

骨組みを持つ self-similar set について

京都大学理学部 亀山 敦

1.

ここでは self-similar set (sss) の位相的な性質について考察する。sss とは

定義 1 $(X, \{f_i\}_{i=1}^N)$ を完備距離空間とその上の縮小写像 (i.e. Lipschitz 定数 $\text{Lip}(f_i) < 1$) の組とする。すると、 X の空でない compact 部分集合 K が一意的に存在して、

$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cdots \cup f_N(K)$ となる。この K を $(X, \{f_i\})$ より定まる self-similar set (sss) という。

存在と一意性は [1], [2]。sss の位相的な性質について Williams の次のような結果がある。[3]

定理 $\sum_{i=1}^N \text{Lip}(f_i) < 1$ ならば K は位相次元 0。

その他、[2] にいくつかの結果がある。

また、 K は記号力学系の商空間として次のように表わされ

る[2]. $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ を N 個の記号の集合とする. $\Sigma = \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ を $\mathcal{S}$ による片側無限列の集合とし, shift map $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ とは $\sigma(x_1 x_2 \dots) = x_2 \dots$ となるものである. さらに各 $i \in \mathcal{S}$ に対し, $\hat{i}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ で, $\hat{i}(x_1 x_2 \dots) = i x_1 x_2 \dots$ という写像を表わす. 全射 $\pi: \Sigma \rightarrow K$ を $\pi(i_1 i_2 \dots) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(z)$ と定義する. ただし z は距離空間 X の点で, π は z によらず決まる. 次は可換,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\hat{i}} & \Sigma \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ K & \xrightarrow{f_i} & K \end{array}$$

π は 1-1 とは限らない. Σ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$ と定める. Σ のトポロジーとして離散位相の積位相を考えたとおくと, Σ の $\sim$ による商空間 $\Sigma/\sim$ は K と同相になる.

次に, sss を一般化したものとして次を考える.

定義 2 Σ 上の同値関係 $\sim$ で, $x \sim y$ ならば $\hat{i}x \sim \hat{i}y$ がすべての $x, y \in \Sigma$, $i \in \mathcal{S}$ に対し成り立つものを考える. このとき, 商空間 $\Sigma/\sim$ を self-similar symbolic space とよぶ. (SSSSS)

自然数 k に対し $W_k = \mathcal{S}^k$ は長さ k の有限列の集合である.

$W = \bigcup_{k \geq 0} W_k$. $w \in W$ を word という.

$\pi: \Sigma \rightarrow S = \Sigma/\sim$ を自然な射影とする。 $i \in \mathcal{I}$ に対し $i_\pi: S \rightarrow S$ は次が可換になるような写像である。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{i} & \Sigma \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{i_\pi} & S \end{array} \quad \text{for all } i \in \mathcal{I}$$

$w \in W$ に対し (w) を、 w で始まる Σ の記号列全体の集合とし、 $[w] = \pi((w))$ とおく。

定義3 S は ssss とする。 $C_0 = \{x \in S; \text{ どんな } i \in \mathcal{I} \text{ について } \pi(x) \notin (i)\}$, $C_1 = \{x \in S; \text{ どんな } y \in S \text{ について } \sigma(\pi'(x)) \neq \pi'(y)\}$ とおく。

$C = C_0 \cup C_1$ を S の connecting set とよぶ。

$A = \{\pi'(x); x \in C\}$ とおくとこれは Σ の部分集合の族で、各 $A \in \mathcal{A}$ は $\sim$ の同値類である。同値関係 $\sim$ は $\mathcal{A}$ により、次のように記述される。

命題1 $A \subset \Sigma$ は $\sim$ による同値類とする。すると A は、一点か、あるいは一意的に $\hat{A} \in \mathcal{A}$ と $w \in W$ が存在して $A = \{\hat{w}\pi; \pi \in \hat{A}\}$ 。ただし $\hat{w}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ とは $w = i_1 i_2 \dots i_k$ に対し $\hat{w} = \hat{i}_1 \circ \hat{i}_2 \circ \dots \circ \hat{i}_k$ 。

つまり $\mathcal{A}$ で ssss を表すことができる。この ssss を $S_{\mathcal{A}}$ と書くことがある。同じシンボル数を持つ ssss の間に順序を定め

ることができる。つまり $S_A < S_{A'}$ とは A が A' の組分であることである。このとき自然な射影 $S_A \rightarrow S_{A'}$ が存在する。

