

定数係数線型偏微分方程式系の ある種の代数的構造

東大 理院 斎藤 恭司

§1. はじめに

$\mathcal{E}, \mathcal{O}, \mathcal{D}', \mathcal{B}$, はそれぞれ微分可能函数, 正則函数, *distribution*, *hyperfunction* の芽(の層)とします。 Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とした時, $\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{B}(\Omega)$, 等は多項式 $P(X)$ を偏微分 $P(\frac{\partial}{\partial x})$ と作用させる事により, $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ -module となります。(同様に Ω が $\mathbb{C}^n$ の *open set* の時, $\mathcal{O}(\Omega)$ は $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ -module.)

そこで以下, これ等の module としての構造と偏微分方程式の問題の関連を調べます。

§2. *affine module*

A は単位元を持つ, 可換結合律を満たす環とします。以後 A -加群と言う場合, 常に 1 は *identity* として作用している場合のみを考えます。

定義 1. A -加群 C が次の 1), 2) を満たす時, A -*affine* 加群と呼びます。

- 1) C は A -単射加群
- 2) 任意の ideal $I \subsetneq A$ に対し, 或る $u \in C$ が存在し,

$u \neq 0$ かつ、任意の $P \in I$ に対し $Pu = 0$ 。

定理 2. Ω を $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) の開集合で凸とする時、 $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, (又は $\mathcal{O}(\Omega)$) は $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ (又は $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$) -affine 加群となる。 ($\mathcal{O}(\Omega)$)

証. 今、 $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, 等を C , $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ($\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$) を A と置きます。

1) を満す事: I を A の任意の ideal, $\varphi: I \rightarrow C$ はある A -homomorphism とします。多項式環は noether 環だから、 I の有限基底 $P_1, \dots, P_k$ がとれます。 $P = (P_1, \dots, P_k)$ とおいた行列に対し、 $A^k \xrightarrow{Q} A^k \xrightarrow{P} A$ が完全列となる様な行列 Q を選べます。この時、Ehrenpreis [1] 又は Komatsu [2] 等により $C^k \xleftarrow{Q} C^k \xleftarrow{P} C$ は exact。一方、 $(\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_k)) \in \ker Q$ 。 ($\because Q_i \in A$ が $\sum_{i=1}^k Q_i P_i = 0$ なら $\sum_{i=1}^k Q_i \varphi(P_i) = \varphi(\sum_{i=1}^k Q_i P_i) = 0$)。従って、或る $u \in C$ により、 $(\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_k)) = {}^t P u$ となはち、 $\varphi(P_i) = P_i u$ 。よって、写像 $\tilde{\varphi}: A \ni P \mapsto P u \in C$ は、 φ の定義域を A まで拡張したものに成ります。

2) を満す事: I を A の任意の ideal とします。 $I \neq A$ なら、Hilbert の零点定理により、 I は $\mathbb{C}^n$ 上 少くとも一つは、共通零点を持ちます。今 $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) の座標を $(x_1, \dots, x_n)$ (又は $(z_1, \dots, z_n)$) とし、 $u = \exp(\sum_{i=1}^n a_i x_i)$ (又は $\exp(\sum_{i=1}^n a_i z_i)$) 但し $a = (a_1, \dots, a_n)$ は I の共通零点、と置くと、明かに $P(x) \in$

I に対し、 $P(\frac{\partial}{\partial x})u = P(a)u = 0$ g. e. d.

上の証明からも分る様に、定義 1 の条件 2) は、或る意味で
零点定理を意味します。

$\mathcal{O}(\Omega)$ について 1) が成立する事は [2] に直接解析的な証明
が与へられています。以後の *affine module* についての一般的
考察より、 $\mathcal{E}(\Omega)$ が *affine* である事を認めると自動的に、 $\mathcal{O}(\Omega)$
が *affine* と成る事が分ります。

系. 芽 $\mathcal{E}, \mathcal{O}, \mathcal{D}', \mathcal{B}$ は *affine module* である。

($\because \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ において *convex open set* を基本近傍系とできる。)

Prop. 3. C は A -*affine module* とします。この時、 A -
加群 M に対し、 $\text{Hom}_A(M, C)$ を対応させる functor は、
exact かつ *faithfull* となる。

証. *exact* である事は、 C が 移入加群である事の直接の結果
なので、*faithfull* になる事をたしかめます。

二つの A -加群 M, N の間の A -homomorphism λ に
対応する $\text{Hom}_A(N, C)$ から $\text{Hom}_A(M, C)$ への準同型を λ^* とし
ます。 $\lambda \neq 0$ より $\lambda^* \neq 0$ を言います。

