

新しいユニバーサリティー・クラスの SAND PILE モデル

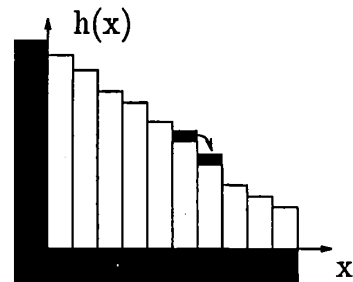
東工大 理 小野 豊郎・清水 雄一郎

1 はじめに

自己組織化臨界現象 (Self-Organized-Criticality 略して SOC) とは, 1987 年, Bak, Tang and Wiesenfeld [1] により発案された言葉である. 相転移点などに現れる通常の臨界状態は, 温度や磁場などの外部パラメーターが特別の値をとるようにコントロールする必要がある. これに対し SOC は動的に形成される臨界状態で, 注目している系を励起する外部パラメーターを正確にコントロールしなくても, 十分時間が経てば, 系が自ら臨界状態に達する.

Bak 等は, その具体的例として, SAND PILE モデルを提案した. 砂の表面を平らにしたまま, しだいに傾けると, その勾配 θ が小さいときは砂山は安定している. その勾配が臨界角 θ_c を越えると砂が流れ始める. また, 始めの勾配がかなり大きいときも, 砂が流れ, 自然に θ_c の角度に近づいていく. この極限の状態が臨界状態である.

Bak がこれをモデル化して, 1 次元の砂山を階段状したものを第 1 図に示す. 位置 x での高さを $h(x)$ とすると, 段差 $z(x) = h(x) - h(x+1)$ で表されている. 段差 z が臨界値 z_c を越えたときその段が崩れ, その段差は 2 減少するが, その前後の段差は 1 だけ増加すると仮定した. 砂の勾配をすべて z_c より大きくとった状態より出発して, 崩れる過程を繰



第 1 図 1 次元 SAND PILE モデル

り返すと, やがて落ち着く. このモデルでは各段とも z_c になっているので, もし, どこかの点に少量の砂を落とせば, 砂崩れが全体に広がることになる.

2 次元の系では砂が崩れる条件として, ある点の勾配 $z(x, y)$ が z_c を越えたとき

$$\left. \begin{aligned} z(x, y) &\rightarrow z(x, y) - 4 \\ z(x \pm 1, y) &\rightarrow z(x \pm 1, y) + 1 \\ z(x, y \pm 1) &\rightarrow z(x, y \pm 1) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

のように変化すると仮定した. 1 次元のときと同じ様にして十分勾配の大きいときから出発して (1) 式にしたがって変化させることによって, 臨界状態が得られる. このときは, 段差がすべて z_c になっているわけではない. 私たちのシミュレーションによると, 約 43% が z_c である. 小さい摂動によって, 崩れる砂崩れの大きさ s の分布は s のべき乗則となることが, 見出されている [1]. 砂崩れの継続時間の分布もやはりべき乗則に従うことがわかった.

2 現実の SAND PILE モデル

Bak 等の SAND PILE モデルは簡単で取り扱いやすく, 多次元への拡張も簡単である. しかし, 現実の砂山では, 砂の量が保存しているが, Bak のモデルでは, 崩れるとき, 段差の和は保存するが, 砂の量は保存するとは限らない. また, Bak のモデルでは, 2 次元でも勾配はスカラーと仮定しているが, 現実の砂山では勾配はベクトル量である. 以下に述べる私達のモデルでは, これらの点が現実の砂山に近い. 私たちのモデルでは, x および y 方向の段差をそれぞれ z_x, z_y とすれば,

$$\left. \begin{aligned} z_x(x, y) &= h(x, y) - h(x+1, y) \\ z_y(x, y) &= h(x, y) - h(x, y+1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

