

回転する自走粒子の集団運動

北陸先端大学院大学・マテリアルサイエンス研究科 永井 健

Ken H. Nagai

School of Materials Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology

概要

群れ運動するイワシのように、アクティブマターの集団運動中にしばしば回転運動が起こる。ガラス基盤上のマイコプラズマのように単体でも回転運動を起こす生物が知られている。このような回転するアクティブマターの集団運動に対し、我々は Vicsek モデルを元にした多粒子モデル及びその粗視化連続場モデルを用いた解析を行った。その結果、運動方向を揃える短距離相互作用と回転運動により起こりうる集団運動とその形成メカニズムを明らかにした [1]。また、ガラス基盤上に固定されたダイニンモーターに駆動される微小管をモデル実験系とし、数理モデルで見られる集団運動が現実にも起こることを明らかにした [2]。

1 はじめに

クラミドモナスやゾウリムシなどの微生物は鞭毛のむちうち運動や繊毛のメタクロナルウェーブを使って低レイノルズ数環境下で遊泳する [3]。無生物でも化学反応やレーザーの照射によって暖められる 2 種類の面を持つコロイドなど自発遊泳する系が報告されている [4, 5, 6]。このような外力無しの条件下で起こる多くの自発運動の中に共通の特徴が見られることが明らかとなってきた。例えば低レイノルズ数環境下では慣性が効かないため、生物、無生物によらず Taylor のほたて貝定理によって遊泳が制約される [7]。またストークス方程式の多重極展開を考えると、遊泳する物体の遠方ではフォースダイポールによる流れ場が支配的となるため、低レイノルズ数下で遊泳する物体は全てプッシャーかブローカニュートラルスイマーに分類される [8]。このような系によらない性質を抜き出すことで外力によらない自発運動を一種の物理現象として捉えることができると考えられており、近年自発運動を示す全ての系に対し「アクティブマター」という共通の単語が用いられる [9]。

個々の物体の運動だけでなく、鳥や魚の群れなど、多数のアクティブマターが集まったときの集団運動中にも系によらない普遍的な性質があると考えられている [10]。Vicsek 等は秩序だった群れの相が生じるときに平衡状態の相転移のように普遍則があると考え、運動方向に対する短距離の相互作用を持つアクティブマターに対する系の対称性だけを考慮した数理モデルを構築した [11]。この時に用いられた Vicsek モデルのさらなる研究により、運動方向に対する短距離相互作用のみで二次元系で秩序だった群れへ相転移すること、生じる群れの相は個々の粒子の対称性によって決まること、生じた群れの中には対称性によって決まる異常な密度ゆらぎが存在することなどが明らかとなった [12, 13, 14]。更に、加振した粉体粒子 [15, 16] や分子モーターに駆動されるタンパク質 [17, 2, 18] を用い、数理モデルで見られた性質が実験的に実現された。そのため現実にも起こるアクティブマターの集団運動においても、対称性だけで決まる系によらない普遍則が存在すると期待されている。

Vicsek モデルを含めこれまでの短距離相互作用による群れ運動の研究において主にホワイトノイズが運動方向に加えられてきた。ここで鳥や魚などの長さスケールが大きく慣性が効く物体を考えると、回転速度に必ず履歴が残るため運動方向にホワイトノイズが加わる数理モデルでは正しくダイナミクスを記述できない [19, 20]。またマイコプラズマのガラス面上の滑走のように慣性が効かないにもかかわらず回転速度が維持される系が存在する [21]。これらの運動ではたとえ回転方向にランダムなダイナミクスがあったとしても、ノイズの相関時間を考慮しなければならない。そこで我々は回転速度がしばらく維持されるアクティブマターの集団運動を数理モデルを用いて解析した。またダイニンに駆動されてガラス板上を運動する微小管

