

Lobachevsky 空間の discrete group について
— Vinberg の一連の論文の紹介 (Ⅳ) —

東大 数学科 村上 順

§ 1 目標

植野, 山口両氏により紹介された結果をもとに, §2 ではいくつかの条件を満たす離散鏡映群を具体的に求めよう。そして §4 では Lobachevskii 空間 Λ^n に作用する離散群の様子を知るために有効な方法を示そう。そのために §3 で, I, II で述べられた定理等を, 応用しやすい形に述べ直そう。さらに §5 では §4 の結果を用いて, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の符号 $(n, 1)$ の二次形式に関する unit elements の生成する群の様子を調べてみよう。但し, Λ^n に作用する群は, Λ^n の運動群の部分群になっているものとする。

なお, 以下に述べる内容は主に Vinberg [8] による。

§ 2 ある条件の下での離散鏡映群の分類

ここでは, $\mathbb{R}^n, E^n$ に作用する離散鏡映群を分類し, さらに

Λ に作用する離散鏡映群で、基本領域が有界な単体となるものを分類するが、その前にいくつかの準備をする。

1 Gram 行列

S^n, E^n, Λ^n を に述べられているようにして E^{n-1} に埋め込まれていると考え、 S^n, E^n, Λ^n に作用する離散鏡映群は自然に E^{n-1} に作用する直交 Coxeter 群となる。

Γ の基本領域 K に対し、 K の境界を成す超平面の族を $\{\pi_i\}_{i \in I}$ とする。 π_i を鏡映面とする鏡映 R_i をとると、 $\{R_i\}_{i \in I}$ は Γ を生成する。そこで π_i の単位法線ベクトルで K の外へ向うものを e_i とする。このとき、 $A = (e_i, e_j)_{i, j \in I}$ を Γ の Gram 行列と呼ぶ。ここで、 i と j が異なり、 $R_i R_j$ の位数が有限のとき、それを n_{ij} と書くと、 $(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{n_{ij}}$ が成り立つ。

2 Coxeter グラフ

1 で定めた Gram 行列は K の性質を良く表わしているが、見易くはない。そこで、Gram 行列を一種の無向グラフを定める行列と考え、グラフの形に直すと見易くなる。このときできたグラフを Coxeter グラフと言ひ、次の様に作る。

Coxeter グラフの作り方

頂点は Γ の基本領域 K の境界を成す超平面 $\pi_i, i \in I$ を表わすものとし、頂点の集合と I とを同一視する。そして $\{e_i\}$ を 1 で決めたようにとり、頂点 i と頂点 j を結ぶ辺を次の様に定め

る。

$$-1 < (e_i, e_j) \leq 0 \quad \text{のとき} \quad \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \end{array} \quad (n_{ij}-2 \text{ 本の実線})$$

$$\text{又は} \quad \begin{array}{c} i \quad n_{ij} \quad j \\ \text{---} \end{array}$$

但し n_{ij} は $(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{n_{ij}}$ となる正の整数

$$(e_i, e_j) = -1 \quad \text{のとき} \quad \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \end{array} \quad (\text{太線})$$

$$(e_i, e_j) < -1 \quad \text{のとき} \quad \begin{array}{c} i \quad \text{-----} \quad j \\ \text{---} \end{array} \quad (\text{破線})$$

ここで破線の上に (e_i, e_j) の値を書くこともある。

3 Gram 行列と Coxeter グラフの関係

2により、Gram 行列から Coxeter グラフを作る方法がわかった。さらに離散鏡映群 P の基本領域 K の境界を成す超平面の族 $\{\pi_i\}_{i \in I}$ に対し、 I の部分集合 S を考える。 K の Gram 行列を $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ とすると、 A の S についての主部分行列 $A_S = (a_{ij})_{i,j \in S}$ の定める Coxeter グラフは、 A の定める Coxeter グラフ Σ の頂点が S に含まれ、両端点とも S に入るような辺から成る部分グラフ Σ_S と一致する。

