

線形樹化数について

電通大

中山 明

NAKA YAMA AKIRA

1. Introduction

ここで扱うグラフは、単純無向グラフとする。グラフ G に対して、 G の辺集合を分割する問題を考える。まず線形林とは、 G の各成分が道となっているグラフのことである。このとき、 G を線形林に分割した時の線形林の最小個数が問題となる。この数を線形樹化数と呼び、 $\Xi(G)$ で表わす。この概念は、F. Harary によって導入され、今までに種々の結果が知られている。さらに応用面としては、情報検索等に利用する際、一つの数学的モデルとしてとらえることができる。これから、今までに得られている結果とその証明方法を紹介し、線形樹化数とグラフの演算（ここでは、Cartesian product を扱った。）との関係を述べることにする。

2. Definitions and Notations

K_p …… 位数 p の完全グラフ

$K(m, n)$ 部集合 V_1, V_2 が, $|V_1|=m, |V_2|=n$ なる完全二部グラフ。

$\Delta(G)$ グラフ G の最大次数。

$G_1 \times G_2$ G_1 と G_2 の Cartesian product.

$L(G)$ G の line graph.

Q_n n -cube で次のように定義される。

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2, Q_1 = K_2$$

G の 2-factor G の 2-正則全域部分グラフ。

G : 2-factorable G が 2-factor の辺和として表わされる場合。

$\oplus$ 辺和を示す。

$c(e)$ 辺 e に塗られている色を示す。

$\langle \mathcal{F} \rangle$ $\mathcal{F} (\subseteq V(G) \text{ or } E(G))$ によって誘導される G の部分グラフ。

G の $\{a, b\}$ -factor 各点 v の次数が, $a \leq \deg v \leq b$ となっている G の全域部分グラフ。

$$\mathcal{G}_{\text{odd}} := \{ G \mid \text{odd-regular}, \Xi(G) = \left\{ \frac{\text{odd}+1}{2} \right\} \}$$

$$\mathcal{G}_r := \{ G \mid r\text{-regular}, \Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\} \}$$

$$\mathcal{R}_r := \{ H \mid H : r\text{-regular} \}$$

$$G \setminus F := V(G \setminus F) = V(G), E(G \setminus F) = E(G) \setminus E(F).$$

$\{ \}$ セット上げ。

今後、'線形林で覆われた' という代りに、'色 c の線形林で塗られた' という表現も用いることにする。

3. Propositions and Theorems

Proposition 1 $G: r\text{-regular} \Rightarrow \Xi(G) \geq \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$

Proposition 2 G は次の条件 (i), (ii) を満たすグラフとする。

$$\begin{cases} \text{(i)} \exists v \in V(G) \text{ s.t. } \deg v = 4 \\ \text{(ii)} \forall u \in V(G) \setminus \{v\}, \deg u = 3 \end{cases} \Rightarrow \Xi(G) = 2$$

Note: この命題は、[5] の中の Theorem 6 の特別な場合に相当している。

Proposition 3 $\Xi(G) \geq \left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\}$

Proposition 4 $\mathcal{M}_{2k-1} = \mathcal{G}_{2k-1}$ となる k が存在すれば、

$$\mathcal{M}_{2k} = \mathcal{G}_{2k}$$

Theorem A K_{2n+1} は n 個の Hamiltonian cycle の辺和として表現できる。

Theorem B G : 自明でない連結グラフとする。

G : オイラー回路をもつ $\Leftrightarrow G$ のどの点の次数も偶数

Theorem C [Petersen]

$G: 2\text{-factorable} \Leftrightarrow G: \text{even-regular}$

4. 特殊なグラフの族についての線形樹化数

今までに知られている結果を示すと次のようになる。

Theorem (a) [秋山, Exoo, Harary]

$$T: \text{木} \Rightarrow \Xi(T) = \left\{ \frac{\Delta(T)}{2} \right\}$$

Theorem(b) [Stanton, Cowan, James]

$$\Xi(K_p) = \left\{ \frac{p}{2} \right\}$$

Theorem(c) [秋山, Exoo, Harary]

