

Forced Vibrations for a Superlinear Wave Equation

早大理工 田中和永 (Kazunaga Tanaka)

0. 序

次の非線型波動方程式の周期解の存在について考える。

$$(1) \quad v_{tt} - v_{xx} + g(x, v) = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R},$$

$$(2) \quad v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(3) \quad v(x, t + 2\pi) = v(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}.$$

ここで $f(x, t)$ は周期 2π をもつ関数、 $g(x, \xi) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R})$

は $g(x, 0) = 0$ かつ

$$g(x, \xi) / \xi \rightarrow \infty \quad (|\xi| \rightarrow \infty)$$

をみたすと仮定する。(このような g を superlinear と呼ぶ)。

従来、 g が superlinear のときは $f \equiv 0$ として非自明な解を求めることが行われている。特に、P. H. Rabinowitz は次を示した。

定理 0 ([15]) $g(x, \xi)$ は次の条件をみたすと仮定する。

(g₁) $g(x, \xi)$ は ξ について狭義単調増加。

(g₂) ある $\mu > 2$, $\ell > 0$ に対して

$$0 < \mu G(x, \xi) \equiv \mu \int_0^\xi g(x, \tau) d\tau \leq \xi g(x, \xi)$$

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \forall |\xi| \geq \ell$$

このとき、(1)–(3) ($f \equiv 0$) は無限個の弱解をもち、それらは L^∞ で非有界集合をなす。

注意 1 条件 (g₂) より $|g(x, \xi)| \geq C_1 |\xi|^{\mu-1} - C_2$ が従う。

P. H. Rabinowitz [13], H. Brézis - J. M. Coron - L. Nirenberg [7], J. M. Coron [9] も参照されたい。

ここでは外力項が存在する場合、すなわち $f \neq 0$ のときを考えたい。この場合の研究はまだほとんど行われていない。 $f(x, t)$ が t に依存するときには (1)–(3) が解を (ただ一つでも) 持つかどうかさえ知られていないと思われる。($g(x, \xi)$ が ξ につれて無限大で一次の order を持つ場合、すなわち $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{g(x, \xi)}{\xi} < \infty$ のときには "nonresonance condition" の下で解の存在が知られている。c.f. H. Brézis [6])。

次の結果が成立する。

定理 1 ([18]) 仮定 (g₁), (g₂) に加えて $g(x, \xi) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R})$

は

(g₃) ある $s > 1$, $C > 0$ に対して

$$|g(x, \xi)| \leq C(|\xi|^s + 1) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

をみたし、 $f(x, t) \in L^\infty([0, \pi] \times \mathbb{R})$ は周期 2π をもつ関数とする。さらに (g₂), (g₃) に現われた μ, s に対して次を仮定する。

$$(g_4) \quad \frac{2}{s-1} > \frac{\mu}{\mu-1}$$

このとき、(1)–(3) は無限個の弱解をもち、それらは L^∞ で非有界集合をなす。

上記の定理の特別な場合として

定理 2 ([17]) $g(x, \xi) = |\xi|^{s-1} \xi$ ($1 < s < 1 + \sqrt{2}$) とするとき、周期 2π を持つ任意の $f(x, t) \in L^\infty([0, \pi] \times \mathbb{R})$ に対して (1)–(3) は無限個の弱解をもち、それらは L^∞ で非有界集合をなす。

注意 2 上の 2 つの定理で、 f の大きさ $\|f\|_\infty$ に対して何も仮定していない。

注意 3 v が (1)–(3) の弱解であるとは、 v は $L^\infty([0, \pi] \times \mathbb{R})$ に属する周期 2π の関数であり、さらに境界条件 (2), (3) をみたす任意の $\phi \in C^2([0, \pi] \times \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v(\phi_{tt} - \phi_{xx}) dx dt + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(x, v)\phi dx dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f\phi dx dt \end{aligned}$$

をみたすことを意味する。

注意 4 定理 1 において $g(x, \xi), f(x, t)$ が共に C^∞ ならば、
(1)–(3) のすべての弱解は C^∞ である。(c.f. [8], [13])

問題 (1)–(3) は次の楕円型の問題と密接に関連している。

$$(4) \quad -\Delta u = g(x, u) + f(x), \quad x \in D,$$

$$(5) \quad u = 0, \quad x \in \partial D.$$

ここで $D \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 ∂D をもつ有界領域、 $f(x) \in L^2(D)$ であり、 $g \in C(\bar{D} \times \mathbb{R})$ は次をみたすとする。

$$(g_5) \quad g(x, -\xi) = -g(x, \xi) \quad \forall x \in \bar{D} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