$\lambda \neq 0$ より、或る $m \in M$ が在って、 $\lambda(m) = n \neq 0$ 。 $A \cdot n \cong A/I$
, I は A と異なる *ideal*。条件 2) により、 I の共通零点なる $u \in$
 C が存在する。 $A \ni P$ に $Pu \in C$ を対応させる写像は、自動
的に $\mathbb{R}^n$ から C への写像とみなせ、 $\neq 0$ である。 C は単射加

群だから、それは N から C への写像に拡張される。すると

$$\lambda^*(\varphi) = \varphi \circ \lambda \neq 0. \text{ よって } \lambda^* \neq 0. \quad \text{q.e.d.}$$

以後、 $\text{Hom}_A(M, C)$ の事を C_M と書き、 $\lambda \in \text{Hom}_A(M, N)$ に対応する $\text{Hom}_A(C_N, C_M)$ の元を λ^* と書く事にします。

注意 M, N を L の sub-module とする時

$$0 \rightarrow L/M \cap N \rightarrow L/M \oplus L/N \rightarrow L/M+N \rightarrow 0$$

が exact だから、任意の Ω に対し

$$0 \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M \cap N}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M}) \oplus \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/N})$$

$$\rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M+N}) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{L/M+N}) \rightarrow \dots$$

が exact な事が分り、例へば、 $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{L/M \cap N}) = 0$ (ie.

Ω が $L/M+N$ -convex) ならば、 $\Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M \cap N})$ の元は、 $\Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M})$ の元と、 $\Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/N})$ の元の和で書ける。([3] 参照)

さて、 $M \ni m, C_M \ni u$ の組に対し $u(m) \in C$ を対応させる写像を、内積の記号 $\langle m, u \rangle_A$ で表します。もちろん $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ は A -bilinear です。

Lemma 4.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : M \times C_M \rightarrow C$ は non-degenerate.

証 m が 0 でないとする。Prop 3. の証明中示した様に、或る M から C への hom. φ で、 $\varphi(m) \neq 0$ なものが存在する。

逆に、 $\varphi \in C_M$ が $\langle m, \varphi \rangle = 0, \forall m \in M$ ならば、 φ は写像として零だから $\varphi = 0$ q.e.d.

§3. A -algebra

B は A -algebra とします。この時乗法により、 B は $\text{Hom}_A(B, B)$ の A -sub-module とみなせます。従って C を A -module とする時、 A -bilinear

$$\text{Hom}_A(B, B) \times \text{Hom}_A(B, C) \rightarrow \text{Hom}_A(B, C)$$

を B に制限する事により、canonical に $\text{Hom}_A(B, C)$ は B -module とみなせます。

補題5. A, B, C を上の通りとし、 M を B -module とします。

$$\text{Hom}_B(M, \text{Hom}_A(B, C)) \cong \text{Hom}_A(M, C)$$

証 $M=B$ ならば正しいので、inductive limit をとって、一般に M が B -free module なら正しい。任意の M は $\text{Coker}(B^I \rightarrow B^J)$ と表示できますが、 Hom_A は exact functor なので、上の等式が成立する。 q.e.d.

定義6 $\varphi: A \rightarrow B$ は ring homomorphism。この時 B -module M から、 A -module N への単に加群としての準同型 $\psi: M \rightarrow N$ が、 φ -準同型であるとは、

$$a \psi(m) = \psi(\varphi(a)m) \quad \forall a \in A, \forall m \in M$$

となる事とします。更に φ も ψ も同型である時、 ψ を φ -同型、又は作用同型であると言います。

Prop. 7. C が A -affine 加群の時、 $C_B = \text{Hom}_A(B, C)$ は B -加群として次の性質を持つ。

i) C_B は B -affine 加群

ii) $i: A \rightarrow B$ を canonical な homomorphism

$i^*: C_B \rightarrow C_A = C$ をその dual とする時、 i^* は i -準同型となる。

$$\text{iii) } i^*(a \cdot u) = \langle a, u \rangle_A \quad \forall a \in B, u \in C_B$$

$$\text{iv) } \langle a \cdot b, u \rangle_A = \langle a, b \cdot u \rangle_A \quad \forall a, b \in B, u \in C_B$$

更に、iv) を満す様な b -linear $B \times C_B \rightarrow C_B$ は唯一通しかない。

証. 定義より、iv) を満す事は明か。又 iv) に於て、 b, u を固定し、 a を動かせば、§1. Lemma 4. により、 $b \cdot u$ は唯一通りに決まる。iv) を満す様な作用は、自動的に i) ~ iii) を満す事を示します。

i) $0 \rightarrow M \rightarrow N$ が B -module として exact なら、 A -module として exact であり、 $C_N \rightarrow C_M \rightarrow 0$ も exact. 一方補題 5 により $C_N \cong (C_B)_N$, $C_M \cong (C_B)_M$ だから、 $(C_B)_N \rightarrow (C_B)_M \rightarrow 0$ も exact.