$$\Xi(K(m, n)) = \left\{ \frac{m + \delta(m, n)}{2} \right\}$$

ただし、 $m \geq n$ とし、 $\delta(m, n)$ は Kronecker delta とする。

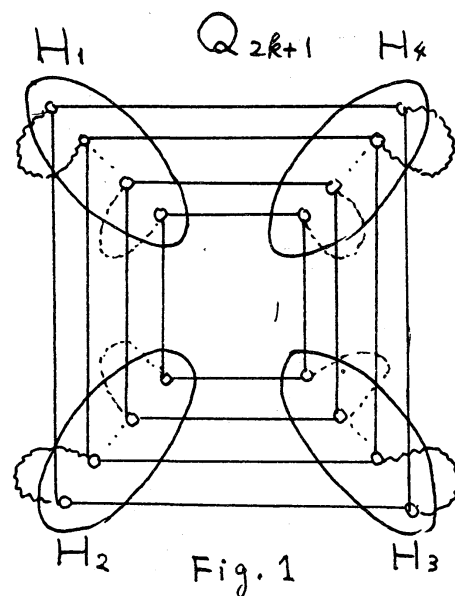
これより新しい結果を示す。

Theorem(d) (中々) $\Xi(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$

(proof) Q_{2k} と Q_{2k+1} に分けて考える。まず Q_{2k+1} は、 k に関する帰納法によって求める。 $\Xi(Q_{2k-1}) = k$ と仮定し、

$Q_{2k+1} = Q_{2k-1} \times C_2$ に変形する。

このとき、 k 色の線形林で塗られた Q_{2k-1} に対して各色の線形林の成分である道に注目する。各道の端点を組にして、この彩色されたグラフの点集合を並びかえて得られるグラフを H とする。ここで、 H のコピー H_i ($i=1, \dots, 4$) を用意し、



各 H_i の対応する点を辺で結び Fig. 1 のように構成する。すると Q_{2k+1} は、新しい 1 色を追加し、 $(k+1)$ 色の線形林で覆えることは明らかである。よって、 $\Xi(Q_{2k+1}) = k+1$ 。一方、

Q_{2k} に対しては、 $\Xi(Q_{2k+1}) \geq \Xi(Q_{2k})$ は容易に得られる。さらに Proposition 1 より $\Xi(Q_{2k}) \geq k+1$ となるので $\Xi(Q_{2k}) = k+1$ 。以上をまとめれば、 $\Xi(Q_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ 。 $\square$

Theorem (e) [中山] C_n : 位数 n の cycle.

$$\forall G \in \mathcal{G}_r, \quad \Xi(G \times C_n) = \left\lfloor \frac{r+3}{2} \right\rfloor \quad (n \geq 3)$$

これを証明する為にいくつかの Lemmas を用意する。

Lemma 1

$$\forall G \in \mathcal{G}_{2m-1}, \quad \Xi(G \times C_n) = m+1 \quad (m \geq 1, n \geq 3)$$

(proof) $\forall G \in \mathcal{G}_{2m-1}$ を選ぶと $\Xi(G) = m$ 。よって $1, \dots, m$ までの m 色の線形林で、 G が塗られている。しかも G の任意の点 v は奇点より、この v が端点となっている色の道が存在する。従って、この彩色された G を以下のように構成できる。色 i の j_i 本の道の2つの端点をそれぞれ、 $u_1^i, v_1^i; u_2^i, v_2^i; \dots; u_{j_i}^i, v_{j_i}^i$ と置き、Fig. 2 のように並べる。

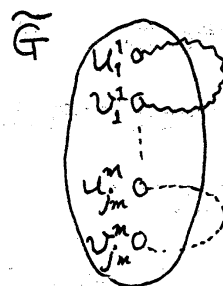
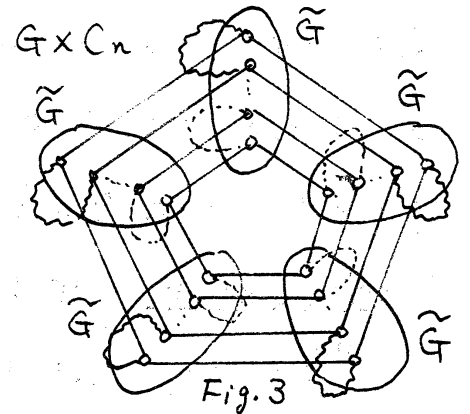