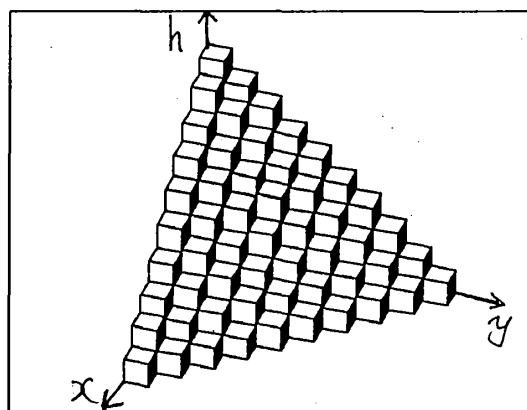
となる. 例えば, 段差が x の方向で臨界段差 z_c を越えた位置では, x 方向へ砂崩れを起こす. このとき, 崩れた砂の量は保存するので,

$$\left. \begin{aligned} h(x, y) &\rightarrow h(x, y) - 2 \\ h(x+1, y) &\rightarrow h(x+1, y) + 2 \\ &\text{for } z_x(x, y) > z_c \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

したがって段差の変化は Bak のモデルのように最近接の 4 箇所ではなく, 7 つの近傍の勾配が変化する.

$$\left. \begin{aligned} z_x(x, y) &\rightarrow z_x(x, y) - 4 \\ z_x(x \pm 1, y) &\rightarrow z_x(x \pm 1, y) + 2 \\ z_y(x, y) &\rightarrow z_y(x, y) - 2 \\ z_y(x, y-1) &\rightarrow z_y(x, y-1) + 2 \\ z_y(x+1, y) &\rightarrow z_y(x+1, y) + 2 \\ z_y(x+1, y-1) &\rightarrow z_y(x+1, y-1) - 2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

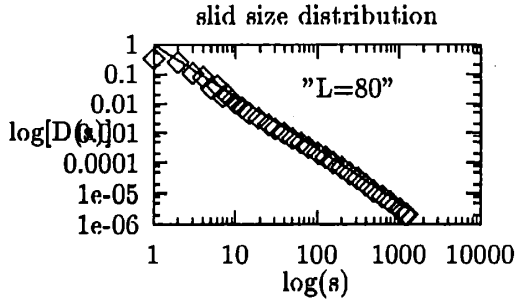
また, y 方向の段差が臨界段差を越えたときも, 同様の变化が起こるとした. このような新しいモデルを, 第 2 図に示す. 原点での高さがもっとも高くなるようにし, $x+y=L$ の線を open boundary として, ここから砂は外部へ流れ出ることとした. シミュレーションでは, 正方格子の 1 辺のサイズ L として $L = 40, 80, 100, 150$ を用いた.



第 2 図 現実的な 2 次元 SAND PILE モデル

まず臨界状態を作り, ランダムに選んだ格子点に, 少量の砂を落としたときに生じる砂崩れの大きさ s を数え上げ, その分布 $D(s)$ を求めた. これを第 3 図に示す.

臨界状態での砂崩れの大きさ s の分布を示す。サンプルデータ数は 1200264 である。

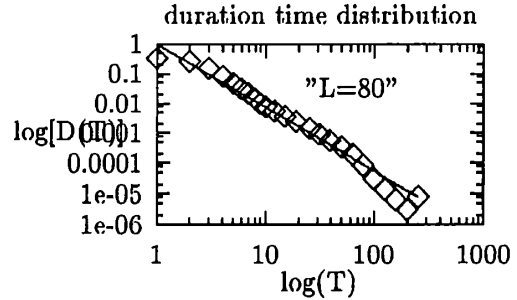


第3図 砂崩れの大きさの分布

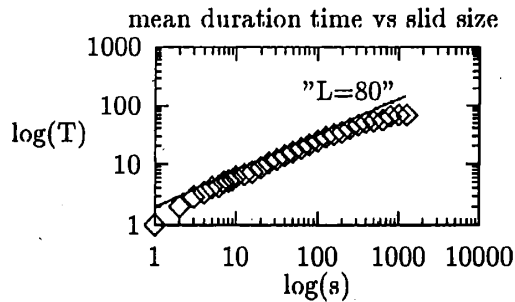
この図からわかるように分布はべき分布となる。 $D(s) \sim s^{-\tau}$ とすると、 $\tau = 1.76$ となった。

砂崩れの継続時間分布を第4図に示す。 $D(T) \sim T^{-y}$ とおけば、 $y = 2.13$ となるが、 $T \cong 60$ で傾きのクロスオーバーがある。仮に頂上から順に下に崩れたとしても、 $T = L = 80$ であるから、 $T \sim 60$ 以上はサイズ効果であることが推定される。