また、 A が分解不能であることと A の Coxeter グラフ Σ が連結であることは同値である。

4 S^n に作用する離散鏡映群の分類

S^n に作用する離散鏡映群の特徴付けは II の命題 3 により得られる。これは Coxeter [1] により分類されていて、その Coxeter グラフは表 1 のようになる。

5 E^n に作用する離散鏡映群の分類

E^n に作用する離散鏡映群の特徴付けはⅡの命題4により得られる。これも Coxeter [1] により分類されていて、その Coxeter グラフは表2のようになる。

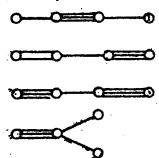
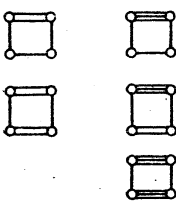
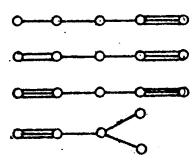
表 1		表 2	
A_n ($n \geq 1$)		$\tilde{A}_n$ ($n \geq 2$)	
B_n ($n \geq 2$)		$\tilde{A}_1$	
D_n ($n \geq 4$)		$\tilde{B}_n$ ($n \geq 3$)	
E_n ($n=6, 7, 8$)		$\tilde{C}_n$ ($n \geq 2$)	
F_4		$\tilde{D}_n$ ($n \geq 4$)	
$G_2^{(m)}$ ($m \geq 5$)		$\tilde{E}_6$	
H_3		$\tilde{E}_7$	
H_4		$\tilde{E}_8$	
		$\tilde{F}_4$	
		$\tilde{G}_2$	

6 A^n に作用する基本領域が単体となる離散鏡映群の分類

単体とは、共通点を持たない $n+1$ 個の超平面 $\pi_i, i=1, \dots, n+1$ を境界とする A^n の有界な図形のことである。

S_i を $\{1, 2, \dots, n+1\}$ から i を除いた集合とするとき, S_i に対応する面分 K_{S_i} は $\mathcal{A}$ 中で空でないので, I の定理 2 により, 単体の Gram 行列 A の S_i に対応する主部分行列 A_{S_i} は積円型である。従って A に対応する Coxeter グラフ $\bar{L}$ に対しては, A が群の作用によって定まるものならば, 任意の i について, $\bar{L}_{S_i}$ の任意の連結成分が表 1 のどれかでなければならぬ。また, このようなものを基本領域とする群は存在する。このようなものは Lanner [2] により分類されていて表 3 のようになる。

表 3

$n=2$	 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1$
$n=3$	 
$n=4$	 

§ 3 I, II より導かれる有用な定理

1. 定義と記号

K を $\mathcal{A}$ 中の凸多面体で, 2 面の成す角が $\frac{\pi}{2}$ 以下となっているものとする。 K の境界を成す超平面 π_i に対し, 原点と π_i を通る $\mathbb{R}^{n+1}$ の超平面を $cn \pi_i$ とする。 $cn K$ を, $\mathbb{R}^{n+1}$ 中の $cn \pi_i$ で包み込まれる K を含む方の閉半空間とする。 $cn K = \bigcap_{i \in I} cn \pi_i$ とおく。

以下 $cn K$ が真に凸となるような K のみを考えることにする。

このときある超平面 H があって、 $cn K \cap H$ は閉いた多面体となる。そして $cn K \cap H$ には自然に複体構造が入る。これを $\mathcal{C}''K$ と置く。II で考えた K の複体 $\mathcal{C}K$ は自然に $\mathcal{C}''K$ の部分複体と考えられる。また、 $\mathcal{C}''K$ の頂点のうち、 ∞ の無限遠点に対応する頂点を $\mathcal{C}K$ に付け加えたものも複体となる。これを $\mathcal{C}'K$ とする。II で考えた写像 $\alpha: \mathcal{C}K \rightarrow I$ は自然に $\mathcal{C}''K$ に拡張される。 $fK = \alpha(\mathcal{C}K)$, $f'K = \alpha(\mathcal{C}'K)$, $f''K = \alpha(\mathcal{C}''K)$ とおく。