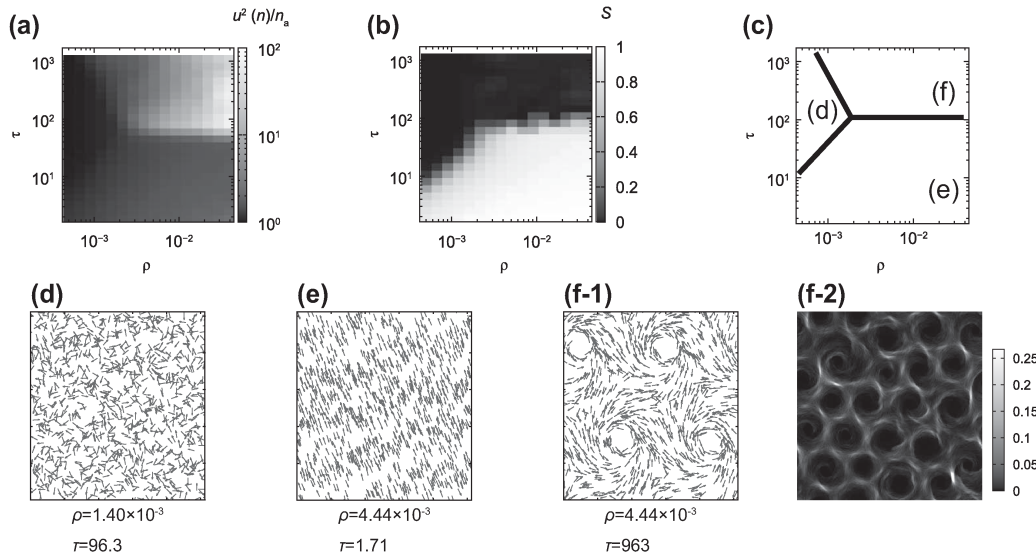


図 1: 多粒子モデルの相図 [2]. (a) 密度の不均一性 ($u^2(n)/n_a$) と (b) ネマチックオーダーパラメータ (S) を用いて集団運動の相図を描いた. (c) に見られるように相図には 3 領域が存在する. それぞれの領域で (d), (e), (f) に示す集団運動が生じる. (d), (e), (f-1) 中で領域は 3.84×3.84 で矢印は各場所の粒子の運動方向を表す. (f-2) の領域は 7.68×7.68 で明るさは粒子密度を表す. ρ が小さい時は (d) のように運動方向はランダムで様に粒子が分布する. ρ が大きく τ が大きい時は (e) のように一様なネマチック相が生じる. ρ が大きく τ が大きい時は (f) のように渦状の六角格子が生じる.

を用いて数理モデルで得られた結果が現実の系でも生じることを示した. このように数理モデルの解析と実験により, 回転速度の相関時間が集団運動の重要なパラメータとなっていることを明らかにしたので本論文にその概要を紹介する.

2 多粒子モデル

回転速度の相関時間に対する集団運動の依存性を調べるために, 次の Vicsek モデル [11] を元にした短距離ネマチック相互作用をする多粒子モデルを解析した.

$$\dot{\mathbf{x}}_i = v_0 (\cos \theta_i, \sin \theta_i) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \alpha \frac{\sum_{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < l} \sin 2(\theta_j - \theta_i)}{\sum_{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < l} 1} \quad (2)$$

ここで ω_i は下式の相関時間 τ の Ornstein-Uhlenbeck ノイズである.

$$\dot{\omega}_i = -\frac{\omega_i - \omega_0}{\tau} + \sqrt{D} \xi_i(t) \quad (3)$$

$\xi_i(t)$ は $\langle \xi_i(t) \xi_j(s) \rangle = \delta_{ij} \delta(t-s)$ を満たすホワイトガウシアンノイズとする. パラメータとして $v_0 = 8.75$, $\omega_0 = -0.00624$, $l = 15.0$, $\alpha = 0.0583$ を用いた. また $\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle = \sigma^2 \tau / 2 = 2.48 \times 10^{-4}$ とした. 今回は τ と粒子の平均密度 ρ を変数として集団運動の相図を描いた.

