

Complex torus の complex analytic family についての 一考察

名市大 教養部 岡野 節

§1. Kodaira-Spencer [34] において complete かつ effectively parametrized な complex torus が 本質的に与えられている の complex analytic family であることは一般の complex torus の complex analytic family がどんな型をしているかを考察してみよう。

まず Y を 既約な解析空間とし, $2n^2$ 個の Y 上の正則函数を要素とする $(n, 2n)$ 型の行列 Ω を考える。 Ω の要素を ω_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, 2n$) とする。さらに $(2n, 2n)$ 型行列 $\begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}$ は 各点 $t \in Y$ で正則であるとは決まらない。($\bar{\Omega}$ は Ω の conjugate を表す。)

$\mathbb{C}^n$ を n 変数 $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ を持つ n 次元複素ユークリッド

空間とし, $\Sigma^n \times Y$ 上の analytic automorphism

$$g_j: (z, t) \longrightarrow (z + \omega_j(t), t), (j=1, \dots, 2n)$$

を考へ、この $2n$ 個の automorphism を generate される

アーベル群を G で表わす。ただし $G = \{ \omega_j(t) = \begin{pmatrix} \omega_{1j}(t) \\ \omega_{2j}(t) \\ \vdots \\ \omega_{nj}(t) \end{pmatrix} \}$

である。

このとき、factor space $\mathbb{C}^n \times Y / G$ は明らかに complex space Z 上 n torus の complex analytic family が定まる。今 $\mathbb{C}^n \times Y / G = X$ とおき、 X から Y への natural projection を π とおく。明らかに各 $t \in Y$ に対して $\pi^{-1}(t)$ は $\Omega(t)$ を周期行列にする complex torus である。

これから先、 X 上の行列 $\Omega(t)$ 及びこれから得られた complex torus の family $X \xrightarrow{\pi} Y$ を fix して考へる。そして各 $t \in Y$ に対して、次の様な記号を用いる。

$$X_t = \pi^{-1}(t)$$

$K_t = X_t$ 上の有理型函数全体のなす体。

$td(K_t) =$ 体 K_t の複素数体上の超越次数。

$$Y_R = \{ t \in Y \mid td(K_t) = k \} \quad (n \geq k \geq 0)$$

§2. 今 $t_0 \in Y_R$ ($k > 0$) の点とする。そうすると変数の変換、

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{が"ある。}$$

K_{t_0} の函数は $n-k$ 個の変数 $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n$ に depend
する。

$$\text{今 } P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \text{ とおく。明らかに}$$

(i) $\text{rank } P = k$.

であり, $\mathbb{C}^k$ の中の $2n$ 個の $\wedge^k H^1(P\Omega_j(t_0))$, $j=1, \dots, 2n$,
は $\mathbb{C}^k$ の中の $\text{rank } 2k$ の discrete free group Γ を生成する。(この事につ

いては例として [0], p. 103 を見られたい)。この group $\Gamma \in G^k$ とな
れば $\mathbb{C}^k / G^k$ は 明らかに Abelian variety であり, X_{t_0} の有理
型函数体 K_{t_0} は $\mathbb{C}^k / G^k$ の函数体と一致する。

今 $w'_1, w'_2, \dots, w'_{2k} \in G^k$ の free base とすれば $(2n, 2k)$ 型

整数行列 H_1 があって

$$P\Omega(t_0)H_1 = (w'_1, w'_2, \dots, w'_{2k}) \text{ となる。 } \Gamma \in \mathbb{C}^k \text{ として } w'_i = \begin{pmatrix} w'_{1i} \\ \vdots \\ w'_{ki} \end{pmatrix}.$$

