

いくつかの単純な絡み輪の分岐被覆空間

神戸大 理

鈴木 晋一

細川 藤次

3次元球面 S^3 の、結び輪(knots)や 絡み輪(links) 上で分岐する分岐被覆空間(branched covering spaces)は、3次元多様体論との関係等もあって、極めて重要であり、また興味深い研究対象である。しかしながら、これまで巡回分岐被覆空間(cyclic branched coverings — 定義は後に与える)以外のものはほとんど取扱われていない。近年やっと結び輪について dihedral coverings 等が研究されているが、絡み輪については具体的な例すらもほとんど知られていない。本稿は、2つの成分のごく基本的な絡み輪について、その分岐被覆空間の例もできるだけ見易い形で提供することを目的とする。

この機会に、結び輪や絡み輪の分岐被覆空間の背景を簡単にまとめておいた。最後にこの分野の文献表を付してある。ほとんど遺漏はないと思うが、補足していただければ幸いである。(Riemann面に関するものは、含んでいない。)

§ 1. Terminology, Preliminary, etc.

1.1. Fox [16]: M, N を連結で局所連結な Hausdorff 空間とし、
 $\pi: M \rightarrow N$ を全射連続写像とする。

$$B_\pi = \{x \in M \mid x \text{ において } \pi \text{ が局所同相写像ではない}\}$$

とみると、 B_π は M の閉部分集合である。

$$\pi(B_\pi) = B \subset N, \quad \pi^{-1}(B) = \tilde{B} \subset M$$

と置く。明らかに $B_\pi \subset \tilde{B}$ が成立つ。

$\pi: M \rightarrow N$ が、分岐集合 B (downstair) と $\tilde{B}$ (upstair) を持つ 分岐被覆 であるとは、次の 2 条件を満たすときをいう：

(i) N の開集合の原像の成分が、 M の位相の基である。

(ii) $\pi|_{M-\tilde{B}}: M-\tilde{B} \rightarrow N-B$ が被覆空間である。

このとき、対 (M, π) を、 B 上で分岐する N の 分岐被覆空間 ともいう。また (ii) を 随伴する非分岐被覆空間 とよぶ。

随伴する非分岐被覆 $\pi|_{M-\tilde{B}}: M-\tilde{B} \rightarrow N-B$ が n 重被覆のとき、 $\pi: M \rightarrow N$ を n 重分岐被覆；正則 α のとき 正則 (regular) とよぶ。点 $x \in \tilde{B}$ が 分岐指数 d を持つとは、 x の近くで π が d 対 1 の写像となっている場合をいう。この数は $\tilde{B}$ の連結成分上で一定の値をとる。

1.2. Fox [16]: 連結で局所連結な Hausdorff 空間 N と、いたるところ稠密でない閉部分集合 B に対し、 B 上で分岐する N の有限分岐被覆空間 (M, π) は、 $N-B$ の有限被覆空間によっ

で一意的に定まる。◀

この命題において、“有限”性は本質的である。最初に述べたように、ここでは N を 3次元球面 S^3 とし、 B として 2成分絡み輪 $L = k_1 \cup k_2$ とし、 L 上で分岐する S^3 の有限分岐被覆空間 (M, π) を考察したい。少し背景を述べることにする。

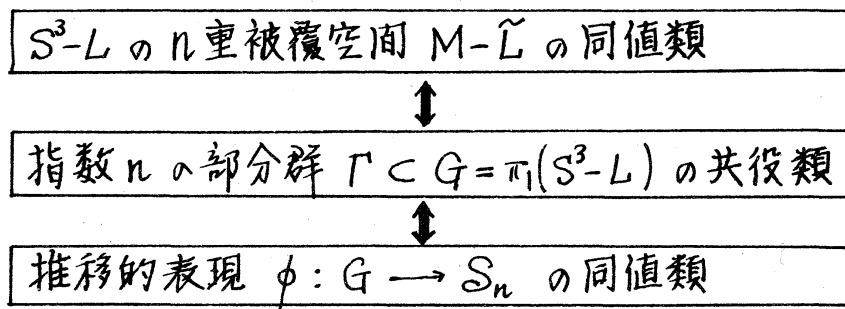
1.3. Fox [16]: N を有限単体的複体、 B を N の部分複体とする。 B と $\tilde{B}$ を分岐集合とする N の分岐被覆 $\pi: M \rightarrow N$ において、もし $\tilde{B}$ の各点で有限の分岐指数を持つならば、 M も単体的複体で、 $\tilde{B}$ はその部分複体となる。◀

1.4. Fox [16]: N をコンパクトな PL n -多様体、 B を N の局所平坦な $(n-2)$ -部分多様体とする。 B と $\tilde{B}$ を分岐集合とする分岐被覆 $\pi: M \rightarrow N$ において、もし $\tilde{B}$ の各点で有限の分岐指数を持つならば、 M も PL 多様体で、 $\tilde{B}$ は局所平坦な $(n-2)$ -部分多様体である。◀

1.5. Church-Hemmingsen [13]: M, N をコンパクトな PL n -多様体とし、 $\pi: M \rightarrow N$ を位数 (degree) 有限の全射開写像とする。もし $B = \pi(B_\pi) \subset N$ が局所的に順 (tame) な有限部分複体ならば、 B_π , $\tilde{B}$, B はいずれもその各点で $n-2$ 次元である。◀

この辺の背景に興味のある方は、Fox [16], Church-Hemmingsen [12, 13], Hopf [38] 等を参照されたい。

この結果, 順な絡み輪 L が与えられたとき, L 上で分岐する S^3 の有限分岐被覆空間 (M, π) において, M はコンパクトな 3 次元多様体であり, upstairs の分岐集合 $\tilde{L}$ は有限個の単純閉曲線となる. また π は単体的写像であるとしてよい. 以後 (分岐) 被覆空間は連結であるとする. 1.2 で述べたように, (M, π) を調べるには $S^3 - L$ の有限被覆空間を調べればよい. 被覆空間の一般論から次が知られる:



ここで S_n は n 次対称群を示す. $S^3 - L$ の被覆空間が与えられたとき, 上の対応を簡単に述べると次のようになる:

① L に方向を与えて, 普通に $G = \pi_1(S^3 - L)$ の有限表示を作る.

② 1 点 $* \in S^3 - L$ を選び, n 個の点 $\pi^1(*)$ に $1, 2, 3, \dots, n$ と符号を付ける.

③ $\alpha \in G$ に対し, $\sigma_\alpha \in S_n$ を次のように対応させる:

α のリフトを 1 から出発するものの終点を	i_1
" 2 "	i_2

α のリフト i_n から出発するものの終点を i_n とするとき、 $\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$. この対応 $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$ により表現 $\phi: G \rightarrow S_n$ を得る.

④ 部分群 $\Gamma \subset G$ として, $\Gamma_1 = \{\alpha \in G \mid \sigma_\alpha(1) = 1\}$ をとればよい. この Γ_1 は必ずしも正規部分群ではない. $\Gamma_i = \{\alpha \in G \mid \sigma_\alpha(i) = i\}$ とおけば, Γ_i と Γ_j は共役で,

$$\ker \phi = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i$$

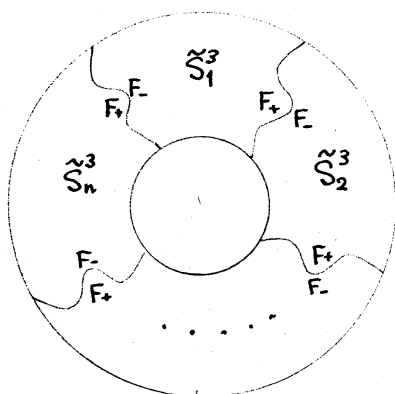
であることはよく知られる.

Seifert-Threlfall [70, pp. 201-203] や Rolfsen [64, 10F5~6] でいうように, G の有限表示から推移的表現 $\phi: G \rightarrow S_n$ を全て求める Algorithm が存在するが, なかなか容易でない.