2 定理

定理1 K を $\mathbb{A}^n$ の二面の成す角が $\frac{\pi}{2}$ 以下の多面体とする。これに対応する Gram 行列を $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ とする。 S を I の部分集合とする。このとき

- 1) S が fK に含まれることと、 $A_S = A_S^+$ となることは同値である。
- 2) S が $f'K \setminus fK$ に含まれることと、 $A_S = A_S^0$ となって A_S のランクが $n-1$ となることは同値である。

さらに、 G_S が正定値ならば、 K の S に対応する面分 K_S の次元は $n - \#(G)$ である。

右肩についた $+$, 0 の意味は I. §2 のとおりである。

3 臨界行列

定義 対称行列で I の (C1) を満たすもので、正定値ではないが、その任意の、真の主部分行列が正定値となるもの

のを臨界行列と言う。

命題1 K を $\mathbb{A}^n$ 中の多面体とすると、 K の体積が有限となることと次は同値である。 $(a_{ij})_{i,j \in I}$

K の Gram 行列 A について、 A の臨界主部分行列 A_S ($S \subset I$) に対し、次のいずれかが成り立つ。

a) もし $A_S = A_S^0$ ならば $A_T = A_T^0$ かつ $T \supset S$ なる I の部分集合 T が存在して、 $\text{rank } A_T = n-1$ となる。

b) もし $A_S = A_S^0$ ならば S に対応する K の面分はない。

K が有界であることと次は同値である。

K の Gram 行列 A について、 A の主部分行列で、退化した半正値行列になるものではなく、臨界行列となるものは、上の条件 b) を満たす。

§4 鏡映で生成される極大部分群

$\mathbb{A}^n$ に作用する運動群の離散部分群 Θ に対し、 Θ 中の鏡映で生成される極大部分群 Γ を求めるアルゴリズムを与える。運動が良ければこのアルゴリズムは有限で終わり、 Θ/Γ も有限群になる。

1 Θ と Γ の関係

命題2 Γ は Θ の正規部分群で、 $\Theta = \Gamma \cdot H$ (半直積) と書ける。

但し H は Γ の基本領域 K の固定部分群の部分群である。

2 P の基本領域を求めるアルゴリズム

ここでは P の基本領域の境界を成す超平面の族 $\{\pi_i\}_{i \in I}$ を求める為、 E^{n-1} での $\cap \pi_i$ の法線ベクトルで、基本領域の外へ向かうものの族 $\{e_i\}_{i \in I}$ を求める。 $\cap \pi_i$ は P の A^n への作用を自然に E^{n-1} への作用に拡張したときの鏡映面である。

① R を、④に属する鏡映の E^{n-1} への作用による鏡映面の法線ベクトルの全体とする。

② A^n 中の 1 点 p_0 を固定すると、 p_0 を含む P の基本領域 P がある。 p_0 を含む鏡映面をもつような鏡映で生成される群を Γ_0 とする。 $\Gamma_0 = \{1\}$ のときは⑤へ進む。

③ Γ_0 の基本領域で P を含むものを P_0 とする。

④ R の元 $e_1, \dots, e_k$ を次を満たすようにする。

$$\pi_{e_i}^- = \{x \in A^n; (x, e_i) \leq 0\} \text{ とするとき, } P_0 = \bigcap_{i=1}^k \pi_{e_i}^- \text{ である.}$$

⑤ R の元 e_l ($l > k$, 但し $\Gamma_0 = \{1\}$ のときは $k=0$ とみなす) を次のように帰納的にとってゆく。

$(e_i, e_l) \leq 0$ (任意の $i < l$ に対して, 但し $l=1$ のときは考えなくてよい)