この問題は A. Bahri – H. Berestycki [3], M. Struwe [16], P. H. Rabinowitz [14] らにより研究され、任意の $f(x) \in L^2(D)$ に対して無限個の弱解が存在するための $g(x, \xi)$ に対する条件が求められている。彼らは問題を $H_0^1(D)$ 上の functional

$$u \mapsto \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D G(x, u) dx - \int_D f u dx$$

の critical point を求めることに帰着し、この functional に対するエネルギー評価とある種の Lusternik – Schnirelman の

理論を用いている。特に、P. H. Rabinowitz [14] の得た結果の $N=2$ の場合は、 $(g_2) - (g_4)$ と類似の条件と (g_5) の下で任意の $f(x)$ に対して無限個の解の存在を示している。また、時間に関する対称性を用いることにより、常微分方程式の Hamilton 系に対する周期問題もあつかっている。我々も時間に関する対称性を用いて波動方程式 (1) - (3) の解の存在を (g_5) を仮定せず"に示している。

定理 1, 2 を証明する際に、まず"問題 (1) - (3) をある functional の critical point を求めることに帰着する。我々の用いる functional は H. Brézis - J. M. Coron - L. Nirenberg [7] によ、て導入されたもので、ある種の Legendre 変換により得られるものである。(この手法は dual variational method と呼ばれる(§1))。定理はこの functional に対して P. H. Rabinowitz [14] の手法を適用することにより証明される。このとき functional に対する L^2 -評価が重要である。また定理 0 の dual variational method による簡単な証明を与えることができる。

ここでは簡単のため、定理 2 の証明を述べ、定理 1 はその概略を述べるにとどめる。最後に定理 0 の dual variational method による別証明を与える。

1. Dual Variational Method

$\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ として、 Ω 上の関数と $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ 上の周期 2π をもつ関数を同一視する。 L^p で Ω 上の p 乗可積分関数の空間を表わし、その norm を $\| \cdot \|_p$ で表わす。

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx dt \right)^{1/p}$$

次に境界条件 (2) と周期条件 (3) を考慮した L^1 での作用素 $Au = u_{tt} - u_{xx}$ を考える。その核は次で表わされる。

$$\begin{aligned} N &= \{ \varphi(t+x) - \varphi(t-x) ; \varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ } 2\pi\text{-periodic} \} \\ &= \overline{\text{span}} \{ \sin jx \cos jt, \sin jx \sin jt ; j \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

$\int_{\Omega} v \phi = 0$ ($\forall \phi \in N \cap L^\infty$) をみたす $v \in L^1$ に対して $Au = v$ かつ $\int_{\Omega} u \phi = 0$ ($\forall \phi \in N$) をみたす $u \in C(\bar{\Omega})$ が一意的に存在する。この u を $Kv (= A^{-1}v)$ とかく。次の性質はよく知られている。(c.f. [7])

$$\|Kv\|_\infty \leq C \|v\|_1$$

$$\|Kv\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|v\|_q \quad \alpha = 1 - \frac{1}{q}$$

$$\int_{\Omega} (Kv_1) v_2 = \int_{\Omega} v_1 (Kv_2)$$

== 2'', 非線型項 $g(\xi) = |\xi|^{s-1}\xi$ にあられる s に対して

$$q = \frac{1}{s} + 1 \in (1, 2)$$

$$\begin{aligned} E &= \{ u \in L^q ; \int_{\Omega} u \phi = 0 \quad \forall \phi \in N \cap L^p \} \\ &\quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \end{aligned}$$

とおく。以後 Banach 空間 $(E, \|\cdot\|_q)$ で考える。 $(\cdot, \cdot)$ によ

リ E^* と E 、あるいは L^p と L^q の積を表わす: $(u, v) = \int_{\Omega} uv$.