1.6. 巡回分岐被覆空間は次の表現に対応する. L を μ 成分の絡み輪とし, Z_n を巡回置換 $\tau = (1\ 2\ \cdots\ n)$ によって生成される位数 n の巡回群とする.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S^3 - L) & & H_1(S^3 - L) & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ G & \xrightarrow[\text{Hurewicz}]{\sigma} & \underbrace{Z \oplus \cdots \oplus Z}_{\substack{\uparrow \\ t_1} \quad \substack{\uparrow \\ t_\mu}} & \xrightarrow[\gamma(t_i) = \tau]{\gamma} & \underbrace{Z_n}_{\substack{\uparrow \\ \tau}} < S_n \end{array}$$

ここで $\phi: G \rightarrow S_n$ を合成 $\gamma \circ \sigma$ とすればよい. この表現に対応する分岐被覆空間 M は, よく知られるように次の方法で構成することが出来る: L に連結な有向 2 次元多様体 (Seifert 曲面) F を張り, F で S^3 を切り開く: $\tilde{S}^3$ とおく.



$\tilde{S}^3$ は F と同相な 2 つの曲面 F_- と F_+ の和である。 $\tilde{S}^3$ のコピーを n 個 $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_n^3$ 用意し, $\tilde{S}_i^3$ の F_+ と $\tilde{S}_{i+1}^3$ の F_- を自然な同相写像で貼り合わせると M が得られる。

§2. 分岐集合の状態からの分類

絡み輪 L 上で分岐する S^3 の有限分岐被覆空間 (M, π) を分類しようとするとき、正則か否かというような普通の被覆空間の分類の他に、upstair の分岐集合 $\tilde{L}$ の状態からの分類が考えられる。もちろんここに挙げるのは一つの試みにすぎないが、後に挙げる具体例をながめる際の基準にもなろう。

次の記法を採用する：

$$\begin{array}{c}
 M \supset \tilde{L} = \tilde{k}_1 \cup \dots \cup \tilde{k}_\mu : \text{upstair 分岐集合} \\
 \begin{array}{c} n \text{ 重} \\ \text{分岐} \\ \text{被覆} \end{array} \quad \pi \downarrow \\
 S^3 \supset L = k_1 \cup \dots \cup k_\mu : \text{downstair 分岐集合 } (\mu\text{-成分の絡み輪})
 \end{array}
 \quad \tilde{k}_i = \pi^{-1}(k_i) = \bigcup_{j=1}^{m_i} \tilde{k}_{ij} \quad (\tilde{k}_{ij} \text{ は連結成分, } 1 \leq m_i \leq n)$$

すると、各 i, j について、 $\pi|_{\tilde{k}_{ij}} : \tilde{k}_{ij} \rightarrow k_i$ は円周の被覆空間である。 $c(\tilde{k}_{ij})$ によってこの被覆度数を、 $b(\tilde{k}_{ij})$ によって $\tilde{k}_{ij}$ の点における π の分岐指数を表わす。1.1 より次は容易に確かめられる。

2.1. 各 i について次が成立する:

$$\sum_{j=1}^{m_i} b(\tilde{k}_{ij}) \cdot c(\tilde{k}_{ij}) = n.$$

$b(\tilde{k}_{ij}) = 1$ なる成分 $\tilde{k}_{ij}$ が存在する場合には,

$$\tilde{k}_{ij} \notin B_\pi = \{x \in M \mid x \text{ において } \pi \text{ が局所同相でない}\}$$

だから, $\tilde{L} \neq B_\pi$ であり, 分岐被覆空間の特徴付けの一つの重要な基準となろう. Alexander [1] によって定式化され,

近年 Montesinos [50, 51, 54], Hilden [34, 35] 等によって再証明が与えられた定理: 任意の 3次元閉多様体 M は, ある結び輪 L 上で分岐する S^3 の 3重分岐被覆空間となる……に於いては,

一般に $\tilde{L} = \tilde{k}_1 \cup \tilde{k}_2$ であって $b(\tilde{k}_1) = 2$, $b(\tilde{k}_2) = 1$, $c(\tilde{k}_1) = c(\tilde{k}_2) = 1$ となり, もちろん正則ではない.

2.2. $c(\tilde{k}_{ij})$ と m_i を中心とした分類の試み.

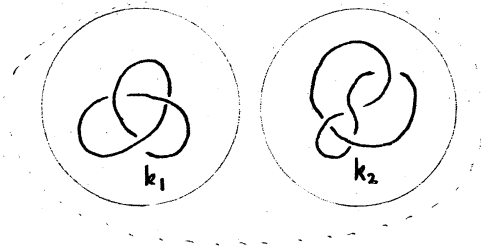
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } i, k \text{ について} \\ m_i = m_k \\ \text{(knots は常に} \\ \text{こちら)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } i \text{ について} \\ c(\tilde{k}_{ij}) = c(\tilde{k}_{ik}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \forall_i \quad m_i = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall_i \quad c(\tilde{k}_{i1}) = 1 \text{ (巡回被覆)} \\ \forall_i \quad c(\tilde{k}_{i1}) \neq 1 \end{array} \right. \\ \forall_i \quad m_i \neq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall_i \quad c(\tilde{k}_{ij}) = 1 \\ \forall_i \quad c(\tilde{k}_{ij}) \neq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } i \text{ について} \\ j \neq l \text{ が存在して} \\ c(\tilde{k}_{ij}) \neq c(\tilde{k}_{il}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{この場合は} \\ m_i \neq 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \exists i, j \quad c(\tilde{k}_{ij}) = 1 \\ \forall i, j \quad c(\tilde{k}_{ij}) \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i \text{ と } k \text{ が存在して} \\ m_i \neq m_k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{ある } i \text{ が存在して, } m_i = 1 \\ \text{すべての } i \text{ について } m_i \neq 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{これから先は?} \\ \text{この場合は全て正則でない.} \end{array} \right.$$

2.3. 演習: 分離した 2 成分の絡み輪を用いて, 上の表のど

の程度が埋まるか確かめてごらん.



§3. 絡み輪 $L =$  上で分岐する分岐被覆空間.

k_1 と k_2 に絡み数 1 で絡む小さな単純閉曲線 (いわゆる経線) x と y を選べば,

$$G = \pi_1(S^3 - L) = \langle x, y \mid xy = yx \rangle.$$

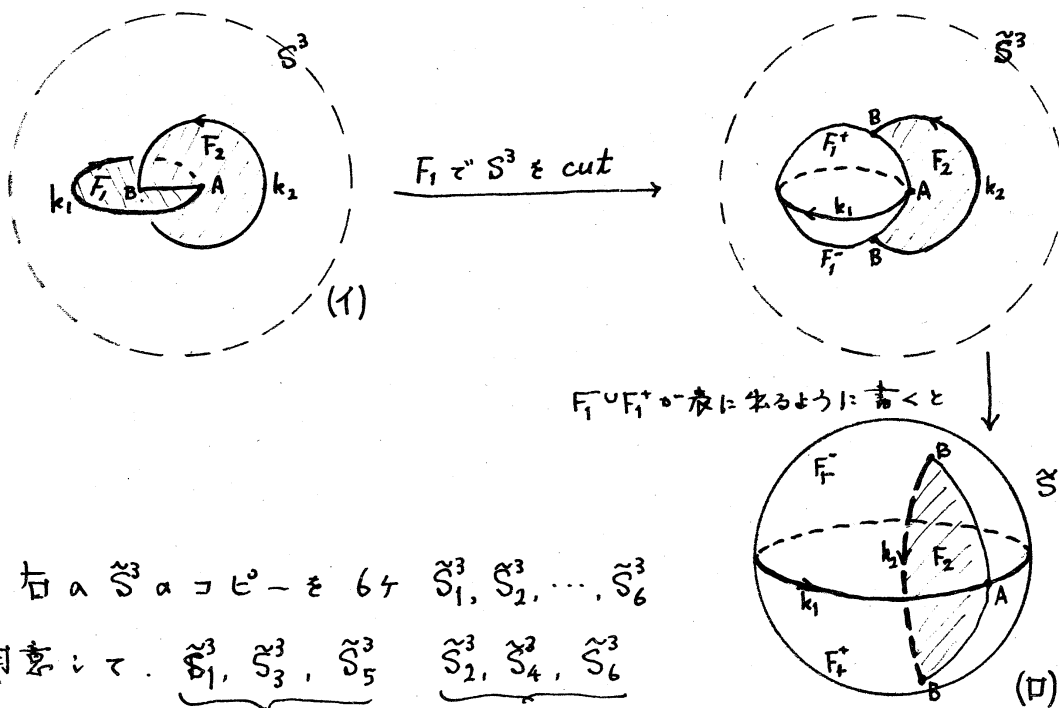
これは, 自明な結び輪の無限巡回群の場合を除いて, G が可換群となる唯一の例外である. 具体例から始めよう.