を満たし, p_0 と π_{e_l} との距離が最小になるような。

そして $p_0 \in \pi_{e_l}$ となるような向き e_l をとる。

3 アルゴリズムの正当性

命題 3 $P = \bigcap_{i=1}^n \pi_{e_i}^-$ 且 e_i は 2 で割ったものすべてで P にあるかもしれない。

4 アルゴリズムの終了条件

命題 4 $P^{(m)} = \bigcap_{i=1}^m \Pi e_i$ とするとき、 $P^{(m)}$ の体積が有限ならば $P^{(m)} = P$ である。但し e_i は α で決めたベクトルである。

これにより、 α で e_i を決めてゆくとき、 $P^{(m)}$ の体積が有限になることを終えてよいことがわかる。

§ 5 2 次形式 $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ に関する unit elements で生成される群 Φ

1. Φ とは何か

Φ とは、 $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底 $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ に関する 2 次形式

$$f(x) = -x_0^2 + \dots + x_n^2 \quad (x = \sum_{i=0}^n x_i v_i) \quad \text{の unit lattice } L = \sum_{i=0}^n \mathbb{Z} v_i$$

と、 f を変えない線形変換群のことである。 $-1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; -x_0\}$ とすると、 $-1^n \cup 1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; f(x) = 1\}$ なので、 Φ は $-1^n \cup 1^n$ を保つ。そして 1^n を保つ部分群 Θ は指数 2 で Φ に含まれていて、 $\Phi = \Theta \times \{1, -1\}$ となる。そこで Θ を調べてみよう。

2. Θ の、鏡映で生成される極大部分群 P の基本領域

§ 4 の手法を Θ に適用してみよう。

$$\textcircled{1} \mathcal{R}' = \{e = \sum_{i=0}^n k_i v_i; k_i \in \mathbb{Z}, -k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2 = 1 \text{ 又は } 2\}$$

とすると、 $\mathcal{R}'$ は Θ のすべての鏡映による鏡映面を表す法線ベクトルを含むので、 $\{e_i\}_{i=1}^n$ は $\mathcal{R}'$ の中からとればよい。

② P_0 として v_0 に対応する A^n の点をとる。

③ $P_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in A^n, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0\}$ とできる。

④ P_0 の境界を成す超平面の法線ベクトルで条件を満たす

ものは
$$e_i = -v_i + v_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

$$e_n = -v_n$$
 である。

⑤ 実際に行くと, $n \leq 17$ のときは §4 の命題 4 により有限個で終わり, 表 4 のようになる。このときの Coxeter グラフを表 5 にあげておく。このとき, H は Γ の基本領域の固定部分群に等しくなる。