さらに $w_1, w_2, \dots, w'_{2k}$ が base である事あり $(2k, 2n)$ 型整数

行列 H_2 があって

$$(ii) \quad P\Omega(t_0)H_1H_2 = P\Omega(t_0) \text{ となる。}$$

さらに, $\mathbb{C}^k / G^k$ が abelian である事あり 歪対称な

$(2k, 2k)$ 型

整数行列 A があって, $|A| \neq 0$,

$$(iii) \quad P Q(t_0) H_1 A (P Q(t_0) H_1)' = 0$$

$$(iv) \quad \sqrt{-1} \overline{P Q(t_0) H_1} A (P Q(t_0) H_1)' < 0$$

と仮定。 $E = E' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ / は 置 置 を 表 示 する。

特に今, $t_0 \in Y_n$ とする。このときは上の H_1, H_2 は単位行列に
とれる。

今 Y_n が $\mathbb{C}$ -類の集合であると仮定する。このとき各 $t_0 \in Y_n$ に対して
($2n, 2n$) 型の歪対称な正則な整数行列 A があって,

$$Q(t_0) A Q(t_0)' = 0 \quad \text{かつ} \quad \sqrt{-1} \overline{Q(t_0)} A Q(t_0)' < 0 \quad \text{と仮定。}$$

$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 各 $t_0 \in Y_n$ に対して $\mathbb{C}$ の本質な $A \in -1$ 族に 集合 $Y(A)$
 $= \{t \in Y \mid Q(t) A Q(t)' = 0\}$ を考える。 $Y(A)$ は Y の解析
的部分集合であり、又仮定により Y_n は $\mathbb{C}$ -類 E' から、 A が
整数行列である事より、一つの A があって $Y(A) = Y$ となる。

と仮定が真 t_0 では $\sqrt{-1} \overline{Q(t_0)} A Q(t_0)' < 0$ 故から Y が "連続
故から、各点 $t \in Y$ において $\sqrt{-1} \overline{Q(t)} A Q(t)' < 0$ である。

よって $Y = Y_n = Y(A)$ である。

$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の場合は $\mathbb{C}$ 函数の理論を用いると任意の $t \in Y$ に
対して Kt の元は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の近傍までわかる事が分る。

§3.

Lemma 1. $F_1 \in (l, p)$ 型, $F_2 \in (p, l)$ 型の行列とすると
($E = E'$, $l \geq p$)。このとき,

(l, l) 型行列 $F_1 F_2 - E^{(l)}$ の rank は $l-p$ より小さくはない。
 $E = E^{-1}$ $E^{(l)}$ は l 次の単位行列を表わす。

証明) (l, l) 行列 $F_1 F_2$ の固有方程式に於ける 1 の重複度は q とおくとする。 $\Rightarrow$ non-singular (l, l) 型行列 J があって

$$J F_1 F_2 J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & x_{q+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & x_l \end{pmatrix} \quad \text{と取る。 } E = E^{-1} \text{ 故に } x_i \neq 1.$$

$$\text{よって, } \text{rank } J(F_1 F_2 - E^{(l)})J^{-1} = \text{rank}(F_1 F_2 - E^{(l)}) \geq l - q.$$

$\Rightarrow$ $q \leq p$ である。

$$\text{今 } u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (i=1, \dots, q) \quad \text{と取ると, 明らかに } q \text{ 本の } \wedge^q H_L$$

$J F_1 F_2 J^{-1} u_i \quad (i=1, \dots, q)$ は一次独立である。 $\Rightarrow F_1 F_2$ は

(p, l) 型 E^{-1} から $q \leq p$ である。

Lemma 2. $T \in (2n, 2n)$ 型実行列 $S \in (n, 2n)$ 型行列
 とする。このとき、

$$\text{rank } ST \geq \frac{1}{2} \text{rank} \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix} T.$$

証明) 行列の rank はその行列が定める linear map の image の次元である。 T を real E^{-1} から ST の rank と $\overline{S}T$ の rank は一致し $\Rightarrow$ 以下 $\begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix} T : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ の image は

$ST: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ の image と $\bar{S}T: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ の image
 の直和に入っているから $2 \text{rank } ST \geq \text{rank} \left(\frac{S}{\bar{S}} \right) T$. Q.E.D.