集団運動を分類するためにネマチックオーダーパラメータの $S = |\sum_i \exp(2i\theta_i) / \sum_i 1|$ と局所的な密度のばらつきを表す $u^2(n)/n_a$ の 2 つのオーダーパラメータを用いた. ここで $u^2(n)$ は 60.0×60.0 の領域の密度の分散であり, n_a は同じ広さの領域の平均粒子数である. それぞれのオーダーパラメータを ρ - τ 平面に描く

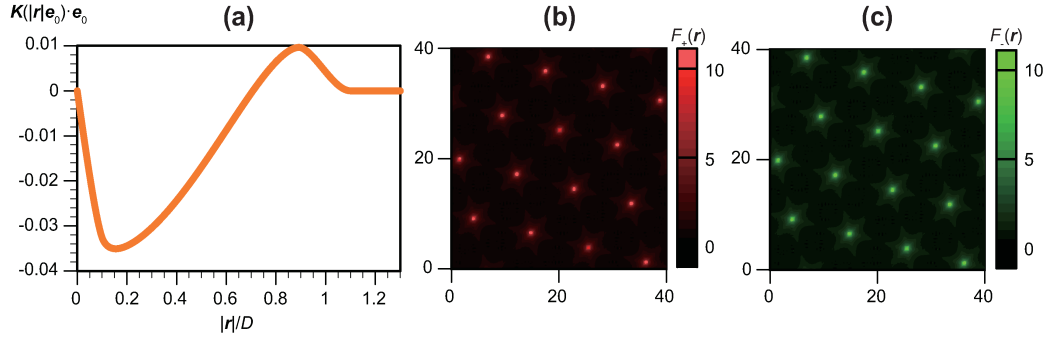


図 2: 六角格子形成に対する連続場記述. 図中のパラメータは $l = 1$, $D = 10$, $\alpha = 0.05$, $\rho_0 = 2$, $\tau = 8.5$. (a) 軌道の中心にかかる実効的な力 ($K(|r|e_0) \cdot e_0$). (b) と (c) はそれぞれ定常条第における $F_+(r)$ と $F_-(r)$. 境界条件として周期境界条件を用いた.

と図 1(a), (b) のようになる. ここから図 1(c) のように大きく 3 つの領域が存在することがわかる. (d) の領域では 2 つのオーダーパラメータが小さく, 図 1(d) に示すようにランダムな集団運動が見られる. (e) の領域では S のみが大きく, グローバルなネマチックオーダーが見られる. (f) の領域では S が小さく, $u^2(n)/n_a$ が大きい. 生じる集団運動は図 1(f) に示すように渦上の構造の六角格子模様である. これらの結果から回転速度の相関時間が長くなると短距離のネマチック相互作用によってアクティブマターの渦の六角格子ができることが明らかになった.

3 六角格子模様形成のメカニズム

渦の六角格子の形成メカニズムを解明するために式 (1)-(2) に対応する連続場記述を導出した. そのために ω_i を OU ノイズから平均切り替わり時間 τ のポアソン過程で $\pm\Omega$ の 2 値を切り替えるランダム電信ノイズへと簡便化した. OU ノイズからランダム電信ノイズに変えても多粒子モデルの相関は定性的に一致する [1].

ω_i がランダム電信ノイズであるため, 孤立した粒子は常に半径 v_0/Ω の時計回りか反時計回りをする. そこで x_i の代わりに下式で表される円軌道の中心の r_i を変数として用いる.

$$r_i = x_i - \frac{v_0 e_{\theta_i - \frac{\pi}{2}}}{\omega_i} \quad (4)$$

ここで e_θ は θ 方向の単位ベクトルを表す. 両辺を t で微分すると

$$\dot{r}_i = \frac{2v_0}{\omega_i} e_{\theta_i - \frac{\pi}{2}} \delta(t - t_s) - \frac{\alpha v_0}{\omega_i} e_{\theta_i} \frac{\sum_{|x_j - x_i| < l} \sin 2(\theta_j - \theta_i)}{\sum_{|x_i - x_j| < l}}, \quad (5)$$

今 $\sum_{|x_i - x_j| < l} 1 = 1$ と仮定する. $f_\pm(r, \theta)$ をそれぞれ ω が正と負の粒子の数密度とすると, 式 (5) の連続場記述は $D = \frac{2v_0}{\Omega}$ として