$\tau = (123456)$ を巡回置換とし, 表現

$$\begin{array}{lll} 3.1. & \phi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_6 \subset S_6 \\ & x \longmapsto \tau^2 = (135)(246) \\ & y \longmapsto \tau^3 = (14)(25)(36) \end{array}$$

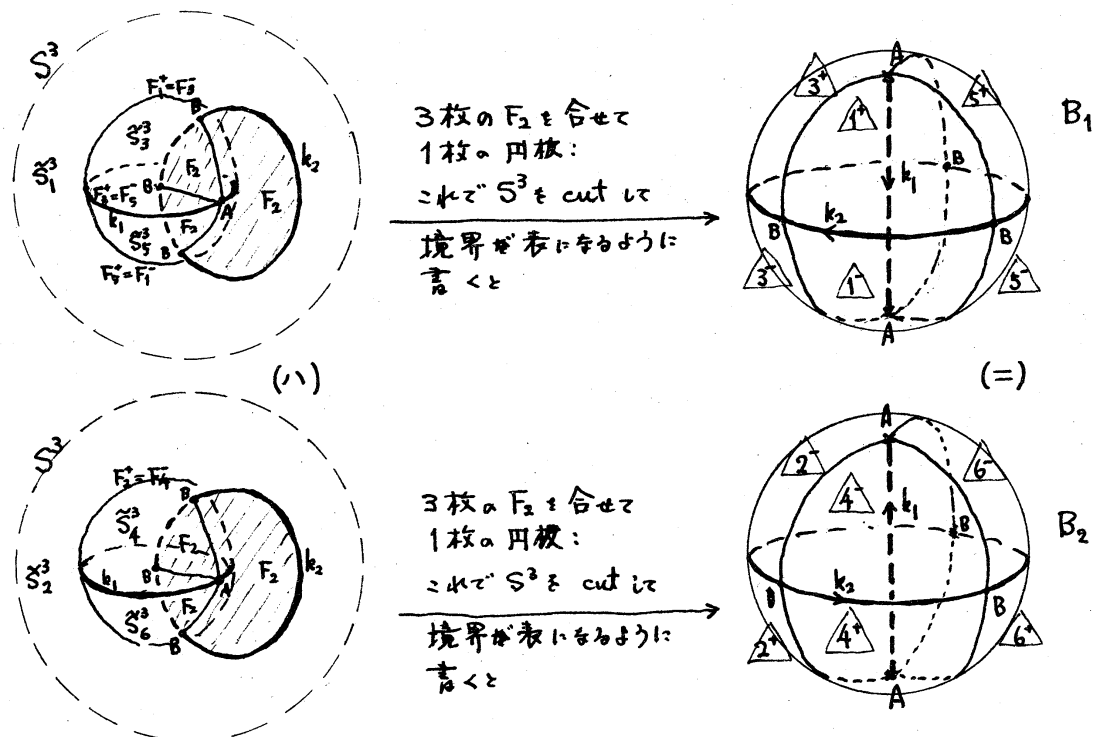
を考える. これは明らかに推移的である. この表現に対応する分岐被覆空間 (M, π) を作るが, π は自明だからいちいち述べないことにする.

まず k_1 と k_2 に円板 F_1 と F_2 を張る. $k_1 \cap F_2 = A$, $k_2 \cap F_1 = B$ とそれぞれ下図のように 1 点ずつで交わり, $F_1 \cap F_2$ は $A \neq B$ を結ぶ線分である.



右の $\tilde{S}^3$ のコピーを 6 枚 $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_6^3$
 用意して、 $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_3^3, \tilde{S}_5^3$ $\tilde{S}_2^3, \tilde{S}_4^3, \tilde{S}_6^3$
 の境界を $(1, 3, 5), (2, 4, 6)$ の順に貼り合わせると。

下図のよさを 2 つの S^3 が得られる:



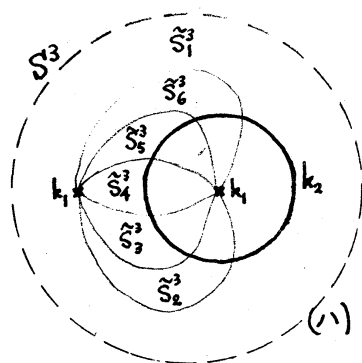
B_1 の境界 ∂B_1 は, F_2 を cut して得られる 三角形状の円板が 6 枚 (図で $\triangle 1, \triangle 1, \triangle 3, \triangle 3, \triangle 5, \triangle 5$ で示す) 組合さっており, B_2 の境界 ∂B_2 も, 6 枚の円板 (図で $\triangle 2, \triangle 2, \triangle 4, \triangle 4, \triangle 6, \triangle 6$ で示す) から成る. ここで $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$ の法則で, $\triangle 1$ と $\triangle 4$, $\triangle 1$ と $\triangle 4$, $\triangle 2$ と $\triangle 5$, $\triangle 2$ と $\triangle 5$, $\triangle 3$ と $\triangle 6$, $\triangle 3$ と $\triangle 6$ を貼り合せて, 求める M が得られる. $M \cong S^3$ であって, $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1, \pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$ とおくと, 構成から

$$c(\tilde{k}_1) = 2, \quad b(\tilde{k}_1) = 3, \quad c(\tilde{k}_2) = 3, \quad b(\tilde{k}_2) = 2$$

となる.

$$\begin{aligned} 3.2. \quad \phi: G &\longrightarrow Z_6 < S_6 \\ x &\longmapsto \tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \\ y &\longmapsto \tau^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \end{aligned}$$

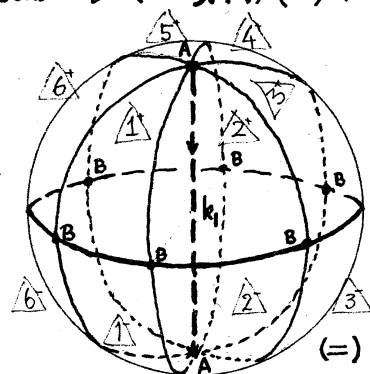
この表現も明らかに推移的である. 3.1 の (ロ) のコピーを 6 回用意し, $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ の順に貼り合せると, 3.1 の (イ) に対応して下図左の略図を得るから, 6 枚の F_2 を合せてできる