与えられた $f \in L^\infty$ に対して E 上の functional $I(u)$ を

$$I(u) = \frac{1}{2} (Ku, u) + \frac{1}{q} \|u+f\|_q^q \in C^1(E, \mathbb{R})$$

で定義する。あきらかに

$$(I'(u), \zeta) = (Ku + |u+f|^{q-2}(u+f), \zeta) \quad \forall u, \zeta \in E$$

ゆえに u が $I(u)$ の critical point (i.e., $I'(u) = 0$) ならば

$Ku + |u+f|^{q-2}(u+f) \in N \cap L^p$ 、このとき $v = |u+f|^{q-2}(u+f)$ は

$$Av + |v|^{s-1}v = f$$

をみたすことが容易にわかる。したがって (1)–(3) ($g(x, \xi)$

$= |\xi|^{s-1}\xi$) の弱解と $I(u)$ の critical point が一対一に対応

する。(対応する弱解が L^∞ に属することは [7, 8] を参照されたい。)

ゆえに $I(u)$ の critical point を求めればよい。

以上が問題 (1)–(3) の dual variational formulation と呼ばれる。

2. 定理2の証明

a) functional $J(u)$

我々は [14] で行われているように $I(u)$ を以下で定義する

functional $J(u)$ でおきかえる。その理由はのちに述べる命題1が $J(u)$ に対してのみ成立するためである。

次の条件をみたす $\kappa(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ をえらぶ。

$$\chi(\xi) = 1 \quad (\xi \leq 1), \quad \chi(\xi) = 0 \quad (\xi \geq 2)$$

$$-2 \leq \chi'(\xi) \leq 0, \quad 0 \leq \chi(\xi) \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

==で $u \in E$ に対して

$$\Phi(u) = a(I(u)^2 + 1)^{1/2}, \quad a = \frac{6\beta + 4}{2 - \beta}$$

$$\psi(u) = \chi(\Phi(u)^{-1}(-Ku, u))$$

$$J(u) = -\frac{1}{2}(-Ku, u) + \frac{1}{\beta} \|u\|_2^2 \\ + \frac{1}{\beta} \psi(u) (\|u+f\|_2^2 - \|u\|_2^2) \\ \in C^1(E, \mathbb{R})$$

とおく。

また E 上の S^1 -作用を次で定義する。

$$(T_\theta u)(x, t) = u(x, t + \theta) \quad \forall u \in E \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \simeq S^1$$

==で、もし $f \equiv 0$ ならば、functional $I(u)$ ($= J(u)$) は S^1 -invariant であること (i.e., $I(T_\theta u) = I(u) \quad \forall u \quad \forall \theta$) に注意する。

ここで証明なしで2つの命題を述べる (c.f. [17, 18])。命題1は $J(u)$ が S^1 -invariant からどのくらいずれているかを表わしている。また命題2は $I(u)$ と $J(u)$ の関係を与えている。

命題1 定数 $\beta = \beta(\|f\|_\infty) > 0$ が存在して、任意の $u \in E$, $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して

$$(6) \quad |J(T_\theta u) - J(u)| \leq \beta (|J(u)|^{(q-1)/q} + 1)$$

命題 2 定数 $M = M(\|f\|_\infty) > 0$ が存在して、 $J(u) > M$ かつ $\|J'(u)\|_{E^*} < 1$ ならば $J(u) = I(u)$ 。

系 1 $J'(u) = 0$ かつ $J(u) > M$ ならば $I(u) = J(u)$ かつ $I'(u) = 0$ 。

系 2 $J(u) \in C^1(E, \mathbb{R})$ は集合 $\hat{A}_{M+1} = \{u \in E; J(u) \geq M+1\}$ 上で次の Palais - Smale 条件 (P.S.) をみたす。

(P.S.) $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset E$ がある $\tilde{M} > 0$ に対して

$$M+1 \leq J(u_j) \leq \tilde{M} \quad \forall j$$

$$J'(u_j) \rightarrow 0 \quad \text{in } E^*$$

をみたせば、 $\{u_j\}$ は収束部分列をもつ。

系 1 は命題 2 から直ちに従う。この系より我々は $J(u)$ の critical point で $J(u) \geq M$ なるものを求めればよい。また系 2 は命題 2 と $I(u) \in C^1(E, \mathbb{R})$ が (P.S.) をみたすことから従う。条件 (P.S.) は mountain pass lemma 等での critical point を構成する際に必要な条件である。

b) critical point の構成

作用素 K は

$$\begin{aligned} E \cap L^2 &= \{ u \in L^2 ; \int_{\Omega} u \phi = 0 \quad \forall \phi \in N \cap L^2 \} \\ &= \overline{\text{span}} \{ \sin jx \cos kt, \sin jx \sin kt ; j \in \mathbb{N}, \\ &\quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \neq |k| \} \end{aligned}$$