次に $t \in Y_R$, $R > 0$ とする。前回は $\exists$ の条件を要しなかった。4つの行列
 A, P, H_1, H_2 がある。

(i) $\text{rank } P = k$

(ii) $PQ(t_0)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = 0$

(iii) $PQ(t_0)H_1 A (PQ(t_0)H_1)' = 0$

(iv) $\int_1^{\infty} \overline{PQ(t_0)H_1} (PQ(t_0)H_1)' < \infty$.

逆にもし $t \in Y$ に対して H_1, H_2, P があって (i) $\text{rank } P = k$,

(ii) $PQ(t)H_1 H_2 = PQ(t)Z$ であるならば $PQ(t)$ の $2n$ 個の列ベクトル
 は $\mathbb{C}^k$ の $\text{rank } 2k$ の discrete free group を生成しさらに

$PQ(t)H_1$ の $2k$ 個の列ベクトルがこの group の free base を与えている。

$Z = Z^*$. 3つの行列 H_1, H_2, A は fix する。さらに

$Y(H_1, H_2) = \{ t \in Y \mid \text{上の条件 (i) と (ii) } \overset{(\frac{k}{2} \times 2n)}{\text{を満たす}} (k, n) \text{ 行列 } P$
 $\text{がある} \}$,

$Y(H_1, H_2, A) = \{ t \in Y \mid \text{上の4つの条件 (i) ~ (iv)} \overset{(\frac{k}{2} \times 2n)}{\text{を満たす}} (k, n) \text{ 行$
 $\text{列 } P \text{ が存在する} \}$ とおく。

今 Π は型 (k, n) の行列の全体を表す $R \times n$ 次元のベクトル空間
 とし $\Pi \times Y$ 上の方程式 $PQ(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = 0, t \in Y$
 $P \in \Pi$, の解集合 $\mathcal{S}$ とする。 $\mathcal{S}$ から $Y \cap$ の natural proj を p とおく。

このとき $P^{-1}(t)$ は Π の vector subspace である。さらに $P^{-1}(t)$ の中には rank が k である行列が存在する。この必要十分条件は

$$\text{rank } Q(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) \leq n-k$$

で与えられる。

Proposition 1. $Y(H_1 H_2)$ は $Q(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = n-k$ で与えられる Y の analytic subset であり、 $\mathcal{P}|Y(H_1 H_2)$ は rank k^2 の analytic vector bundle である。

さらに $t_1 \in Y(H_1 H_2)$ の一列、 $P_0 \in P^{-1}(t_1)$ の rank k の matrix があると、 $P^{-1}(t_1)$ の任意の matrix P_1 に対して、 (k, k) matrix L があって $P_1 = L P_0$ とおける。

証明) 行列 $\begin{pmatrix} Q(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}$ が各 $t \in Y$ で non-singular E から Lemma 1 と $Q \in \mathcal{H}$ として $\text{rank } Q(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) \geq n-k$ である。よって $Y(H_1 H_2)$ は $\text{rank } Q(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = n-k$ で与えられる。二番目の事柄は $P^{-1}(t_1)$ の rank が k^2 である事実より明らか。

Proposition 2. $Y(H_1 H_2 A)$ は $Y(H_1 H_2)$ の analytic subset である。

証明) $t_1 \in Y(H_1 H_2)$ の一列とすると、 $\sum$ する。この $Y(H_1 H_2)$ の近傍 τ と $\sigma \in \tau$ の vector bundle $\mathcal{P}|Y(H_1 H_2)$ の正則な section $P(t)$ があって $\text{rank } P(t) = k$, $t \in \tau$ と

なる。

この上で方程式 $P(t)Q(t)H_1 A^{(t)}(PQ(t)H_1)' = 0$ を考えよ。

この式は t の analytic subset を決める。これを N の集合は section $P(t)$ のとり方には関係しない。 $N = \{$

$t \in Y(H_1, H_2) \mid \text{条件 (i) と (iii) を満たす } P^{-1}(t) \text{ の行列}$

P が存在する} とおけば N は $Y(H_1, H_2)$ の analytic

subset である。

今 $N_1, N_2, \dots \in N$ の connected components の全体とす

る。この各 N_i 上では Hermit 行列 $\sqrt{-1} \overline{P(t)Q(t)H_1} (P(t)Q(t)H_1)'$

の符号数は一定である。よって $Y(H_1, H_2, A)$ は $Y(H_1, H_2)$ の

analytic subset である。

Q.E.D.