$$2) M \neq 0 \text{ なら } (C_B)_M \cong C_M \neq 0$$

ii) $a, b \in A, u \in C_B$ に対し、

$$\begin{aligned} \langle b, i^*(i(a)u) \rangle_A &= \langle i(b), i(a)u \rangle_A = \langle i(ab), u \rangle_A = \langle ab, i^*u \rangle_A \\ &= \langle b, a i^*u \rangle_A. \end{aligned}$$

任意の b について等しいから Lemma 4. より

$$i^*(i(a)u) = a i^*u \quad \forall a \in A, u \in C_B$$

Ⅲ) も同様な計算を行へばよく、省略します。 q. e. d.

例 1. $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ の $\{\frac{1}{2}(X_j + \sqrt{-1} Y_j) : j=1, \dots, n\}$ で生成される ideal を I とし、 $B = A/I$ とおく。この時、 $B \cong \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$, $Z_j = \frac{1}{2}(X_j - \sqrt{-1} Y_j)$.

この時、 $\mathcal{E}_B \cong \mathcal{F}'_B \cong \mathcal{B}_B \cong \mathcal{O}$ となる。

従って、 $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ -module M に対し、

$$\mathcal{O}_M \cong \mathcal{E}_M \cong \mathcal{F}'_M \cong \mathcal{B}_M .$$

同様に convex open set Ω に対し

$$\mathcal{O}(\Omega)_M \cong \mathcal{E}(\Omega)_M \cong \mathcal{F}'(\Omega)_M \cong \mathcal{B}(\Omega)_M$$

2. 一般に A -module M に対し、 $I = \text{ann}(M)$, $B = A/I$ と置くと、 $(C_B)_M \cong C_M$

注意 1. M を B -module とする時、次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} M \times (C_B)_M & \xrightarrow{\langle, \rangle_B} & C_B \\ \parallel & & \downarrow i^* \\ M \times C_M & \xrightarrow{\langle, \rangle_A} & C_A \end{array}$$

2. M を B -module とする時、 $(C_B)_M$ に C_M を対応させる functor に対し、 N を A -module とする時 C_N に対し、 $(C_B)_{M \otimes_A N}$ を対応させる functor は、その adjoint functor になる。

§4. Cohomology 群

Prop. 8. Ω を一般に convex とは限らない、 $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、 $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ または $\mathcal{F}'$ または $\mathcal{B}$ とします。 $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

この時、任意 finite module M に対し、

$$H^k(\Omega, \mathcal{F}_M) \cong \text{Ext}_A^k(M, \mathcal{F}(\Omega)) .$$

証.

まず、 $\text{Hom}_A(A^m, \mathcal{F}(\Omega)) \ni \varphi$ に対し、 $(\varphi((1,0,0)), \dots, \varphi((0,0,1)))$
 $\in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})^m \cong \Gamma(\Omega, \mathcal{F}^m)$ を対応させる事により、functorial
 に $\text{Hom}(A^m, \mathcal{F}(\Omega)) \cong \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^m})$ 。

与えられた M を free resolution して、

$$0 \leftarrow M \leftarrow A^{m_0} \xleftarrow{P_0} A^{m_1} \xleftarrow{P_1} A^{m_2} \leftarrow$$

すると対応して

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, \mathcal{F}(\Omega)) & \rightarrow & \text{Hom}(A^{m_0}, \mathcal{F}(\Omega)) & \rightarrow & \text{Hom}(A^{m_1}, \mathcal{F}(\Omega)) & \rightarrow & \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_M) & \rightarrow & \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^{m_0}}) & \rightarrow & \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^{m_1}}) & \rightarrow & \end{array}$$

左 exact だから、対応項は等しくなり、又、chain complex の
 cohomology 群 も同型になる。 q.e.d.

§5. $\mathcal{E}(\Omega_1)$ と $\mathcal{E}(\Omega_2)$ が作用同型になる為の条件

§4. の事は、領域 Ω 全体での微分方程式の大域的な問題
 は、 $\mathcal{F}(\Omega)$ の A -module としての構造だけによって決定さ
 れる事を意味しています。

そこで、最後に、二つの domain Ω_1, Ω_2 , おもてられた時
 に、ring hom $\psi: A_1 \rightarrow A_2$ 及び、differentiable map
 $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ により、 ${}^a\varphi: \mathcal{E}(\Omega_2) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in \mathcal{E}(\Omega_1)$

が 4-同型になる為の、必要充分条件を求めます。

Prop. 9. 記号は上記の通りとします。

$$\alpha\varphi: \mathcal{E}(\Omega_2) \cong \mathcal{E}(\Omega_1) \quad \text{作用同型}$$