上 2° compact self-adjoint であり、その固有値は $\{ 1/(j^2 - k^2) ; j \neq |k| \}$ 、対応する固有関数は $\sin jx \cos kt$, $\sin jx \sin kt$ である。負の固有値をならべかえて

$$-\mu_1 \leq -\mu_2 \leq \dots < 0$$

とする。ここで各 $-\mu_n$ に対して 2次元部分空間

$$\text{span} \{ e_n^+ = \sin jx \cos kt, e_n^- = \sin jx \sin kt \}$$

が対応するものとする ($-\mu_n = j^2 - k^2$)。さらに

$$E_n = \text{span} \{ e_1^+, e_1^-, \dots, e_n^+, e_n^- \}$$

$$E_n^\perp = \{ u \in E ; (e_i^+, u) = (e_i^-, u) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n \}$$

$$\begin{aligned} P_n u &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n ((e_i^+, u) e_i^+ + (e_i^-, u) e_i^-) \\ &: E \rightarrow E_n \end{aligned}$$

とおく。 $u \in E_n$ に対して

$$J(u) \leq -\frac{1}{2} \mu_n \|u\|_2^2 + \frac{1}{q} \|u\|_q^q + \frac{1}{q} \|u+f\|_q^q$$

が成立するので、定数 $R_n > 0$ が存在して

$$J(u) \leq 0 \quad \forall u \in E_n \text{ with } \|u\|_q \geq R_n$$

とできる。そこで $0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n < R_{n+1} < \dots$ としよ
い。[14]に従い、 $n \in \mathbb{N}$ に対して次のようにおく。

$$B_R = \{u \in E; \|u\|_q \leq R\}, \quad D_n = B_{R_n} \cap E_n,$$

$$\Gamma_n = \{\gamma \in C(D_n, E);$$

$$\gamma(T_\theta u) = T_\theta \gamma(u) \quad \forall u \in D_n \quad \forall \theta \in [0, 2\pi),$$

$$\gamma(u) = u \quad \text{if } \|u\|_q = R_n \},$$

$$U_n = \left\{ u = \tau \frac{e_{n+1}^+}{\|e_{n+1}^+\|_q} + w; \tau \in [0, R_{n+1}], \right.$$

$$\left. w \in B_{R_{n+1}} \cap E_n, \|u\|_q \leq R_{n+1} \right\}$$

$$\Lambda_n = \{\lambda \in C(U_n, E); \lambda|_{D_n} \in \Gamma_n,$$

$$\lambda(u) = u \quad \text{if } \|u\|_q = R_{n+1}$$

$$\text{or } u \in (B_{R_{n+1}} \setminus B_{R_n}) \cap E_n \}$$

さらに

$$b_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \sup_{u \in D_n} J(\gamma(u)),$$

$$c_n = \inf_{\lambda \in \Lambda_n} \sup_{u \in U_n} J(\lambda(u))$$

とおく。定義より容易にわかるように $c_n \geq b_n$ である。

$c_n > b_n$ である場合に [14] において次が示されている。

命題 3 ([14]) $c_n > b_n \geq M+1$ を仮定する。 $d \in (0, c_n - b_n)$

をえらび

$$\Lambda_n(d) = \{\lambda \in \Lambda_n; J(\lambda) \leq b_n + d \text{ on } D_n\},$$

$$c_n(d) = \inf_{\lambda \in \Lambda_n(d)} \sup_{u \in U_n} J(\lambda(u)).$$

とすれば、 $c_n(d)$ ($\geq c_n$) は $J(u)$ の critical value である。

上の命題はよく知られた "Deformation Theorem" を用いることにより証明される。

"(1)-(3) の弱解の集合が有界ならば" critical value の集合も有界である" こと及び、系1、命題3に注意すれば、次の命題4より定理2は得られる。

命題4 部分列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して次をみたす。

$$\begin{aligned} c_{n_j} &> b_{n_j} \quad \forall j, \\ b_{n_j} &\rightarrow \infty \quad \text{as } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

命題4の証明は3段階からなる。

Step 1: $(-Ku, u)$ の評価

まず有界線型作用素 $Q: E \rightarrow E$ を次で定義する。

$$(Qu)(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, \tau) d\tau$$

次の補題が成立する。

補題1 ([17, 18]) 評価

$$(7) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists C_\delta > 0 : a_n \leq C_\delta n^{-2(\frac{1}{2}-1)/\frac{1}{2}+\delta} \quad \forall n$$

をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、次を満足するものが存在する。

$$(8) \quad (-Ku, u) \leq a_n \|u\|_q^2 \quad \forall u \in E_n^\perp$$

注意5 楕円型方程式 (4)-(5) に対しては補題1の代わりに Gagliardo - Nirenberg の不等式が用いられている。

補題1の証明 まず $(I-Q)u \in \overline{\text{span}} \{ \sin jx ; j \in \mathbb{N} \}$ により $(-Ku, u) \leq (-KQu, Qu)$ が得られる。

$u \in E_n^\perp$ より $Qu \in E_n^\perp$ が従うことに注意して、Fourier 級数を用いて

$$Qu = \sum_{i=n+1}^{\infty} (u_i^+ e_i^+ + u_i^- e_i^-) + w$$

$$\left(\begin{array}{l} u_i^+, u_i^- \in \mathbb{R} \\ w \in \overline{\text{span}} \{ \sin jx \sin kt, \sin jx \cos kt ; j^2 - k^2 > 0 \} \end{array} \right)$$

と表わすと

$$\begin{aligned} (-KQu, Qu) &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i (|u_i^+|^2 + |u_i^-|^2) \\ &\leq \left(2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i^{\frac{2}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} (|u_i^+|^p + |u_i^-|^p) \right)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq C \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i^{\frac{2}{2-p}} \right)^{(2-p)/2} \|Qu\|_q^2 \end{aligned}$$

ここで、Hölder の不等式と Hausdorff-Young の不等式を用いている。 μ_n は

$$\forall \delta > 0 \quad \exists C_\delta > 0 : \mu_n \leq C_\delta n^{-1+\delta} \quad \forall n$$

をみたすことに注意すれば、 $a_n = C \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i^{\frac{2}{2-p}} \right)^{(2-p)/2}$

が求めるものであることがわかる。

Step 2: b_n の評価

次の補題は $P_{n-1}Q\gamma$ ($\gamma \in \Gamma_n$) に対して Borsuk-Ulam の定理の S^1 -version ([10]) を適用することにより得られる。

補題 2 ([18]) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, R_n)$, $\gamma \in \Gamma_n$ に対して

$$\gamma(D_n) \cap \{w \in E_{n-1}^\perp; \|Qw\|_g = \rho\} \neq \emptyset$$

補題 1, 2 より次が得られる。

補題 3 任意の $\delta > 0$ に対して $C_\delta > 0$ が存在して

$$(4) \quad b_n \geq C_\delta n^{2(\frac{1}{g}-1)/(2-\frac{1}{g})-\delta} \quad \forall n$$

証明 補題 2 と b_n の定義から

$$b_n \geq \sup_{0 < \rho < R_n} \inf_{u \in E_{n-1}^\perp: \|Qu\|_g = \rho} J(u)$$

補題 1 を用いると $u \in E_{n-1}^\perp: \|Qu\|_g = \rho$ に対して

$$\begin{aligned} J(u) &\geq -\frac{1}{2} a_{n-1} \|Qu\|_g^2 + \frac{1}{2g} \|u\|_g^{\frac{2}{g}} - C \\ &\geq -\frac{1}{2} a_{n-1} \rho^2 + \frac{1}{2g} \rho^{\frac{2}{g}} - C \end{aligned}$$

ゆえに p について $\max$ をとれば

$$b_n \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) a_n^{-q/(2-q)} - C$$

(7) とあわせて求める結果を得る。

Step 3: 結論

命題 4 を否定すると

補題 4 ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $c_n = b_n$ ($n \geq n_0$) とすれば、定数 $\gamma > 0$ が存在して

$$(10) \quad b_n \leq \gamma n^\gamma \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

証明 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して $\hat{\lambda} \in \Gamma_{n+1}$ を

$$\hat{\lambda}(T_\theta u) = T_\theta \lambda(u) \quad u \in U_n, \theta \in [0, 2\pi)$$

で定義する。 ($D_{n+1} = \{T_\theta u; u \in U_n, \theta \in [0, 2\pi)\}$) に

注意) この $\hat{\lambda}$ に対して $\sup_{D_{n+1}} J(\hat{\lambda})$ を計算する。命題 1

を用いて

$$\begin{aligned} \sup_{u \in D_{n+1}} J(\hat{\lambda}(u)) &\leq \sup_{\theta} \sup_{u \in U_n} [J(\lambda(u)) + |J(T_\theta \lambda(u)) - J(\lambda(u))|] \\ &\leq \sup_{u \in U_n} [J(\lambda(u)) + \beta (|J(\lambda(u))|^{(q-1)/q} + 1)] \end{aligned}$$