Fig. 2

このグラフを $\tilde{G}$ とおく。さて、 $G \times C_n$ は G の n 個のコピーを用いて書けるので、彩色された $G \times C_n$ を構成する時に、 G を $\tilde{G}$ で置きかえる。そして、Fig. 3 のように、 n 個のコ

ピーの各対応する点を組にして C_n で結ぶことにする。最後に、同心円状の C_n の部分を塗るには、外側から2つずつの C_n を組にすると、あと1色の線形林を用いて塗り分けるこ

とができる。(塗り方は一意的ではない。)従って、 $\Xi(G \times C_n) \leq m+1$ 。
 一方、 $G \times C_n$ は $(2m+1)$ -正則グラフであるから Proposition 1 を用いて $\Xi(G \times C_n) \geq m+1$ 。以上をまとめれば $\Xi(G \times C_n) = m+1$ が得られる。 $\square$



Lemma 2 $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}, \Xi(G \times K_2) = m+1$

(proof) $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}$ をとると、 $\Xi(G) = m+1$ 。彩色された G のコピー G_1, G_2 を用意する。ただし、 G_1 と G_2 の塗り方は、同じとし $1, \dots, m+1$ の色を用いることにする。

$$U_i := \{u_i \in V(G_i) \mid |\{u_i u \in E(G_i) \mid c(u_i u) = j\}| = 2, j = 1, \dots, m+1\}$$

$$V_i := \{v_i \in V(G_i) \mid \exists k \text{ s.t. } |\{v_i v \in E(G_i) \mid c(v_i v) = k\}| = 1\}$$

と定義する。まず U_i に属する点 u_i に接続する辺には、 m 色の線形林しか使われていないので、 u_1 と u_2 を残りの 1 色で塗られた辺で結ぶ。 V_i に属する点 v_1, v_2 に対しては、次のような方法に従って彩色された辺を用いて、 v_1 と v_2 を系結ぶ。i.e. cycle ができないように、しかも 2 本の道の端点どうしが共に一致しないように、 $m+1$ 色で G_1 と G_2 の点をできるだけ結ぶ。このように彩色すれば、まだ結ばれていない点どうしを順次 cycle を作らないように $m+1$ 色の線形林で覆うことができる。したがって、 $\Xi(G \times K_2) = m+1$ $\square$

Lemma 3 $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}, \exists(G \times C_n) = m+2 \quad (n \geq 3)$

(proof) $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}$ に対して、 $H = G \times K_2$ とおく。すると、
Lemma 2 より $\exists(H) = m+1$ 、かつ H は $(2m+1)$ -正則グラフ。
したがって、 $H \in \mathcal{G}_{2m+1}$ 。さらに Lemma 1 より、

$$\exists(H \times C_n) = m+2$$

ところで、 $G \times C_n < H \times C_n$ に注意すれば、Proposition 1 を用いて、 $m+2 \leq \exists(G \times C_n) \leq \exists(H \times C_n) = m+2$ 。よって
 $\exists(G \times C_n) = m+2$ を得る。 $\square$

以上 Lemma 1 と Lemma 3 をまとめて、Theorem(c) を得る。

Corollary $\exists(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$

(proof) Q_{2k+1} を k に関する帰納法で証明する。 $\exists(Q_{2k-1}) = k$ と仮定すると、 $Q_{2k-1} \in \mathcal{G}_{2k-1}$ 。従って Theorem(c) より

$$\exists(Q_{2k+1}) = \exists(Q_{2k-1} \times C_2) = k+1$$

となる。一方、 $\exists(Q_{2k}) = k+1$ となることは、 Q_{2k} の構造より明らか。よって、 $\exists(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$ $\square$

Theorem(f) [中山]

$$\exists(L(K(m, n))) = \left\{ \frac{m+n-1}{2} \right\}$$

これも、いくつかの Lemmas を用意して証明する。

Lemma 4 $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ 、ただし、 $G_i: (2k_i+1)$ -正則グラフとする。このとき、 $\exists(G_1 \times G_2) = k_1 + k_2 + 2$

(proof) $V(G_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $V(G_2) = \{y_1, \dots, y_m\}$ とおく。

Cartesian product の定義より、 $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$.

$$S_{x_i} := \{(x_i, y_l) \mid x_i \in V(G_1), y_l \in V(G_2) \ (l=1, \dots, m)\}$$

$$T_{y_k} := \{(x_j, y_k) \mid x_j \in V(G_1), y_k \in V(G_2) \ (j=1, \dots, n)\}$$