円板で S^3 を cut して 3.1 の (=) に対

6 枚の F_2 を合せて

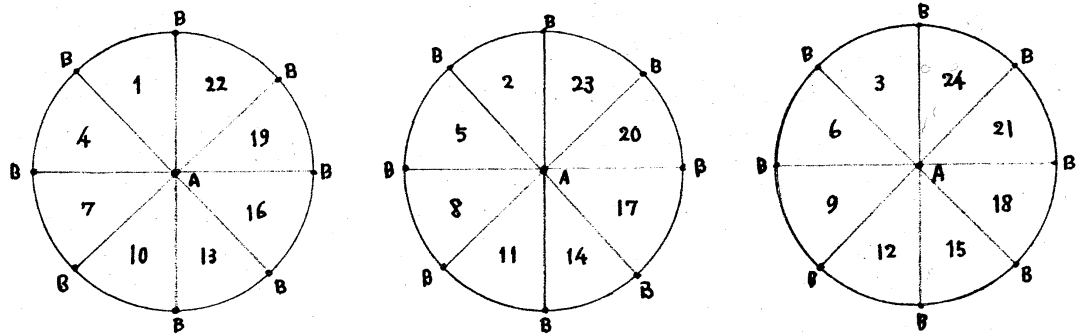
この円板で cut
境界が表にきわように
青く



応して右図を得る. 3.1 の場合と同じ

ようにこの球体の表面上の三角形状の 12 枚の円板を, $\triangle 1$ と $\triangle 3$

下図のように省略してもよからう。



これら3個の球体の表面にある 2×24 個の三角形状の円板を $\mathbb{C}^4$ に従って貼り合わせる。この場合 M は S^3 になって、
 $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$, $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$ とおくと、

$$c(\tilde{k}_1) = 3, \quad b(\tilde{k}_1) = 8, \quad c(\tilde{k}_2) = 4, \quad b(\tilde{k}_2) = 6$$

となる。

こころで、絡み輪  についてまとめてみよう。

$$3.4. \quad G = \langle x, y \mid xy = yx \rangle \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_n < S_n$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \tau^p \\ y & \xrightarrow{\quad} & \tau^q \end{array}$$

但し $\tau = (1\ 2\ 3\ \dots\ n-1\ n)$ 。この表現を固定する。 p と q は $\text{mod } n$ で考えてよいから $1 \leq p \leq q < n$ としてよい。

① $\phi: G \rightarrow S_n$ が推移的表現 $\iff \text{g.c.d.}(p, q) = 1$ 。

② $\phi: G \rightarrow S_n$ が推移的、i.e. $(p, q) = 1$ とする。

$$\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{a_1}, \quad \tau^q = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{a_2}$$

のように分解する。ここに σ_i, ω_j は巡回置換で、 σ_i と σ_k は同じ文字を含まず、また ω_i と ω_k も同じ文字を含まない。

このとき、 $\sigma_1, \dots, \sigma_{a_1}$ の各 k に含まれる文字の数は $b_1 = n/a_1$ であり、 $\omega_1, \dots, \omega_{a_2}$ の各 h に含まれる文字の数は $b_2 = n/a_2$ となる。 $\pi_1^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$, $\pi_1^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$ はいずれも連結 (すなわち 2.2 で $m_1 = m_2 = 1$) であって

$$c(\tilde{k}_1) = a_1, \quad b(\tilde{k}_1) = b_1, \quad c(\tilde{k}_2) = a_2, \quad b(\tilde{k}_2) = b_2$$

が成立する。

③ 従って特に ② で、 $n = pqr$, $(p, q) = 1$, とすると、

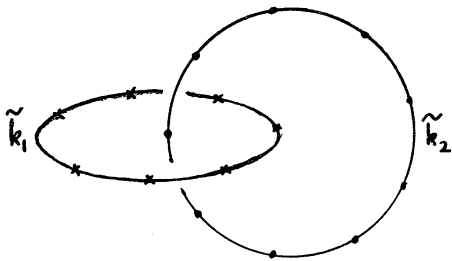
$$c(\tilde{k}_1) = p, \quad b(\tilde{k}_1) = qr, \quad c(\tilde{k}_2) = q, \quad b(\tilde{k}_2) = pr.$$

④ 更に $n = pqr$ で $p = 1$, $q > 1$, $r > 1$ であるとき、例 3.2 から予想されるように

$$M \cong L(n, q) = L(r, 1) \quad (\text{レンズ空間})$$

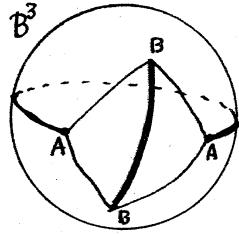
となる。但し $r = 2$ のときは、実射影空間である。

⑤ 更に特別な場合で $n = pq$, $(p, q) = 1$ の場合は例 3.1 から予想されるように $M \cong S^3$ で、 $(\tilde{k}_1 \cup \tilde{k}_2 \subset M)$ は最初の絡み輪 $(k_1 \cup k_2 \subset S^3)$ と同じ knot type である。実際: α 被覆は次のように考えられる: $\tilde{k}_1$ を p 等分, $\tilde{k}_2$ を q 等分する。



$\tilde{k}_1$ に q 枚の円板を, $\tilde{k}_2$ を q 等分点を含むように, $\tilde{k}_2$ に p 枚の円板を $\tilde{k}_1$ の p 等分点を含むように張る。これから $p+q$ 枚の円板は、 S^3 を pq 個の球体に分割

するが、その各々は下図左のような4面体とみれる。一方、



S^3 を k_1 と k_2 に張った円板 F_1 と F_2 で cut (3.1 の (1) 参照) すると、これと同じものが得られるはずである。

3.5. 演習: 階数2の自由加群 $G = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$ の部分群は $G(a, b) = \langle x^a, y^b \mid x^a y^b = y^b x^a \rangle$ の形をした部分群であることが知られる。より一般に、 G の基底 u_1, u_2 と、正整数 e_1, e_2 が存在し $G(a, b)$ の基底として $e_1 u_1, e_2 u_2$ で $e_1 | e_2$ となるものがとれる。これから、 G の S_n の推移的表現として、3.4 の表現 ϕ を考えれば十分であること、および、そのとき $\ker \phi$ はどのような部分群になっているかを調べよ。

§4. 絡み輪 $L = \left(\bigcirc_{k_1} \bigcirc_{k_2} \right)$ 上で分岐する分岐被覆空間。

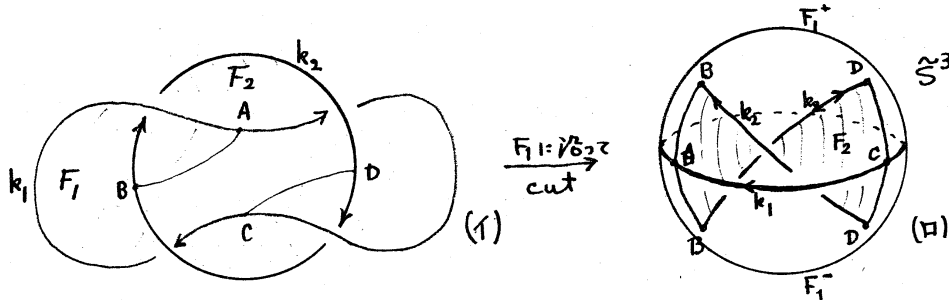
k_1 と k_2 の絡み数 $lk(k_1, k_2) = 2$ である。

$$G = \pi_1(S^3 - L) = \langle x, y \mid xyxy = yxyx \rangle$$

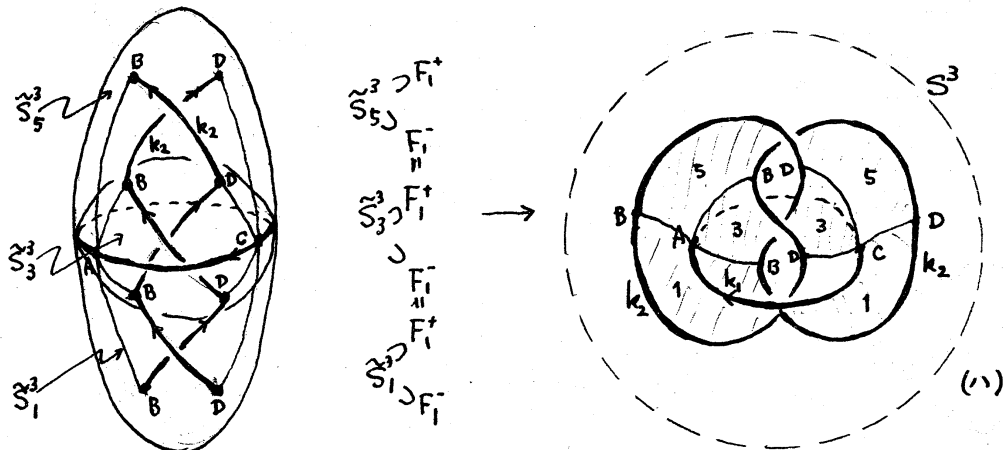
$$\begin{aligned} 4.1. \quad \phi: G &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 \subset S_6 \\ x &\longmapsto \tau^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \\ y &\longmapsto \tau^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) \end{aligned}$$

