varepsilon(q - 1)$
K_q	$-1 / \ln(1 - q)$	$-1 / \ln \varepsilon$	$\varepsilon / (q - 1)$
γ_q	$-1 / \{ \ln(1 - q) \}^2$	$-1 / \ln \varepsilon$	ε
$h(\gamma_q)$	$-1 / \{ \ln(1 - q) \}^2$	$-1 / \ln \varepsilon$	0
Ψ_q	$-1 / \ln(1 - q)$	$-1 / \ln \varepsilon$	0

Type III

	$\sqrt{\varepsilon} < 1 - q < 1$	$ q - 1 < \varepsilon$	$\sqrt{\varepsilon} < q - 1 < 1$
$\bar{p}_q$	$(q - 1)^2$	$-\sqrt{\varepsilon}(q - 1)$	$-\varepsilon - \varepsilon(q - 1)$
K_q	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon / (q - 1)$
γ_q	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	ε
$h(\gamma_q)$	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	0
Ψ_q	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	0

この結果から、Type II に対しては次の様な概念図を描くことができる。

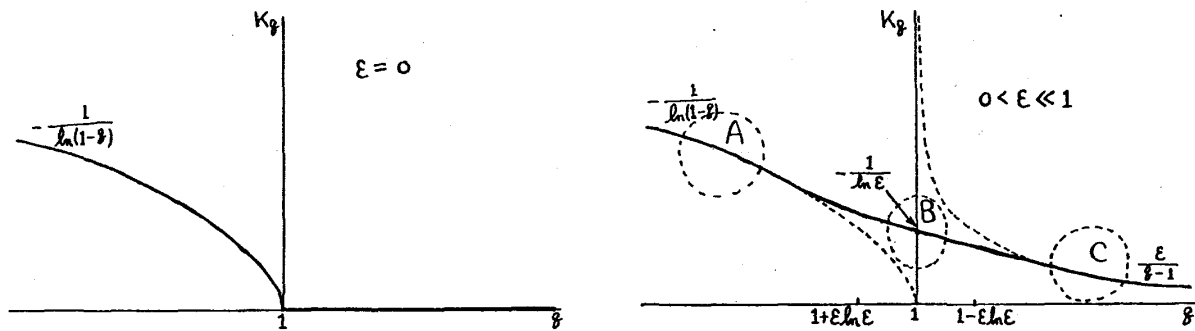


図 1 Type II に対する K_q プロットの概念図

A, B, C の領域は、 ε の変化も考えると、曲線 $\varepsilon = -|q-1|/\ln|q-1|$ によって隔てられるが、この曲線上ではとなりあう領域がクロスオーバーしている。(図 2)

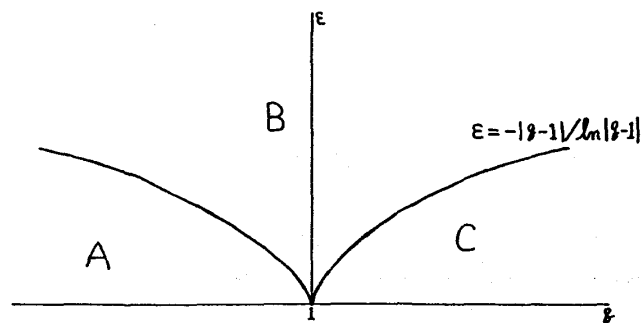


図 2 クロスオーバーライン (for Type II)

Type III の場合は、Type II と同様なので省略する。

Type I では、 K_q の振舞いは Type II, III とは異なり、A, B, C の様な領域が存在しない。従って当然クロスオーバーラインもない。これは、Type I は $q=1$ で q 相転移を起さないことを意味するが、分岐点上 ($\varepsilon=0$) においてもカオス的な振舞いを示す不変測度は存在するので (図 3)、 $q=1$ よりも小さな q で一次の q 相転移を起こすと考えられる。

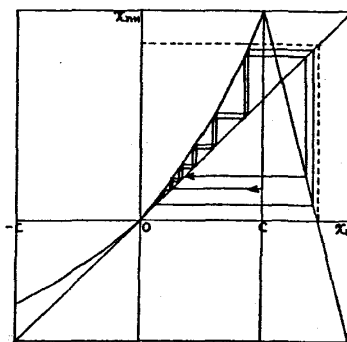


図 3 カントール集合上を動くカオス的な軌道

文献

- 1) H. G. Schuster: "Deterministic Chaos", VCH, (1988)
- 2) S. Sato and K. Honda: to be published in Phys. Rev. A.
K. Honda and S. Sato: Prog. Theor. Phys. 82, 682 (1989).