よって

$$b_{n+1} \leq c_n + \beta (|c_n|^{(q-1)/q} + 1)$$

補題の仮定の下では

$$b_{n+1} \leq b_n + \beta (|b_n|^{(q-1)/q} + 1) \quad n \geq n_0$$

これより induction により求める結果を得る (c.f. [3, 16])。

命題 4 の証明 $1 < s < 1 + \sqrt{2}$ すなわち $\sqrt{2} < q < 2$ の下では、 $\frac{2(q-1)}{2-q} > q$ となり、(9), (10) は両立しない。したがって部分列 $\{n_j\}$ で $b_{n_j} < c_{n_j}$ なるものが存在する。 $b_{n_j} \rightarrow \infty$ は (9) よりあきらか。

以上により定理 2 が証明された。

次に一般の場合 (定理 1) の証明の概略を述べる。

定理 1 の証明の概略

$q = \frac{\mu}{\mu-1}$ (μ は (g_2) に現われた数) において定理 2 の証明と同様に空間 E と作用素 K を定める。

$h(x, \xi)$ を $g(x, \xi)$ の ξ に関する逆関数とし、 $H(x, \xi) = \int_0^\xi h(x, \tau) d\tau$ とおく。

次の functional の critical point と (1)-(3) の弱解が一対一に対応する。

$$I(u) = \frac{1}{2} (Ku, u) + \int_{\Omega} H(u+f) \in C^1(E, \mathbb{R})$$

$g(x, \xi) = |\xi|^{s-1}\xi$ のときはこの functional は Palais -

Smale条件をみたしたが、一般の場合はみたすかどうかかわからないので、次のように functional を変形する。

$$I(\varepsilon; u) = I(u) + \int_{\Omega} \omega(\varepsilon u), \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

ここで $\omega(\xi)$ は次をみたす凸関数である。

$$\omega(\xi) = |\xi|^q \quad (|\xi| \geq 1)$$

$$\omega(\xi) = 0 \quad (0 \text{ の近傍で})$$

このとき $\varepsilon > 0$ に対しては $I(\varepsilon; u)$ は (P. S.) をみたす。

定理1の証明はまず、 $I(\varepsilon; u)$ ($\varepsilon > 0$) の critical point を構成してから $\varepsilon \rightarrow 0$ として行われる。

定理2の場合と同様に(但し ε を含む形で) $J(\varepsilon; u)$, $b_n(\varepsilon)$, $c_n(\varepsilon)$ 等を定義する。定理2の証明で用いられた不等式に対応するものを列挙すると

$$(6)' \quad |J(\varepsilon; T_\theta u) - J(\varepsilon; u)| \leq \beta (|J(\varepsilon; u)|^{(q-1)/q} + 1)$$

$$(9)' \quad \forall \delta > 0 \exists C_\delta > 0 : b_n(0) \geq C_\delta n^{2/(s-1)-\delta}$$

$$(10)' \quad b_n(0) \leq \gamma n^{\mu/(\mu-1)}$$

となる。 ε について極限操作をする必要上、命題4において部分列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ を ε に依存させずにえらぶ必要があるが、それは $b_n(\varepsilon)$, $c_n(\varepsilon)$ の $\varepsilon = 0$ での連続性を用いることにより達成される。くわしくは[18]を参照されたい。

注意6 上で述べた証明は時間に関する対称性を用いてい

る。(g₅)を仮定した場合(この場合はgがtに依存してもよい)の $\mathbb{Z}_2$ -作用 $u \rightarrow \pm u$ に関する対称性を用いた方法については[17]を参照されたい。

3. 定理0の dual variational method による証明

ここでは、定理0の証明を dual variational method を用いて mountain pass lemma のみで行う方法を述べる。

簡単のため、 $g(x, \xi) = |\xi|^{s-1}\xi$ として説明する。[17]の§4の truncation を用いれば、容易に一般化される。

今 $f \equiv 0$ なので、(1)-(3)の解として周期 $\frac{2\pi}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$)のものを求めてもよい。すなわち(1)-(3)の代わりに

$$(1)' \quad v_{tt} - v_{xx} + |v|^{s-1}v = 0, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R},$$

$$(2)' \quad v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(3)' \quad v(x, t + \frac{2\pi}{n}) = v(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R},$$