この単純な推移的表現から考察してみよう。L を次図のように書いて、 k_1 と k_2 に円板 F_1 と F_2 を張り、交線が $\overline{AB}$ と

$\overline{CD}$ になるようにする。 F_1 を S^3 を cut すると下図:



$\tilde{S}^3$ のコピーを 6 個 $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_6^3$ を用意し、2 組に分けて (1 3 5) と (2 4 6) の順に貼り合わせる:



これは $F_1 \subset \partial \tilde{S}_1^3$ と $F_1^+ \subset \partial \tilde{S}_5^3$ を貼り合わせる前の図

$F_1^- \subset \partial \tilde{S}_1^3$ と $F_1^+ \subset \partial \tilde{S}_5^3$ も貼り合わせたもの

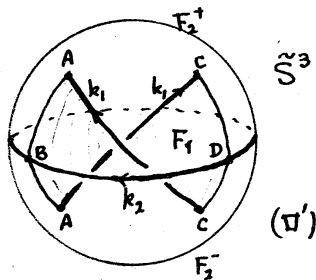
上右図 (i) の中の数字は、 $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_3^3, \tilde{S}_5^3$ の中の F_2 を示す。これら 3 枚のひねれた円板が合わさって、 k_2 (三葉結び目) が bound する種数 1 の曲面になっている。これと全く同じものが (2 4 6) の組で出来ている。これらを F_2 の方で cut して (1 4)(2 5)(3 6) の法則に従って貼り合わせるのであるが、これは 1.6 の巡回分岐被覆空間の構成と一致するから、三葉結

び目 k_2 (ハ) の図で) 上で分岐する S^3 の 2 重巡回分岐被覆空間が得られる。このとき $\pi^{-1}(k_1)$ は 2 本の単純閉曲線 $\tilde{k}_{11} \cup \tilde{k}_{12}$ となり, $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$ とおくと次が確かめられる: $M = L(3, 1)$ (Rolfsen [64, 302]),

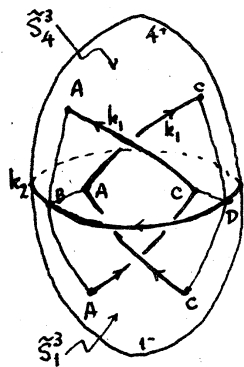
$$c(\tilde{k}_{11}) = c(\tilde{k}_{12}) = 1, \quad b(\tilde{k}_{11}) = b(\tilde{k}_{12}) = 3, \quad c(\tilde{k}_2) = 3, \quad b(\tilde{k}_2) = 2.$$

次に同じ分岐被覆空間を k_2 の方から始めて考察してみよう。

図(1) から, S^3 を F_2 に沿って cut して下図左の (ロ') を得る:

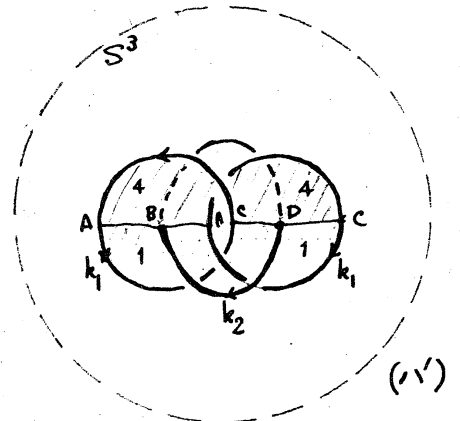


$\tilde{S}^3$ のコピーを 6 個 $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_6^3$ 用意し 3 組 $\tilde{S}_1^3$ と $\tilde{S}_4^3, \tilde{S}_2^3$ と $\tilde{S}_5^3, \tilde{S}_3^3$ と $\tilde{S}_6^3$ に分けて F_2^+ と F_2^- を (1 4), (2 5), (3 6) の法則で貼り合わせる:



左は $F_2 \cap \tilde{S}_1^3$ と $F_2 \cap \tilde{S}_4^3$ を貼り合わせる前の図。

右はこの部分も貼り合せて完成した図。



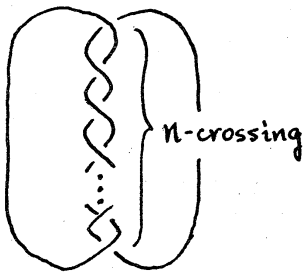
(ハ) の中の数字は, $\tilde{S}_1^3$ と $\tilde{S}_4^3$ の中の F_1 を示す。これら 2 枚の F_1 が合成されて絡み輪 $\bigcirc \bigcirc$ を境界とする曲面となっているのがわかる。これと同じものが他に 2 つ (2 5) と (3 6) の組から得られている。これらを F_1 で cut して (1 3 5) と (2 4 6) の法則に従って貼り合わせるのであるが、これも $\bigcirc \bigcirc$ 上で分岐す

る S^3 の 3 重巡回分岐被覆空間である。

この結果、絡み輪 L 上で分岐する、 $\phi: G \rightarrow Z_6$ に対応する分岐被覆空間 M は、三葉結び輪上で分岐する 2 重巡回分岐被覆空間として、また絡み輪 $\bigcirc$ 上で分岐する 3 重巡回分岐被覆空間として得られたことになる。

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad \phi: G &\longrightarrow Z_{2n} < S_{2n} \\
 x &\longmapsto \tau^2 = (1\ 3\ 5 \cdots 2n-1)(2\ 4\ 6 \cdots 2n) \\
 y &\longmapsto \tau^n = (1\ n+1)(2\ n+2)(3\ n+3) \cdots (n\ 2n)
 \end{aligned}$$

この推移的表現に対応する分岐被覆空間 M は、4.1 の考察から容易に予想されるように絡み輪



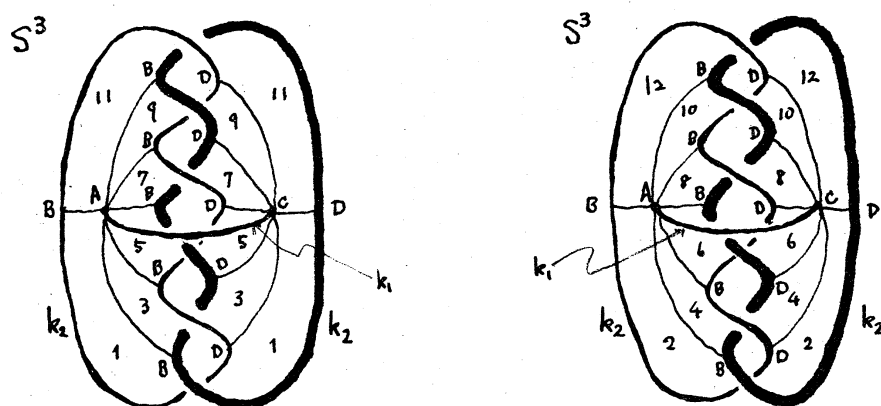
上で分岐する 2 重巡回分岐被覆空間として、また絡み輪 $\bigcirc$ 上で分岐する n 重巡回分岐被覆空間として得られる。
 n が奇数のときは左図は結び輪、偶数