Theorem 1. $n > j \geq 0$ なる整数 j に対し $Y_j \neq \emptyset$ である。

このとき $n \geq q > j$ なる整数 q に対し

$Y_q \cup Y_{q+1} \cup \dots \cup Y_n$ は Y の thin analytic set の高々可
附番位の union である。

(証明) $t_0 \in Y_R, (R \geq q)$ とすれば $t_0 \in Y(H_1, H_2, A)$
なる行列 H_1, H_2, A が存在する。 $Y_q \cup Y_{q+1} \cup \dots \cup Y_n$ はこの不変
集合の高々可附番位の union である。

§3. 今 $p = \inf_{t \in Y} \text{td}(K_t)$ とおく。 Theorem 1 により、

Y は Y の第 2 類集合である。そこで $(2n, 2k)$ 型行列 H_1
 $(2k, 2n)$ -行列 H_2 , $(2k, 2k)$ -行列 A があって $Y = Y(H_1, H_2, A)$ と
 なる $Y = Z^n$ 上の様な行列の system $H_1, H_2, A \in \Gamma$ fix した。
 前1-の N 区様 $Y = Y(H_1, H_2, A) \in \Gamma$ の p^2 -次元の analytic
 vector bundle $\mathcal{P}$ が得られる。

$t \in Y$ とする。 $t \in Y$ の近傍 $\mathcal{U} \subset Y$ 上の $\mathcal{P}$ の
 section $P(t)$ 2- rank $P(t) = p$, ($\forall t \in \mathcal{U}$) なるものが得られ
 る。この section $P(t) \in \Gamma$ を用いて T 度周期行列が $P(t)Q(t)H_1$
 とする $\mathcal{U}$ 上の abelian variety の complex analytic
 family X'_t と $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ から決まる $X|_{\mathcal{U}}$ から
 X'_t への holomorphic map σ_t が決まる。

さらにこの section $P(t) \in \Gamma$ を変えても X'_t と σ_t は変わらない。
 したがって座標系 $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$ が変化することはない。よって

次の定理がある。

Theorem 2. $p = \inf_{t \in Y} \text{td}(K_t) < \infty$ となる $Y = Z^n$ の
 p^2 -次元の complex analytic vector bundle $\mathcal{B} \rightarrow Y$
 と $\mathbb{C}^n \times Y$ から $\mathcal{B}$ への holomorphic map $\bar{\sigma}$ があって
 $\bar{\sigma}$ は local には

$(z, t) \rightarrow (P(t)z, t)$ の形にかけ (ここで $P(t)$ は P の section), さらに $P(t)Q(t)$ は $\mathcal{B}$ の discontinuous な abelian group $G' \in \mathcal{F}$ 之, factor space $\mathcal{B}/G'$ は Y 上の abelian variety の family をなしている。

さらに $\overline{\sigma}$ から natural に X から $\mathcal{B}/G'$ への holomorphic map τ があって

$$X \rightarrow X' = \mathcal{B}/G'$$



は commutative になっている。

Corollary 1. $K'_t \in K_t$ の元で X_t の近傍の有理型函数に拡張出来るものの全体の作る部分体とする。

(a) K'_t の超越次数は $\sup_{t \in Y} \text{td}(K_t)$ に等しい。

(b) K'_t は K_t 内で代数的に閉じている。

Corollary 2. 今 $Y_0 = \emptyset$ かつ $Y_n \neq Y$ とする。このとき family $X \rightarrow Y$ の member である abelian variety は 'singular' である。