2.

sss は常に ssss だが、その逆は必ずしも正しくない。ssss は距離づけ不可能な場合もある。

定理1 S は sssis. S が距離づけ可能なことは次と同値である。 $\pi(C)$ に含まれる任意の収束点列 $\{x_n\}$ に対して、点列 $\{\pi(x_n)\}$ は $\pi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ - 点に収束する。

系 A が有限集合とする。(すなわち C も有限) このとき S_A が距離づけ可能なことは、すべての $A \in \mathcal{A}$ が閉集合であることと同値である。

$[w] \cap [w'] \neq \emptyset$ のとき $w \sim w'$ と書くことにする。

定理2 次の4つは同値。

(1) $i, j \in \mathcal{I}$ に対し、 $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathcal{I}$ を、 $i = i_1, j = i_k, i_l \sim i_{l+1}$ ($1 \leq l \leq k-1$) と選ぶことができる。

(2) S は連結

(3) S は弧状連結

(4) S の2点 x, y に対し $\mathbb{R}$ の同相 $p: [0, 1] \rightarrow S$ を $p(0) = x, p(1) = y$ となるようにとれる。

定理3 S は距離化可能とする。 $\#A = \#C$ が高々可算個であれば、 S の位相次元は 0 または 1 。

3.

この節では骨組みを持つ $ssss$ について調べる。骨組みは、 sss の generator のような役割をはたしている。

仮定 A S は次をみたす $ssss$ とする。(1) $i \in \mathcal{I}$ に対し、 $i_*: S \rightarrow S$ はすべて単射。(2) 異なる $i, j \in \mathcal{I}$ に対し $[i] \cap [j]$ は高々1点しか含まない。(3) $D = \bigcup_{k \in \mathcal{I}} \pi \sigma^k \pi^{-1}(C)$ とおくと、 $\#D < \infty$ 。(4) S は連結。(5) S は距離づけ可能。

注) この仮定をみたせば connecting set $C = \bigcup_{[i] \cap [j] \neq \emptyset} ([i] \cap [j])$ であり S の位相次元は 1 。

定理4 仮定 A の下に、 Σ の subshift Σ' (i.e. Σ' は compact で σ 不変 $\sigma(\Sigma') \subset \Sigma'$) があ、 $\pi(\Sigma') \subset C$ (すなわち $\pi(\Sigma') \subset D$) かつ $\pi(\Sigma') = \Sigma' / \sim$ は グラフ (1次元単体複体) と同相になる。

$F = \pi(\Sigma') = \Sigma' / \sim$ は次のような構造を持つ。

各 $i \in \mathcal{I}$ に対し $F_i = [i] \cap F$ とおく。 $F_i = \bigcup_{r=1}^p I_r^i$ とかける。ただし I_r^i は閉区間と同相か1点で、異なる I_r^i は交わらないかその端点で交わり、 π の同相写像 $\gamma_r^i: I_r^i \rightarrow F$ が

$\varphi_r^i \circ \pi | \pi(I_r^i) = \pi \circ \sigma | \pi(I_r^i)$ となり φ_r^i は I_r^i の端点を、また端点にうつすように定まる。つまり $\varphi_r^i(I_r^i) = I_{r_1}^{i_1} \cup \dots \cup I_{r_k}^{i_k}$ 。

定義3 この F を S の骨組みという。

F が subshift の商空間であるとか S の部分集合であるとかいうことを忘れても、上の F の構造だけから S に関する情報をすべてとりもどすことができる。実際、 $x \in F$ に対し $x = x_1 x_2 \dots$ を、 $x \in I_{r_1}^{i_1}$ なら $x_1 = i_1$, $\varphi_{r_1}^{i_1}(x) \in I_{r_2}^{i_2}$ なら $x_2 = i_2$, $\varphi_{r_2}^{i_2} \circ \varphi_{r_1}^{i_1}(x) \in I_{r_3}^{i_3}$ なら $x_3 = i_3, \dots$ と決めていくことができる。ただしこの対応は一意的でない。 $\Sigma' = \{x \in \Sigma; \text{ある } x \in F \text{ が } x \text{ に対応している}\}$, $A = \{A \subset \Sigma; \#A \geq 2, \text{ある } x \in F \text{ に対し } A \text{ は } x \text{ に対応するものの全体}\}$ とすれば、 S が F から構成されたことになる。よって S を S_F とかくこともある。