のときは 2 成分の絡み輪となる $((2, n)$ 型トーラス絡み輪)。従って、 n が奇数の場合には、分岐被覆空間 M はレンズ空間の $L(n, 2)$ である。upstair の分岐集合 $\pi^{-1}(k_1) \cup \pi^{-1}(k_2)$ の状態については、各自調べてごらん。

もう一つ具体例を挙げよう。

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad \phi: G &\longrightarrow Z_{12} < S_{12} \\
 x &\longmapsto \tau^2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11)(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12) \\
 y &\longmapsto \tau^3 = (1\ 4\ 7\ 10)(2\ 5\ 8\ 11)(3\ 6\ 9\ 12) \\
 &\quad \tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)
 \end{aligned}$$

これも明らかに推移的表現である。4.1(II)のコピーを12回用意して、2組に分け、 $(1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11)$ と $(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12)$ の法則で F_1^+ と F_1^- を貼り合せると、 S^3 が2つ。4.1(ハ)に対応して次の図が得られる:



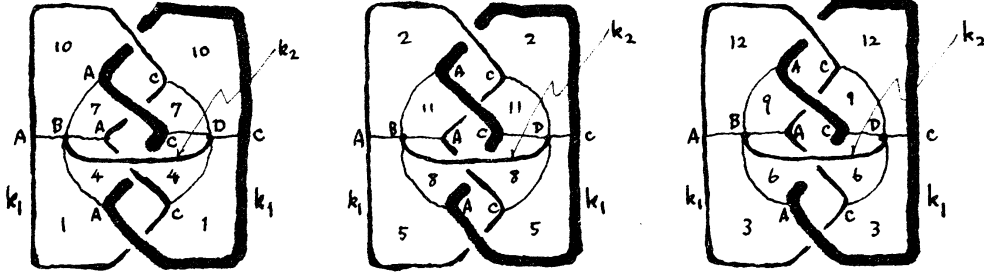
数字は、 $\tilde{S}_L^3$ の中での F_2 を i で示してある。これらの S^3 を F_2 でcutして、法則 $(1\ 4\ 7\ 10)$, $(2\ 5\ 8\ 11)$, $(3\ 6\ 9\ 12)$ で貼り合せるのであるが、今度は巡回被覆にはならない。一見して2本ある k_2 が1本になることに注意すると、 $\pi'(k_1) = \tilde{k}_{11} \cup \tilde{k}_{12}$, $\pi'(k_2) = \tilde{k}_2$ と書いて、次がわかる:

$$c(\tilde{k}_{11}) = c(\tilde{k}_{12}) = 1, \quad b(\tilde{k}_{11}) = b(\tilde{k}_{12}) = 6, \quad c(\tilde{k}_2) = 3, \quad b(\tilde{k}_2) = 4.$$

残念ながら、分岐被覆空間 M がどんな多様体なのかは、今のところ判らない。

今度も寄り道をして、同じ L 上の分岐被覆空間を k_2 の方からながめてみよう。4.1(ロ')のコピーを12回用意して3組に分け、 $(1\ 4\ 7\ 10)$, $(2\ 5\ 8\ 11)$, $(3\ 6\ 9\ 12)$ の法則で貼り合せ

ると、4.1(バ)に対応して次の3つの S^3 が得られる:



この場合も、図中の数字 i は、 i 番目のコピーの中の F_1 を示す。これから3個の S^3 を F_1 で cut して、法則 $(1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11)$ $(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12)$ で貼り合わせるのであるが、巡回被覆ではない。3ヶ所に1本ずつある k_2 が1本になることに注意。

4.4. ここで §4 のまとめを試みよう。

$$G = \langle x, y \mid xyxy = yxyx \rangle \xrightarrow{\phi} Z_n < S_n$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \tau^p \\ y & \xrightarrow{\quad} & \tau^q \end{array}$$

但し $\tau = (1\ 2\ 3 \dots n)$ 。この表現を固定すると次が言える。

但し 3.4 と同じように $1 \leq p \leq q < n$ とする。

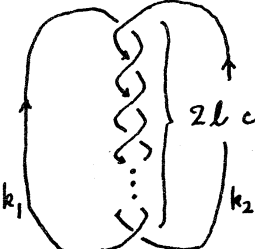
① $\text{g.c.d.}(p, q) = 1$ ならば、 $\phi: G \rightarrow S_n$ は推移的である。逆が言えるかどうかは、今のところ判らない。群の形から言えそうでもあるし、上の 4.3 の例からもっと複雑な推移的表現もありそうである。

② $(p, q) = 1$ とする。3.4 ② と同じように

$$\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{a_1}, \quad \tau^q = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{a_2}$$

と、同じ文字を含まない巡回置換の積に書き、 σ_i に含まれる文字の数を $b_1 = n/a_1$, ω_j に含まれる文字の数を $b_2 = n/a_2$ とおく。 $\pi^{-1}(k_1)$ の各成分の分岐指数 $b(\tilde{k}_{1i}) = b_1$, $\pi^{-1}(k_2)$ の各成分の分岐指数 $b(\tilde{k}_{2i}) = b_2$ と言える。 a_i が奇数のとき $\pi^{-1}(k_i)$ は連結で、 $c(\tilde{k}_i) = a_i$, a_i が偶数のとき $\pi^{-1}(k_i) = \tilde{k}_{i1} \cup \tilde{k}_{i2}$ となり、 $c(\tilde{k}_{i1}) = c(\tilde{k}_{i2}) = a_i/2$ である ($i=1,2$)。

③特に $n=pq$, $(p,q)=1$ ならば、 M は $(2,q)$ 型トーラス絡み輪上で分岐する S^3 の p 重巡回分岐被覆空間として、また、 $(2,p)$ 型トーラス絡み輪上で分岐する S^3 の q 重巡回分岐被覆空間として得られる。

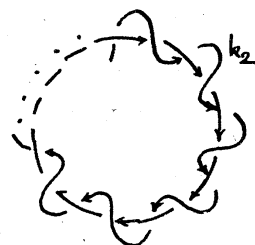
§5. 絡み輪 $L =$  $2l$ crossing 上で分岐する分岐被覆空間.
絡み数 $lk(k_1, k_2) = l$.

この場合.

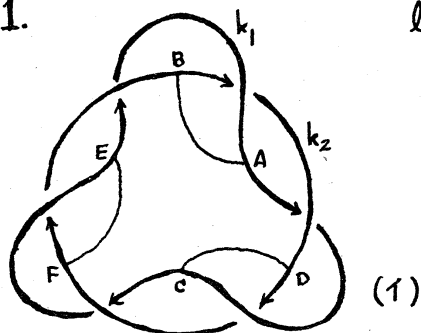
$$G = \langle x, y \mid \underbrace{xyxy \cdots xy}_{xy \text{ } l \text{ 回}} = \underbrace{yx yx \cdots yx}_{yx \text{ } l \text{ 回}} \rangle = \pi_1(S^3 - L)$$

なる表示を得る。 $l=1$ が §3 の例、 $l=2$ が §4 の例である。

L は $(2, 2l)$ 型のトーラス絡み輪だから右図のように描いた方が見易い。 $l=3$ の場合を調べれば、§4 と合せて一般の場合も予想が立つ。



5.1.