表 4

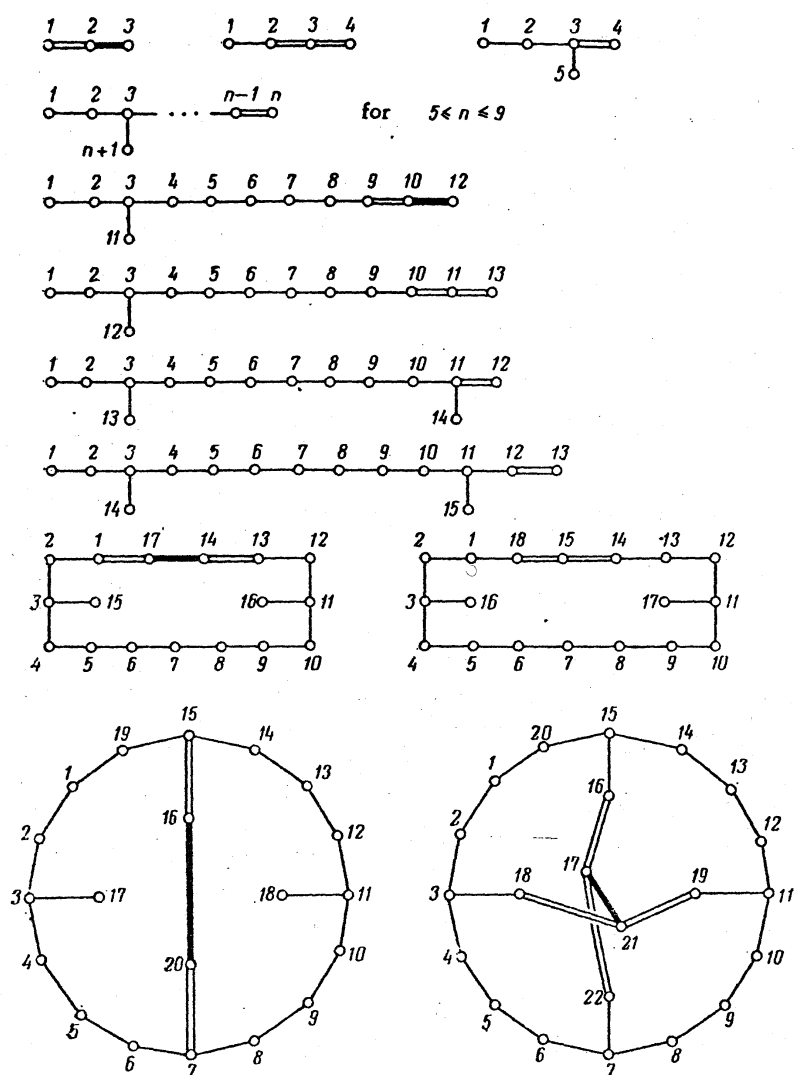
i	e_i	e	n	$\frac{K_0^2}{e}$
$n+1$	$v_0 + v_1 + v_2$	1	2	1
	$v_0 + v_1 + v_2 + v_3$	2	≥ 3	0.5
$n+2$	$v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$	1	10	9
	$v_0 + v_1 + \dots + v_{11}$	2	≥ 11	4.5
$n+3$	$4v_0 + 2v_1 + v_2 + \dots + v_{14}$	1	14	16
	$4v_0 + 2v_1 + v_2 + \dots + v_{15}$	2	≥ 15	8
$n+4$	$6v_0 + 2(v_1 + \dots + v_7) + v_8 + \dots + v_{16}$	1	16	36
	$4v_0 + v_1 + \dots + v_{17}$	1	17	16
$n+5$	$6v_0 + 2(v_1 + \dots + v_7) + v_8 + \dots + v_{17}$	2	17	18

3 $n \geq 18$ のとき

Leech lattice と呼ばれる, 原点からの距離が 1 または 2 にならないような, 24次元のある二次形式に関する unit lattice が知られている。このことから, $n \geq 25$ のときは, P の基本領域は体積が無限になるので, θ/P も無限になってしまう。

$18 \leq n \leq 24$ のときはまたわかっていない。

表 5



文 献

- 1 H. S. M. Coxeter : Discrete groups generated by reflections,
Ann. Math., 35, (1934), 588-621
- 2 F. Lanner : On complexes with transitive groups of automorphisms,
Lunds Univ. Math. Sem., 11 (1950).
- 3 J. H. Conway : A characterization of Leech's lattice,
Invent. Math., 7 (1969), 137-142
- 4 J.-P. Serre : Cours d'arithmétique,
Presses Universitaires de France, Paris, (1970)
- 5 E. M. Andreev : On convex polyhedra of finite volume in
Lobachevskii spaces, Math. Sbornik, 83, (1970),
256-260.
- 6 È. B. Vinberg : Discrete groups generated by reflections in
Lobachevskii spaces, Mat. Sbornik, 72 (1967), 471-488
- 7 È. B. Vinberg : Discrete linear groups generated by reflections,
Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat., 35, (1971), 1072-1112
- 8 È. B. Vinberg : On the groups of units of some quadratic forms,
Mat. Sbornik, 87 (1972), 18-36