の非自明解 v_n を (mountain pass lemma を用いて) 求めて、 $\|v_n\|_\infty \rightarrow \infty$ を示せばよい。§1と同じ記号の下で

$$\tilde{E}_n = \{ u \in E; \quad u(x, t + \frac{2\pi}{n}) = u(x, t) \quad \forall x, \forall t \}$$

とおくと、 $I(u) \in C^1(E, \mathbb{R})$ の $\tilde{E}_n$ への制限 $I|_{\tilde{E}_n}$ の critical point と (1)'-(3)' の弱解が 一対一 に対応する。補題1に対応するものとして次が成立する。

補題 5 $a_n \searrow 0$ なる数列で次をみたすものが存在する。

$$(-Ku, u) \leq a_n \|u\|_q^2 \quad \forall u \in \tilde{E}_n$$

これを用いると容易に

$$I \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) a_n^{-q/(2-q)} \quad \text{on } \tilde{E}_n \cap \partial B_{p_n}$$

$$(p_n = a_n^{-1/(2-q)})$$

またあきらかに $e_n \in \tilde{E}_n$ で

$$I(e_n) \leq 0, \quad \|e_n\|_q \geq p_n$$

なるものが存在する。したがって mountain pass lemma を $\tilde{E}_n$ で用いることにより

$$b_n = \inf_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_n} \sup_{\tau \in [0,1]} I(\gamma(\tau)) \quad \left(\geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) a_n^{-q/(2-q)} \right)$$

$$\text{但し, } \tilde{\Gamma}_n = \{ \gamma \in C([0,1], \tilde{E}_n) ; \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_n \}$$

は $I(u)$ の critical value であり $b_n \nearrow \infty$ をみたす。したがって対応する弱解 v_n は $\|v_n\|_\infty \rightarrow \infty$ をみたす。

注意 7 $\frac{2\pi}{n}$ 周期の解を求めることは [7] で行われている。

しかし $\|v_n\|_\infty \rightarrow \infty$ は示されていない。

注意 8 (g_5) を仮定する場合 (g は τ に依存してもよい)

は [17] の §4 を参照されたい。

REFERENCES

- [1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in a critical point theory and applications, J. Funct. Anal. **14** (1973), 345-381.
- [2] A. Bahri, Topological results on a certain class of functionals and application, J. Funct. Anal. **41** (1981), 397-427.
- [3] A. Bahri and H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 1-32.
- [4] A. Bahri and P. L. Lions, Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér I, **301** (1985), 145-147.
- [5] V. Benci and D. Fortunato, The dual methods in critical point theory. Multiplicity results for indefinite functionals, Annali. Mat. Pura Appl. **32** (1982), 215-242.
- [6] H. Brézis, Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **8** (1983), 409-426.
- [7] H. Brézis, J. M. Coron and L. Nirenberg, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 667-689.
- [8] H. Brézis and L. Nirenberg, Forced vibrations for a nonlinear wave equation, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 1-30.

- [9] J. M. Coron, Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity, *Math. Ann.* **262** (1983), 273-285.
- [10] E. R. Fadell, S. Y. Husseini and P. H. Rabinowitz, Borsuk-Ulam theorem for arbitrary S^1 actions and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **274** (1982), 345-360.
- [11] J. P. Ollivry, Vibrations forcées pour une équation d'onde nonlinéaire, *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. I*, **297** (1983), 29-32.
- [12] P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in Eigenvalues of Nonlinear Problems, Edizioni, Cremonese, Rome, 1974, 141-195.
- [13] P. H. Rabinowitz, Free vibrations for a semilinear wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 31-68.
- [14] P. H. Rabinowitz, Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **272** (1982), 753-769.
- [15] P. H. Rabinowitz, Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 189-206.
- [16] M. Struwe, Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, *Manuscripta Math.* **32** (1980), 335-364.
- [17] K. Tanaka, Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{s-1}u = f(x,t)$, *Proc. Japan Acad.*

61 (1985), 70-73 and Comm. in P. D. E. (to appear).

- [18] K. Tanaka, Infinitely many periodic solutions for a superlinear forced wave equation, Nonlinear Analysis: T. M. A. (to appear).