第5図は1つの砂崩れの大きさが s であるときの、継続時間の平均値の分布である。大きさ s に対しては $\bar{T}(s) \sim s^x$ とおくと、 $x = 0.604$ が得られる。砂崩れの伝播する速さが一定であり、1つの砂崩れの形は2次元的であるとすれば、 $s \sim T^2$ となり、 $x = 1/2$ となる。



第4図 砂崩れの継続時間分布



第5図 砂崩れ s に対する継続時間の平均値

臨界指数は次のようなスケーリング関係式を満たす。 $D(s)ds = D(s)\frac{ds}{dT}dT$ であるから、 $D(T) = D(s)\frac{ds}{dT}$, $\bar{T} = s^x$ 用いて、 $D(T) \sim s^{-\tau+1-x} \sim T^{(1-x-\tau)/x}$, T の分布を T^{-y} であるから、

$$\tau - 1 = x(y - 1) \quad (5)$$

の関係が得られる。私達の結果は $(\tau - 1)/x(y - 1) = 1.11$ で (5) の関係がほぼ満たされている。指数をまとめて第1表に示す。

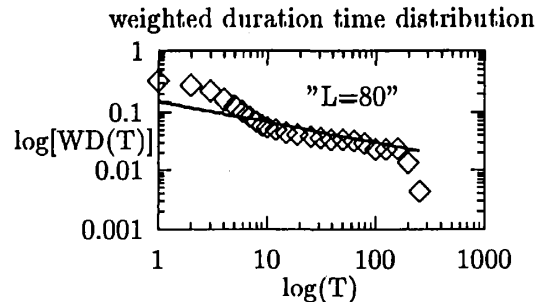
	τ	y	x
present	1.76	2.13	0.604
Bak	1.22[2]	1.38[2]	0.650[3]

第1表 臨界指数 τ, y, x

2つのモデルで指数の値がかなり違っており、私達のモデルは Bak のモデルとは別のユニバーサリティをもつと思われる。

3 $1/f$ ノイズ

この臨界状態のノイズが $1/f$ 状態であるかどうかを調べるため、重みつき緩和時間分布 $WD(T) = \frac{1}{T^2} \sum_s s^2 D(T, s)$ を求めた。ここで $D(T, s)$ は継続時間が T で、その大きさが s である砂崩れの数である。もし、 $WD(T) \sim T^{-\alpha}$ のようにふるまうとすれば、このパワースペクトルは $S(f) \sim f^{-\phi} \sim f^{\alpha-3}$ で、指数 $\phi = 3 - \alpha$ となる。第6図で示したシミュレーションによれば、 $WD(T)$ の $T = 10 \sim 70$ までの間はべき的であり、 $\alpha = 0.352$ であった。したがって、 $\phi = 2.65$ となり、いわゆる、 $0 < \phi < 2$ の $1/f$ 型ではなかった。



第6図 重みつき継続時間分布

4 おわりに

ϕ の値は砂崩れのときに減衰があると変わることが知られている。Christeinsen-Bak-Olami[4] の地震の B-K モデルでのシミュレーションでは、減衰を考慮に入れることにより、 ϕ の値は 1.8 から 0.5 迄変化することが知られている。また入力ノイズが大きくなると砂崩れの間の干渉効果によっても変化することが、Hwa-Kardar[5] によるシミュレーションで確かめられている。私達のモデルでもこの傾向があることが確かめられた。

SOC はまさつやピン止めの効果のため、準安定の状態が多数あり、外場に対しヒステリシスのある系を理解するために役に立つと思われる。今後の研究の発展が期待される。

参考文献

- 1 P.Bak, C.Tang and K.Wiesenfeld : Phys.Rev.Lett. **59** (1987) 381; Phys.Rev. **A38** (1988) 364
- 2 S.Manna : J.Stat.Phys. **59** (1990) 509.
- 3 J.Kertesz and L.B.Kiss : J.Phys. **A23** (1990) 1433.
- 4 K.Christeinsen, Z.Olami and P.Bak : Phys.Rev.Lett. **68** (1992) 2417
- 5 T.Hwa and M.Kadar : Phys.Rev. **A45** 7002 (1992)