とおくと、 $\langle S_{x_i} \rangle \cong G_1$, $\langle T_{y_k} \rangle \cong G_2$ が成立する。しかも仮定より、 $\Xi(\langle S_{x_i} \rangle) = k_1 + 1$ 。かつ、 $\langle S_{x_1} \rangle, \dots, \langle S_{x_n} \rangle$ は互いに素であるから、

$$\Xi\left(\bigcup_{i=1}^n \langle S_{x_i} \rangle\right) = k_1 + 1 \quad \text{--- --- ①}$$

同様に、 $\langle T_{y_k} \rangle$ についても

$$\Xi\left(\bigcup_{k=1}^m \langle T_{y_k} \rangle\right) = k_2 + 1 \quad \text{--- --- ②}$$

従って、①, ②, Proposition 1 を用いれば、

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2 &\leq \Xi(G_1 \times G_2) \leq \Xi\left(\bigcup_{i=1}^n \langle S_{x_i} \rangle\right) + \Xi\left(\bigcup_{k=1}^m \langle T_{y_k} \rangle\right) \\ &= k_1 + k_2 + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \Xi(G_1 \times G_2) = k_1 + k_2 + 2 \quad \square$$

Lemma 4 において、 $G_1 = K_{2n+1}$, $G_2 = K_{2m+2}$ とおくと、

Theorem(b) より、 $K_{2n+2}, K_{2m+2} \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ 。

$$\therefore \Xi(K_{2n+2} \times K_{2m+2}) = n + m + 2 \quad \text{--- --- (*)}$$

Lemma 5 $L(K(m, n)) = K_m \times K_n = K_n \times K_m$

くわしいことは、[11] を参照のこと。

Lemma 6 $K_{2n+1} = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n, T = T^* L$. F_i :

Hamiltonian cycle. (Theorem A より いえる。) とおくと、

$$\exists I = \{e_i \in E(F_i) \mid i=1, \dots, n\} \text{ s.t. } I: \text{独立集合}$$

(proof) [3] の証明を利用して、独立集合 I を構成する。

$V(K_{2n+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2n}\}$ とおくと、Hamiltonian cycle は次のように定めることができる。 i.e.

$$F_i: v_0, v_1, v_{i+1}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i-2}, \dots, v_{n+i-1}, v_{n+i+1}, v_{n+i}, v_0$$

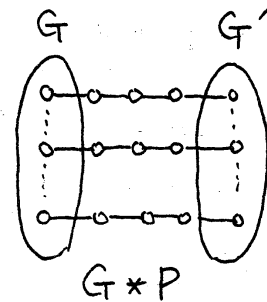
そこで、 $I = \{v_1 v_{n+1}, v_2 v_{n+2}, \dots, v_n v_{2n}\}$ とすれば、 I は独立集合となる。次に、 $v_k v_{n+k}$ ($k=1, \dots, n$) が、異った F_i に属することを調べる。まず、 $v_k v_{n+k} \in E(F_{\lfloor \frac{n+2k}{2} \rfloor})$ (添字は $\text{mod } n$ でとる。) となりしかも、

$$v_j \neq v_k \Rightarrow \left\lfloor \frac{n+2j}{2} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{n+2k}{2} \right\rfloor \pmod{n}$$

が確かめられるので、 $v_1 v_{n+1}, \dots, v_n v_{2n}$ は、それぞれ異った F_i に入っていることになる。 $\square$

ここで、 $G * P$ (ただし、 P は道) なる新しいグラフを定義する。

$G * P$: G のコピー G' を用意し、それぞれ対応する点どうしを道 P でつないだグラフ ($\Rightarrow$ 右図)