 $l=3$ の場合を考察しよう.

$$\phi: G = \langle x, y \mid xyxyxy = yxyxyx \rangle$$

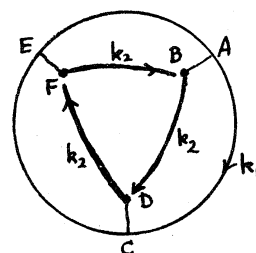
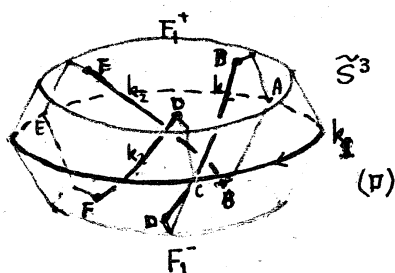
$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} x \quad y \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \tau^3 = (14)(25)(36) \\ \tau^2 = (135)(246) \end{array}$$

$$\downarrow$$

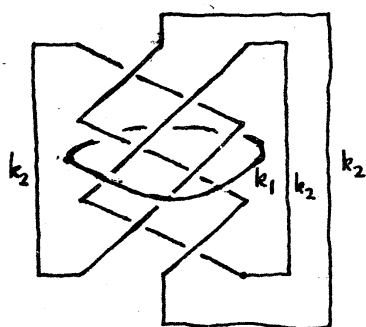
$$\mathbb{Z}_6$$

絡み輪 L に 2 枚の円板 F_1 と F_2 を $\partial F_1 = k_1$, $\partial F_2 = k_2$ とするよう
に、しかも $F_1 \cap F_2$ が上図 (I) の線分 AB , CD , EF だけに
なるように張る。 F_1 で S^3 を cut して、境界が表になるよう
に書くと:



(III) を上から見た図.

前節の (II) と書き方を変えたがわかっていただけよう。こ
れと同じ S^3 のコピーを 6 個 $S_1^3, S_2^3, \dots, S_6^3$ 用意し、2 組に
分けて、 (135) と (246) の法則で F_1^+ と F_1^- を貼り合わせる:

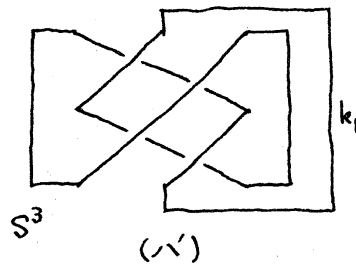
(IV) $(3,3)$ トーラス絡み輪

S^3 の中に左の絡み輪が入った図が
2 つ得られる。少々複雑だが、3
枚の F_2 はこの図の 3 本の k_2 を
境界とする連結な曲面になってい
ることがわかる。この 2 つの S^3 を

F_2 の方で cut して, $(14), (25), (36)$ の法則で貼り合せたのであるが, これは前頁の 3 成分の絡み輪上で分岐する S^3 の 2 重巡回分岐被覆空間である. $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$, $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_{21} \cup \tilde{k}_{22} \cup \tilde{k}_{23}$ であって, 次の成立する.

$$c(\tilde{k}_1) = 2, \quad b(\tilde{k}_1) = 3, \quad c(\tilde{k}_{21}) = c(\tilde{k}_{22}) = c(\tilde{k}_{23}) = 1, \\ b(\tilde{k}_{21}) = b(\tilde{k}_{22}) = b(\tilde{k}_{23}) = 2.$$

今度も同じ分岐被覆空間を k_2 の方から考えてみよう。(ロ) の $\tilde{S}^3$ のコピーを 6 個用意し, 3 組に分けて $(14), (25), (36)$ の法則で貼り合せた. 一つだけ書いてみると:



これは $(3,2)$ 型, すなわち $(3,1)$ 型のトーラス結び輪である. このコピーを 3 つ, F_1 の方で cut して法則 $(135), (246)$ で貼り合せると

$(3,1)$ 型トーラス結び輪 (三葉結び輪) 上で分岐する S^3 の 3 重巡回分岐被覆空間であり, M は Rolfsen [64, pp. 304-305] に解説してある.

少々乱暴だが, 紙数も少なくなったところで, 一般の場合をみよう.

$$5.2. \quad G = \langle x, y \mid \overbrace{xyxy \cdots xy}^{xy \cdots l \text{ 回}} = \overbrace{yx yx \cdots yx}^{yx \cdots l \text{ 回}} \rangle \xrightarrow{\phi} Z_n \subset S_n$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \tau^p \\ y & \xrightarrow{\quad} & \tau^q \end{array}$$

$1 \leq p \leq q < n$ なる表現を固定しよう.

① $\text{g.c.d.}(p, q) = 1$ のとき, ϕ は推移的である。4.4①と同じように, この他に推移的表現があるか否かは不明である。

② $(p, q) = 1$ とし, 4.4②と同じように

$$\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{a_1}, \quad \tau^q = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{a_2}$$

と同じ文字も含まない巡回置換の積に分解し, $b_1 = n/a_1$,

$b_2 = n/a_2$ とおく, $\pi^{-1}(k_1)$ の各成分の分岐指数は b_1 で,

$\pi^{-1}(k_2)$ の各成分の分岐指数は b_2 となる。

③ $n = pq$ で $(p, q) = 1$ のときは, M は (l, q) 型トーラス絡み輪上で分岐する p 重巡回分岐被覆空間としても, (l, p) 型トーラス絡み輪上で分岐する q 重巡回分岐被覆空間としても得られる。

この他, 上記の a_1, a_2, b_1, b_2, l を用いて, 分岐集合の様子を多少述べることができるが, 今回はここまでにしたい。

References for Branched Covering Spaces

- [1] Alexander, J.W.: *Note on Riemann spaces*, Bull.Amer.Math.Soc., 26 (1920), 370-372.
- [2] Antonelli, P.L.: *Structure theory for Montgomery-Samelson fiberings between manifolds, I & II*, Canad.J.Math., 21 (1969), 170-179, & ibid. 180-186.
- [3] Bankwitz, C. & Schumann, H.G.: *Über Viergeflechte*, Abh.Math.Sem. Univ.Hamburg, 10(1934), 263-284.
- [4] Birman, J.S. & Hilden, H.M.: *The homeomorphism problem for S^3* , Bull.Amer.Math.Soc., 79(1973), 1006-1009.
- [5] ————— : *Heegaard splittings of branched coverings of S^3* , Trans.Amer.Math.Soc., 213(1975), 315-352.
- [6] Blanchfield, R.C.: *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann.of Math., 65(1957), 340-356.
- [7] ————— & Fox, R.H.: *Invariants of self-linking*, Ann. of Math., 53(1951), 556-564.
- [8] Borel, A.: *SEMINAR ON TRANSFORMATION GROUPS*, Ann.of Math.Studies #46, Princeton Univ.Pr., 1960.
- [9] Burde, G.: *On branched coverings of S^3* , Canad.J.Math., 23 (1971), 84-89.
- [10] Cappell, S.E. & Shaneson, J.L.: *Cyclic branched covering spaces, Knots, Groups and 3-Manifolds*, Ann.of Math.Studies #84, Princeton Univ.Pr., 1975, 165-173.
- [11] Church, P.T.: *Differentiable open maps on manifolds*, Trans.Amer. Math.Soc., 109(1963), 87-100.
- [12] ————— & Hemmingsen, E.: *Light open maps on n -manifolds*, Duke Math.J., 27(1960), 527-536.

- [13] Church, P.T. & Hemmingsen, E.: *Light open maps on n -manifolds, II*, Duke Math.J., 28(1961), 607-624.
- [14] Fox, R.H.: *Free differential calculus II, The isomorphism problem of groups*, Ann.of Math., 59(1954), 196-210, MR15,931.
- [15] ——— : *Free differential calculus III, Subgroups*, Ann.of Math., 64(1956), 407-419.
- [16] ——— : *Covering spaces with singularities*, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S.Lefschetz, Princeton Univ.Pr., 1957, 243-257.
- [17] ——— : *On knots whose points are fixed under a periodic transformation of the 3-sphere*, Osaka Math.J., 10(1958), 31-35.
- [18] ——— : *Congruence classes of knots*, *ibid.* 37-41.
- [19] ——— : *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann.of Math., 71(1960), 187-196.
- [20] ——— : *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, 1962, 120-167.
- [21] ——— : *Construction of simply connected 3-manifolds*, *ibid.* 213-216.
- [22] ——— : *Two theorems about periodic transformations of the 3-sphere*, Michigan Math.J., 14(1967), 331-334.
- [23] ——— : *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad.J.Math., 22(1970), 193-201.
- [24] ——— : *A note on branched cyclic coverings of sphere*, Revista Mat.Hisp.-Amer., 32(1972), 158-166.
- [25] Giffen, C.H.: *The generalized Smith conjecture*, Amer.J.Math., 88 (1966), 187-198.
- [26] Goeritz, L.: *Die Betti'schen Zahlen der zyclischen Überlagerungsräume der Knotenaussenräume*, Amer.J.Math., 56(1934), 194-198.