$\Leftrightarrow \varphi$ が 1 次変換

すなわち、 A を $\det A \neq 0$ なる実係数行列、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は Ω_1 の座標系、 $b = (b_1, \dots, b_n)$ を実ベクトルとして

$$\varphi(x) = Ax + b$$

証. まず、次の Lemma から始めます。

Lemma 10. $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \ni P$ について

$$(*) \quad P(fg) = (Pf)g + f(Pg) \quad \forall f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

$\Leftrightarrow P$ は 冪一次式

証. 充分である事は明かです。

必要なる事。まず(*) に於て $f=g=1$ とおけば、 $P1=0$ 。従って、 P は定数項を含まない。1 次式の部分は差引いても(*) に変りはないから、 P は 2 次以上の項ばかりから成るとしてかまわない。 n について帰納法で示します。 $n=0$ なる問題ありません。

$n \geq 1$ とし、 $P = QX_1 + R$ 但し、 R は X_1 を含まぬ多項式、と表示します。 R は $\mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$ 上 (*) を満足するので帰納法の仮定より $R=0$ 。そこで再度 $P = (Q'X_1 + R')X_1^2$ 但し R' は X_1 を含まぬ多項式とします。 $R' \neq 0$ なので

$x_2, \dots, x_n$ の多項式 π で、 $R'\pi \neq 0$ なるものが存在します。
 この時、(*) に於て、 $f=x_1, g=x_1^{l-1}\pi$ と置き両辺比較すると、

$$0 \neq l!(R'\pi) = x_1 P(\pi x_1^{l-1}) + \pi x_1^{l-1} P x_1$$

しかるに右辺第一項は πx_1^{l-1} が x_1 に関し次数 l より少たから $=0$ 。第二項は、 P が 2 次以上の項より成るから $=0$ 。
 矛盾。 $\therefore P=0$ g. e. d.

注意 上記の Lemma は、その証明から分る様に、任意の体係数の多項式環に於て、正しい。

Prop. の証明.

まず、 $\varphi: \mathcal{E}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega_1)$ が作用同型になるとは、 φ が $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ の diffeomorphism を与へ ($\because$ 領域 Ω 及び、その differentiable map の Category は、 $\mathcal{E}(\Omega)$ の $\mathbb{C}$ -homomorphism の Category と等しい) かつ、

$$(**) \quad P(u \circ \varphi) = (\varphi(P) \cdot u) \varphi \quad \forall u \in \mathcal{E}(\Omega_2), \forall P \in A_1 = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

となる事です。

$$(**) \text{ に於て、} P=\alpha \in \mathbb{C} \text{ とすると } \varphi(\alpha) \cdot u = \alpha u \quad \forall u$$

だから $\varphi(\alpha) = \alpha$ 。

次に P が 1 次式とすると (**) を用いて

$$P(u \cdot v \circ \varphi) = (u \varphi(P) v + v(\varphi(P) u)) \varphi \quad \forall u, v \in \mathcal{E}(\Omega_2)$$

$$\text{だから} \quad \varphi(P) u \cdot v = u(\varphi(P) v) + v \varphi(P) u \quad \forall u, v \in \mathcal{E}(\Omega_2)$$

従って lemma より $\varphi(P)$ も 1 次式。

$\varphi(X_i) = \sum_j a_{ij} X_j'$, $A = (a_{ij})$ と置く。一方 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ と分解しておく。(但 $\varphi_j = X_j' \circ \varphi$)

(**)より, $X_i \cdot \varphi_j = (\varphi(X_i) X_j') \circ \varphi = a_{ij} = \text{const}$

実数値函数 φ_j が 上記方程式を満たすなら

$$\varphi_j = \sum_i X_i a_{ij} + b_j$$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ が Ω_1 から Ω_2 への diffeo. を与えている事より, A , $b = (b_1, \dots, b_n)$ の各成分は実数でありかつ, $\det A \neq 0$

q. e. d.

Cor. $\forall M$ について $H^i(\Omega, \mathcal{E}_M) \cong H^i(\Omega', \mathcal{E}_M)$

$\Rightarrow \Omega$ と Ω' は 1 次変換で互に写る。

この事は微分方程式が大域的に解ける等、cohomological な量をすべて保存する変換は 1 次変換以外にない事を示しています。

1. Ehrenpreis, L.: A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications. Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 161~174, Jerusalem, 1961.
2. Komatsu, H.: Resolutions by Hyperfunctions of Sheaves of Solutions of Differential Equations with Constant Coefficients. Math. Annalen 176, 77-86 (1968)
3. S. Matsumura: Finite type system of partial differential operators and decomposition of solutions of partial differential equations. Katada Symposium. (1966)