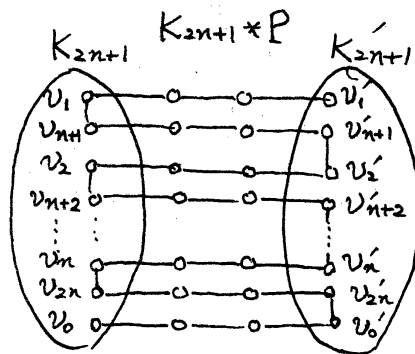
Lemma 7 $\exists (K_{2n+1} * P) = n+1$

(proof) K_{2n+1} のコピーを K'_{2n+1} とし

$$V(K_{2n+1}) = \{v_0, \dots, v_{2n}\}$$

$$V(K'_{2n+1}) = \{v'_0, \dots, v'_{2n}\}$$

とおく。Lemma 6 より独立集合は、



$I := \{v_1 v_{n+1}, \dots, v_n v_{2n}\}$ を選ぶ。そして $H = K_{2n+1} \setminus I$ とおくと、 $\Xi(H) = n$ 。一方、 K_{2n+1} の頂点集合の置換 σ を考えることにより、 K_{2n+1} から、独立集合 $I' = \{v'_2 v'_{n+1}, v'_3 v'_{n+2}, \dots, v'_n v'_{2n-1}, v'_0 v'_{2n}\}$ を構成すると、 I' は、Lemma 6 の条件を満たす。そこで前と同様に、 $H' = K_{2n+1} \setminus I'$ とおくと $\Xi(H') = n$ 。よって、 $\Xi(H \cup H') = n$ 。ところで道 P で結んである部分は、 I と I' と共に新しい 1 色で塗れるから、 $\Xi(K_{2n+1} * P) \leq n+1$ 。さらに Proposition 3 も考慮すれば、 $\Xi(K_{2n+1} * P) = n+1$ 。□

Lemma 7 で特に $P = K_2$ とおくと、

$$K_{2n+1} * K_2 = K_{2n+1} \times K_2 \quad \text{----- (α)}$$

$$K_{2n+1} < K_{2n+1} \times K_2 \quad \text{----- (β)}$$

$$\Xi(K_{2n+1}) = \Xi(K_{2n+1} \times K_2) = n+1 \quad \text{--- (γ)}$$

が成立する。

Lemma 8 $\forall G \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ (ただし、 G は $(2k+1)$ -正則とする。) に対して、 $\Xi(G \times K_{2n+1}) = k + n + 1$

(proof) $G \times K_{2n+1}$ のグラフで、まず G に同形なグラフから線形林で覆うことにする。そこで、 $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$, $V(K_{2n+1}) = \{u_1, \dots, u_{2n+1}\}$, $\mathcal{S}_{ij} = \{(v_i, u_j) \mid v_i \in V(G) \ i=1, \dots, m\}$ とおくと、 $\langle \mathcal{S}_{ij} \rangle \cong G$ となるので仮定より、 $\Xi(\langle \mathcal{S}_{ij} \rangle) = k+1$ 。従って、 $\langle \mathcal{S}_{u_1} \rangle$ は、 $(k+1)$ 色の線形林で塗れる。さらに、 $\langle \mathcal{S}_{u_1} \rangle, \dots, \langle \mathcal{S}_{u_{2n+1}} \rangle$ は互いに素なので、 $\langle \mathcal{S}_{u_2} \rangle$ から

$\langle \mathcal{J}_{u_{2n+1}} \rangle$ まで、すべて $\langle \mathcal{J}_{u_i} \rangle$ と同じ塗り方にしておくと、
 $\exists(\bigcup_{j=1}^{2n+1} \langle \mathcal{J}_{u_j} \rangle) = k+1$ となる。 $\langle \mathcal{J}_{u_j} \rangle$ の塗り方より、このグラフの各点は、ある色 C の道 P の端点となっている。そこでこの両端点を $(v_p, u_j), (v_g, u_j)$ とおく。

$$T_{v_p} := \{(v_p, u_j) \mid u_j \in V(K_{2n+1}) \ j=1, \dots, 2n+1\}$$

を定義すると、 $\exists(\langle T_{v_p} \rangle) = \exists(K_{2n+1}) = n+1$ 。さらに、 $\langle T_{v_p} \rangle, \langle T_{v_g} \rangle$ とこれらの点どうしを結ぶ道まで合わせて考えれば、Lemma 7 が適用できるので、 $\exists(\langle T_{v_p} \rangle * P) = n+1$ 。しかも、 P の道の色が C となるようにできる。この操作を $\langle \mathcal{J}_{u_j} \rangle$ の各線形木の成分となっている道ごとにくり返し使うことにより、 $\exists(G \times K_{2n+1}) \leq k+n+1$ が得られる。一方、逆の不等式は Proposition 1 より得られる。 $\square$