$(X, \{f_i\})$ により定まる sss K が骨組み F を持ったとすると、 F は K の generator と考えることができる。つまり、 K は F に F の $\pi = \text{チュア}$ をどんどんつけ足してい、たものの閉包になっている。 $K_0 = F$, $K_{l+1} = \bigcup_{i=1}^N f_i(K_l)$ とすると $K = \alpha(\bigcup_{l=0}^\infty K_l)$ 。 $\{K_l\}$ は増加列になっている。 $\{\varphi_r^i: I_r^i \rightarrow F\}$ の情報は、 F の $\pi = \text{チュア}$ を F のどこにくっつけるかということを示している。つまり、 F の I_r^i の部分と F の $\pi = \text{チュア}$ の $\varphi_r^i(I_r^i)$ の部分をくっつけるのである。 K が骨組みを持たなかったり

$\Sigma'/\sim$ が骨組みのような構造を持つ subshift Σ' が存在しなかったりした場合、同じような方法で K を generate することはできるが、くっつけ方が複雑になる。

次に、sss の縮小写像 ϕ の Lipschitz 定数と骨組みの関係について考える。 F から有向グラフ $G_F = (V, E)$ を次のようにつくる。 $V = \{I_r^i; I_r^i \text{ は一点ではない}\}$, $E = \{(I_r^i, I_r^{i'}) \in V \times V; \varphi_r^i(I_r^{i'}) \supset I_r^i\}$ 。 $\alpha, \omega: E \rightarrow V$ を、 $\alpha(I_r^i, I_r^{i'}) = I_r^i$, $\omega(I_r^i, I_r^{i'}) = I_r^{i'}$ とする。 $M = \#V$ とし、 $V = \{x_m\}_{m=1}^M$ とおく。 $A = A(X_1, X_2, \dots, X_N) = (a_{mn})$ を $M \times M$ 行列で、

$$a_{mn} = \begin{cases} X_i & x_m = I_r^i, \varphi_r^i(x_m) \supset x_n \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする。 ここで $X_1, X_2, \dots, X_N$ は変数。

定義4 $G = (V, E)$ は有向グラフとする。 $x, y \in V$ に対し x から y への有向道があるとは、 $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\ell} = y$ となる V の元と、 E の元 $a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}$ が $\alpha(a_\ell) = x_\ell$, $\omega(a_\ell) = x_{\ell+1}$ ($1 \leq \ell \leq \ell-1$) となるようにとれることである。

また、 $x \in V$ の推移成分 $(V', E') \subset (V, E)$ とは $V' = \{y \in V; x \text{ から } y \text{ への有向道があり } y \text{ から } x \text{ への有向道がある}\}$, $E' = \{a \in E; \alpha(a), \omega(a) \in V'\}$ である。

G は推移成分 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_k = (V_k, E_k)$ にわかれ、 G_ℓ 間に順序を $x \in V_m$ から $y \in V_n$ への有向道があ

るとき $G_m < G_n$ と定義できる。

G_F を推移成分 $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$ に分けたとき、
 $G_1, \dots, G_k$ を極大成分とする。 $M_k = \#V_k$ とし、 $V_k = \{x_m^k\}_{m=1}^{M_k}$
 とする。 $A_k = (a_{mn}^k)$ を $M_k \times M_k$ 行列

$$a_{mn}^k = \begin{cases} x_i & x_m^k = I_r^i, \varphi_r^i(I_r^i) \supset x_n^k \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする。すると

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & 0 \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_k \end{pmatrix}$$

$P_k = \det(E - A_k)$ とおく。 (E は単位行列) P_k は N 変数多項式。 $P_k(t, t, \dots, t) = 0$ の正の最小根を t_k とする。 G_k を力学系と考えるとその位相的エントロピーは $-\log t_k$ である。

さて、 x_m の立端点と立端点の距離を d_m とする。すると $\varphi_r^i(x_m)$ の立端点と立端点の距離は $d_{n_1} + d_{n_2} + \dots + d_{n_j}$ 以下である。ただし $x_m = I_r^i$, $\varphi_r^i(x_m) = x_{n_1} \cup x_{n_2} \cup \dots \cup x_{n_j}$ とする。 $x_m = f_i(\varphi_r^i(x_m))$ なのを $\beta_i = \text{Lip}(f_i)$ とおけば $d_m < \beta_i(d_{n_1} + d_{n_2} + \dots + d_{n_j})$ 。ゆえに $(E - A(\beta_1, \dots, \beta_N)) \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} \leq 0$ 。