- [27] Gordon, C.McA.: *Knots whose branched cyclic coverings have periodic homology*, Trans.Amer.Math.Soc., 168(1972), 357-370.
- [28] ————— : *A short proof of a theorem of Plans on the homology of the branched cyclic coverings of a knot*, Bull.Amer.Math.Soc., 77(1971), 85-87.
- [29] ————— & Heil, W.: *Simply-connected branched coverings of S^3* , Proc.Amer.Math.Soc., 35(1972), 287-288.
- [30] Hartley, R. & Murasugi, K.: *Covering linkage invariants*, Canad.J. Math., (to appear).
- [31] ————— : *Homology invariants*, (preprint).
- [32] Hemmingsen, E.: *Open simplicial mappings of manifolds on manifolds*, Duke Math.J., 32(1965), 325-331.
- [33] ————— & Reddy, W.: *Montgomery-Samelson coverings on manifolds*, Duke Math.J., 38(1971), 635-640. MR46#4524.
- [34] Hilden, H.M.: *Every closed, orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3* , Bull.Amer.Math.Soc., 80(1974), 1243-1244.
- [35] ————— : *Three-fold branched coverings of S^3* , Amer.J.Math., 98(1976), 989-997.
- [36] Hirsch, U.: *Über offene Abbildungen auf 3-Sphäre*, Math.Z., 140 (1974), 203-230.
- [37] ————— & Neumann, W.D.: *On cyclic branched coverings of spheres*, Math.Ann., 215(1975), 289-291.
- [38] Hopf, H.: *Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Rend.Mat.e Appl.(5), 21(1962), 273-285.
- [39] Hosokawa, F. & Kinoshita, S.: *On the homology group of branched cyclic covering spaces of links*, Osaka Math.J., 12(1960), 331-355.

- [40] Kauffman, L.H.: *Cyclic branched covers and $O(n)$ -manifolds*, Proc. Conf.Transformation Groups, Lecture Notes in Math. #298, Springer, 1972, 416-429.
- [41] ————— : *Branched coverings, open books and knot periodicity*, Topology, 13(1974), 143-160.
- [42] Kinoshita, S.: *On Wendt's theorem of knots*, Osaka Math.J., 9(1957), 61-66.
- [43] ————— : *On Wendt's theorem of knots, II*, Osaka Math.J., 10 (1958), 259-261.
- [44] ————— : *On knots and periodic transformations*, Osaka Math.J., 10(1958), 43-52.
- [45] ————— : *On irregular branched covering spaces of a kind of knots*, Notices Amer.Math.Soc., 14(1967), 924.
- [46] Levine, J.: *Polynomial invariants of knots of codimension two*, Ann. of Math., 84(1966), 537-554. MR34#808.
- [47] Lickorish, W.B.R.: *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann.of Math., 76(1962), 531-538.
- [48] Milnor, J.W.: *Infinite cyclic coverings*, Topology of Manifolds, Prindle, Weber and Schmidt, 1968, 115-133.
- [49] Montesinos, J.M.: *Reducción de la conjetura de Poincaré a otras conjeturas geométricas*, Revista Mat.Hisp.-Amer., 32(1972), 33-51.
- [50] ————— : *Una nota a un Teorema de Alexander*, ibid.167-187.
- [51] ————— : *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3* , Bull.Amer.Math.Soc., 80(1974), 845-846.
- [52] ————— : *Representaciones de enlaces en relacion con recubridores dobles ramificados*, Collectanea Math., 25 (1974), 145-157.

- [53] Montesinos, J.M.: *Surgery on links and double branched covers of S^3* , Knots, Groups and 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies #84, Princeton Univ. Pr., 1975, 227-259.
- [54] ————— : *Three-manifolds as 3-fold branched covers of S^3* , Quart. J. Math. Oxford(2), 27(1976), 85-94.
- [55] Montgomery, D. & Samelson, H.: *A theorem on fixed points of involutions in S^3* , Canad. J. Math., 7(1955), 208-220.
- [56] Perko, K.A. Jr.: *On covering spaces of knots*, Glasnik Mat., 9(1974), 141-145.
- [57] ————— : *Octahedral knot covers*, Knots, Groups and 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies #84, Princeton Univ. Pr., 1975, 47-50.
- [58] ————— : *On dihedral covering spaces of knots*, Invent. Math., 34(1976), 77-82.
- [59] Plans, A.: *Contribution to the study of the homology groups of the cyclic ramified coverings corresponding to a knot*, Rev. Acad. Ci. Madrid., 47(1953), 161-193. (Spanish), MR15,147.
- [60] Reddy, W.: *Montgomery-Samelson coverings on spheres*, Michigan Math. J., 17(1970), 65-67. MR41#1054.
- [61] ————— : *Branched coverings*, Michigan Math. J., 18(1971), 103-114. MR46#4526.
- [62] Riley, R.: *Homomorphisms of knot groups on finite groups*, Math. Comp. 25(1971), 603-619.
- [63] ————— : *Parabolic representations of knot groups I*, Proc. London Math. Soc. (3), 24(1972), 217-242.
- [64] Rolfsen, D.: *KNOTS AND LINKS*, Publish or Perish, Inc., 1976.
- [65] Schubert, H.: *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z., 65(1956), 133-170.
- [66] Sebastiani, M. & Thom, R.: *Un resultat sur la monodromie*, Invent. Math., 13(1971), 90-96.

- [67] Seifert, H.: *Über das Geschlecht von Knoten*, Math.Ann., 110(1934), 571-592.
- [68] ——— : *Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerung*, Abh.Math.Sem.Univ.Hambrug, 11(1935), 84-101.
- [69] ——— : *Schlingknoten*, Math.Z., 52(1949), 62-80.
- [70] ——— & Threlfall, W.: *LEHRBUCH DER TOPOLOGIE*, Leipzig, 1934.
- [71] Shinohara, Y. & Summers, D.W.: *Homology invariants of cyclic coverings with applications to links*, Trans.Amer.Math.Soc., 163 (1972), 101-121.
- [72] Smith, P.A.: *Transformations of finite period*, Ann.of Math., 39 (1938), 127-164.
- [73] ——— : *New results and old problems in finite transformation groups*, Bull.Amer.Math.Soc., 66(1960), 401-415.
- [74] Summers, D.W.: *Polynomial invariants and the integral homology of coverings of knots and links*, Invent.Math., 15(1972), 78-90.
- [75] ——— : *Smooth $\mathbb{Z}_p$ -actions on sphere which leave knots point-wise fixed*, Trans.Amer.Math.Soc., 205(1975), 193-203.
- [76] Tucker, A.W.: *Branched and folded coverings*, Bull.Amer.Math.Soc., 42(1936), 859-862.
- [77] Viro, O.Ja.: *Linking, 2-sheeted branched coverings, and braids*, Math.USSR, Sbornik, 16(1972), 223-236. (English translation)
- [78] ——— : *Branched coverings of manifolds with boundary and link invariants I*, Math.USSR Izvestija, 7(1973), 1239-1256.
- [79] Waldhausen, F.: *Über Involutionen der 3-Sphäre*, Top., 8(1969), 81-91.
- [80] Wendt, H.: *Die gordische Auflösung von Knoten*, Math.Z., 42(1937), 680-696.
- [81] Whitehead, J.H.C.: *On doubled knots*, J.Lond.Math.Soc. 12(1937), 63-71.
- [82] Zeeman, E.C.: *Twisting spun knots*, Trans.Amer.Math.Soc., 115(1965), 471-495.