Lemma 8 で特に、 $\exists(K_{2m+2} \times K_{2n+1}) = m+n+1 \dots\dots\dots (**)$

Lemma 9 $\exists(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) = m+n+1$

(proof) $H = K_{2n+1} \times K_2$ とおくと、 H は奇正則かつ Lemma 7 の特別な場合 (Y) より、 $H \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ 。さらに、Lemma 8 から

$$\exists(H \times K_{2m+1}) = m+n+1 \dots\dots\dots \square$$

$K_{2n+1} \times K_{2m+1}$ は、 $2(m+n)$ -正則グラフより、Proposition 1 より、

$$\exists(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) \geq m+n+1 \dots\dots\dots \square$$

ここで、Lemma 7 の (β) より、 $K_{2n+1} \times K_{2m+1} < H \times K_{2m+1}$ に注意し、しかも $\square, \square$ を合わせると、

$$m+n+1 \leq \Xi(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) \leq \Xi(H \times K_{2m+1}) = m+n+1$$

$$\therefore \Xi(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) = m+n+1 \quad \square$$

Theorem (f) の (proof) Lemma 5 より, $\Xi(K_n \times K_n)$ を求め、さらに対称性も考えると、次の3つの場合に帰着する。

Case 1 : $(m, n) = (\text{odd}, \text{odd})$ ----- この場合は、

Lemma 9 に相当する。

Case 2 : $(m, n) = (\text{odd}, \text{even})$ ----- Lemma 8 の特別な場合 (**) より得られる。

Case 3 : $(m, n) = (\text{even}, \text{even})$ ----- Lemma 4 の特別な場合 (*) より成立することがわかる。

以上をまとめれば、 $\Xi(L(K(m, n))) = \left\{ \frac{m+n-1}{2} \right\} \quad \square$

5. 正則グラフについての線形樹化数

どんなグラフ G も、 $\Delta(G)$ -正則グラフにうめ込められるという事実を使うと、正則グラフの線形樹化数を求めることが本質的な問題となる。しかしながら、任意の正則グラフについては、まだ証明されていない。一般に、 G を γ -正則グラフとすると、秋山の予想 ($\Xi(G) = \left\{ \frac{\gamma+1}{2} \right\}$) が知られており、今までに $\gamma=3, 4, 5, 6, 8$ の時既に正しいことが証明されている。しかもこれらの結果にはいくつかの証明方法があるので、その方法を紹介することにする。

Theorem(I) $G : \text{cubic graph} \Rightarrow \Xi(G) = 2$

Theorem (I) の証明方法について.

(I.1) [秋山] ----- 'necessary subgraphs' なる概念を導入し、点の位数による帰納法を用いた証明。

(I.2) [秋山, Chvátal] ----- Vizing の定理を用いて、辺集合をまず k 色に分ける。そのうち 2 色ずつ組にして 2 色で塗り直し、もし cycle ができた時にはその cycle をこわしていく証明。

(I.3) [Horák] ----- ' $\Delta(G) \leq 3 \Rightarrow \chi(G) \leq 2$ ' なる命題を辺の数に関する帰納法を用いる。このとき、初期条件は G が木の場合としている。

(I.4) [榎本] ----- 次数 2 の点に接続している辺の色を指定して、塗り分ける証明。

(I.5) ----- $\{1, 2\}$ -factor を用いる証明。(特に、maximal acyclic $\{1, 2\}$ -factor を考えればよい。)

Theorem (II) $G: 4\text{-regular} \Rightarrow \chi(G) = 3$

Theorem (II) の証明方法について

(II.1) [秋山, Exoo, Harary] ----- cubic graph の線形樹化数の系 (Proposition 4) として求める証明。

(II.2) [秋山, Exoo, Harary] ----- 4-正則グラフを 2 つの 2-factor に分解して、構成的に 3 つの線形林に塗り分ける証明。

(II.3) [中山] ----- $\{1, 2\}$ -factor を用いる証明。(特に、acyclic $\{1, 2\}$ -factor を考えればよい。)

(II.4) [榎本] ----- 次数2, 3の点に接続している辺の塗りを一部指定して塗り分ける証明。

Theorem (III) [榎本] $G: 5\text{-regular} \Rightarrow \exists(G) = 3$.