定理5 骨組み(とその構造) Γ と正数 $\beta_1, \dots, \beta_N$ が与えられたとする。 t の方程式 $P_k(\beta_1 t, \dots, \beta_N t) = 0$ の正の最小根

が、ある $1 \leq l \leq q$ について 1 より大きか、たししよう。すると、 $\text{Lip}(f_i) = \beta_i$ である $(X, \{f_i\}_{i=1}^n)$ より定まる sss K は骨組みとして F を持たない。さらに、もし 1 節の最後における意味で $S_F \subset K$ であれば、自然な射影 $S_F \rightarrow K$ は $x_m^l \in U_l$ の 2 つの端点と同じ点にうつす。

証明 $P_l(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$ の正の最小根が 1 より大きいということは $A_l(\beta_1, \dots, \beta_n)$ の最大固有値が 1 より小さいということである。非負行列の理論より、非負ベクトル x が $(E - A_l(\beta_1, \dots, \beta_n))x \leq 0$ をみたすのは $x = 0$ のときに限る。定理の前の考察とあわせて、結果を得る。□

各 f_i が相似変換のときを考えてみよう。

定義 5 距離空間の写像 $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ が相似変換であるとは定数 $C > 0$ があって、任意の $x, y \in X$ に対し、 $d'(fx, fy) = C \cdot d(x, y)$ となることである。

曲線 $p: [0, 1] \rightarrow X$ が線分であるとは $x < y < z \in [0, 1]$ に対し、 $d(p(x), p(z)) = d(p(x), p(y)) + d(p(y), p(z))$ となることである。相似変換は線分を線分にうつす。

定理 6 K は $(X, \{f_i\}_{i=1}^n)$ によって定まる sss とする。ただし各 f_i は相似変換で、Lipschitz 定数 $\text{Lip}(f_i) = \beta_i$ とする。

K は骨組み F を持つとする。このとき、もし U_l の元がひとつ

でも線分であれば V_L の他の元も線分であり、 $G_L < G_{L'}$ となる V_L の元もすべて線分である。

すべし $x \in V$ が線分なら、 $(E - A(\beta_1, \dots, \beta_N)) \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = 0$ であり、逆も正しい。 G_L を極大成分とする。 V_L の元が線分であることは、方程式 $P_L(\beta_1, \dots, \beta_N) = 0$ の正の最小根が 1 であることと同値である。

証明 前半は明らか。

$(E - A(\beta_1, \dots, \beta_N)) \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = 0$ なら $x_m \in V$ は線分であることを示す。それには x_m の稠密な部分集合 Q が $a < b < c \in Q$ なら、 $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ となるものの存在をいえばよい。ただし " $<$ " は x_m 上の自然な線型順序である。 $x_m = L_1^n \cup L_2^n \cup \dots \cup L_{r_n}^n$ と表わされる。ただし L_i^n はある $x \in V$ とある $w \in W_n$ に対して $f_w(x)$ である。 f_w とは $w = i_1 i_2 \dots i_k$ に対し $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}$ である。 d_i^n が L_i^n の 2 端点の距離を表す。仮定より $d_m = d_1^n + d_2^n + \dots + d_{r_n}^n$ 。 Q_n を L_i^n 達の端点全体の集合とする。 $Q = \bigcup_{n \geq 1} Q_n$ とすればこれが求めるものである。のこりは簡単に示すことができる。□

以上 2 つの定理は、たとえ K が骨組みを持たなくても、 $\pi(\Sigma)$ が骨組と同じような構造を持つ subshift Σ' があれば、示される。ただし、その場合、その構造から、再び K の位相的性質 (ssss とし 2 の性質) が復元されるとは限らない。

参考文献

- [1] J.E. Hutchinson, Fractal and self-similarity.
Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713-747
- [2] M. Hata, On the structure of self-similar sets.
Japan J. Math., 2 (1985), 381-414
- [3] R.F. Williams, Composition of contraction. Bol.
Soc. Brasil. Mat., 2 (1971), 55-59
- [4] G. de Rham, Sur quelques courbes définies par
des équations fonctionnelles. Rend. Sem. Mat. Torino,
16 (1957), 101-113
- [5] N. Bourbaki, Topologie générale, Éléments de
mathématique, Hermann
- [6] 亀山 敦, 修士論文 (1989)