Theorem (IV) $G: 6\text{-regular} \Rightarrow \exists(G) = 4$

Theorem (IV) の証明方法について

(IV.1) [榎本] ----- 5-正則グラフの線形樹化数の系 (Proposition 4) として求める証明

(IV.2) [中山] ----- Proposition 2 と Theorem A を用いる証明。

(IV.3) [中山] ----- acyclic $\{1, 2\}$ -factor を考えて、Theorem (III) を用いる証明。

Theorem (V) $G: 8\text{-regular} \Rightarrow \exists(G) = 5$

Theorem (V) の証明方法について

(V.1) [榎本] ----- 8-正則グラフ G を、minimal $\{3, 4\}$ -factor H と $G \setminus H$ の2つの部分グラフに分解し、そのおののを線形林でぬり分ける証明。

(V.2) [中山]

(proof) まず、 G を連結 8-正則グラフとする。このとき、Theorem C より、 G には 2-factor F が存在する。したがっ

て、 $G \setminus F$ は 6-正則グラフとなる。 $H_1, H_2, \dots, H_\ell$ を $G \setminus F$ の成分とすると Theorem B より各 H_i は、オイラー回路 C_i をもつ。 C_i の辺をある辺より出発して、順次 2 色の red と blue によって交互に塗っていく。そこで H_i^{red} を red の辺によって誘導される H_i の部分グラフとする。つまり、

$$H_i^{\text{red}} := \langle \{e \in E(H_i) \mid c(e) : \text{red}\} \rangle$$

Case 1: $|E(H_i)| : \text{even}$

このとき、 H_i^{red} は 3-正則グラフとなるので、Theorem (I) より、 $\Xi(H_i^{\text{red}}) = 2$ 。

Case 2: $|E(H_i)| : \text{odd}$

この場合、 H_i^{red} を次のように指定することができる。

$$H_i^{\text{red}} := \begin{cases} \exists v \in V(H_i^{\text{red}}) \text{ s.t. } \deg_{H_i^{\text{red}}} v = 4 \\ \forall u \in V(H_i^{\text{red}}) \setminus \{v\}, \deg_{H_i^{\text{red}}} u = 3 \end{cases}$$

すると Proposition 2 より、 $\Xi(H_i^{\text{red}}) = 2$ 。 $H = \bigcup_{i=1}^{\ell} H_i^{\text{red}}$ とおくと、Case 1, 2 より $\Xi(H) = 2$ となることがわかる。一方、 $(H_i \setminus H) \oplus F$ なるグラフは、ある 5-正則グラフにうめ込むことができるので、Theorem (III) と Proposition 3 から、

$$\Xi((H_i \setminus H) \oplus F) = 3$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} \Xi(G) &= \Xi((G \setminus F) \oplus F) = \Xi\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} H_i \oplus F\right) \\ &= \Xi(H \oplus ((H_i \setminus H) \oplus F)) \end{aligned}$$

$$\leq \Xi(H) + \Xi((H \setminus H) \oplus F) = 5$$

$\Xi(G) \geq 5$ は, Proposition 1 より明らか. よって $\Xi(G) = 5$ $\square$

(References)

- [1] J. Akiyama, D. Avis and H. Era, On a $\{1, 2\}$ -factor of a graph. TRU Math. 16 (1980) 97-102.
- [2] J. Akiyama, Three Developing Topics in Graph Theory (1980).
- [3] M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Prindle. Weber & Schmitt (1979).
- [4] H. Enomoto, The linear arboricity of cubic graphs and 4-regular graphs. (Private).
- [5] H. Enomoto, The linear arboricity of 5-regular graphs, Univ. of Tokyo, Technical Report 81-19 (1981).
- [6] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
- [7] P. Horák, A short proof of the linear arboricity for cubic graphs. (Private).
- [8] C. Thomassen, A remark on factor theorems of Lovász and Tutte, J. Graph Theory 5 (1981)

441-442.

- [9] J. Akiyama, T. Hamada, A note on the arboricity of the complement of a tree, *TRU Math* 13(1977) 55-57.
- [10] J. Moon, On the line graph of the complete bigraph, *Ann. Math. Statist.* 34 (1963).
- [11] A. J. Hoffman, On the line graph of the complete bigraph, *Ann. Math. Statist.* 35 (1964).