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\pm(r, \theta)}{\partial t} = & \pm \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial r} \cdot e_\theta f_\pm(r, \theta) U_\pm - \frac{\partial}{\partial \theta} f_\pm(r, \theta) (\pm\Omega + U_\pm) \\ & + \frac{1}{\tau} \{f_\mp(r \mp D e_{\theta - \frac{\pi}{2}}, \theta) - f_\pm(r, \theta)\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$U_\pm = \alpha \int d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \{ \chi(x_{\xi, \phi}^1, x_{r, \theta}^{\pm 1}) f_+(\xi, \phi) + \chi(x_{\xi, \phi}^{-1}, x_{r, \theta}^{\pm 1}) f_-(\xi, \phi) \} \sin(\phi - \theta) \quad (7)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{x}_{r,\theta}^e = \mathbf{r} + \frac{\epsilon v_0}{\Omega} \mathbf{e}_{\theta_i - \frac{\pi}{2}} \quad (8)$$

$$\chi(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| < l \\ 0, & |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \geq l \end{cases}, \quad (9)$$

とする。

六角格子ができる時は τ が大きい。そこで θ について分布が一様であると仮定し、式 (6) の両辺を粒子が一回転する時間で平均する。その結果 $F_{\pm}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} d\theta f_{\pm}(\mathbf{r}\theta)$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\pm}}{\partial t} = & -D\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot F_{\pm}(\mathbf{r}) \int d\xi K(\mathbf{r} - \xi) \{F_+(\xi) + F_-(\xi)\} \\ & + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta F_{\mp}(\mathbf{r} + D\mathbf{e}_{\theta}) - F_{\pm}(\mathbf{r}) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$K(\mathbf{r}) = - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \chi(\mathbf{x}_{0,\phi}^1, \mathbf{x}_{r,\theta}^1) \sin(2(\phi - \theta)) \frac{\mathbf{e}_{\theta}}{4\pi} \quad (11)$$

が得られる。ここで 2 粒子間にかかる実効的な力 $\mathbf{K}(|\mathbf{r}| \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0$ は図 2(a) に示すように $|\mathbf{r}|$ が小さい時は引力、 $|\mathbf{r}|$ が大きい時は斥力となる。式 (10) の線形安定性解析をすると、 $F_+(\mathbf{r}) + F_-(\mathbf{r})$ の平均を ρ_0 として $\rho_0\tau$ が臨界値よりも大きくなると一様状態が不安定になることがわかる。実際、図 2(b), (c) に示すように、 τ を大きくしていくと微小振幅のランダム状態を初期条件とした時の定常状態は一様相から渦の六角格子に転移する。多粒子モデルの相図においても六角格子への転移点は $\rho_0\tau = \text{一定}$ である [1]。そのため渦の六角格子は図 2(a) の実効的な相互作用によって誘起されると結論付けることができる。

4 軸索ダイニンと微小管の運動アッセイ

現実存在する系で回転速度の相関時間によって引き起こされる集団運動の性質を明らかにするため、微小管と軸索ダイニンを用いた運動アッセイを行った。運動アッセイにおいてダイニンはガラス基盤上に微小管はダイニンにそれぞれ吸着しており、ATP 存在下で微小管はダイニンに駆動されてガラス基盤上を運動する。2 本の微小管は衝突時に平行か反平行に並ぶ。つまり微小管には短距離のネマチック相互作用が働く。また [2] の解析で孤立した微小管の運動方向変化率が長時間維持されることがわかっている。つまり微小管の多粒子運動は式 (1), (2) に記述される状況と一致する。この実験系で微小管濃度が薄い時、微小管の運動はランダムで特定のパターンは生じない (3(c))。微小管の密度を高くしていくと、微小管は図 3(a) のように渦状に並び、その渦が図 3(b) に示すように格子状に並ぶ。実験に対応するパラメータを用いると、2 の数理モデルの粒子は六角格子模様を形作る。そのため数理モデルで見られた密度増加による六角格子模様への転移が現実の実験系でも生じていることが明らかとなった。

5 結論

式 (1), (2) で表される対称性のみを考慮した多粒子モデルを用いて回転速度が長時間の相関時間を持つ時、短距離のネマチック相互作用によってアクティブマターの渦状構造が六角格子模様を描くことを発見した。相関時間が長い時の多粒子モデルに対応する連続場記述を得、粒子間距離が小さい時は引力、大きい時は斥力となる実効的な相互作用のために六角格子模様が生じることを明らかにした。更に、軸索ダイニンと微小管を用いた運動アッセイを用いて六角格子模様が実験系で生じることを明らかにした。これらの結果により回転速度の相関時間が現実生じるアクティブマターの集団運動において重要なパラメータとなっていることが明らかになった。

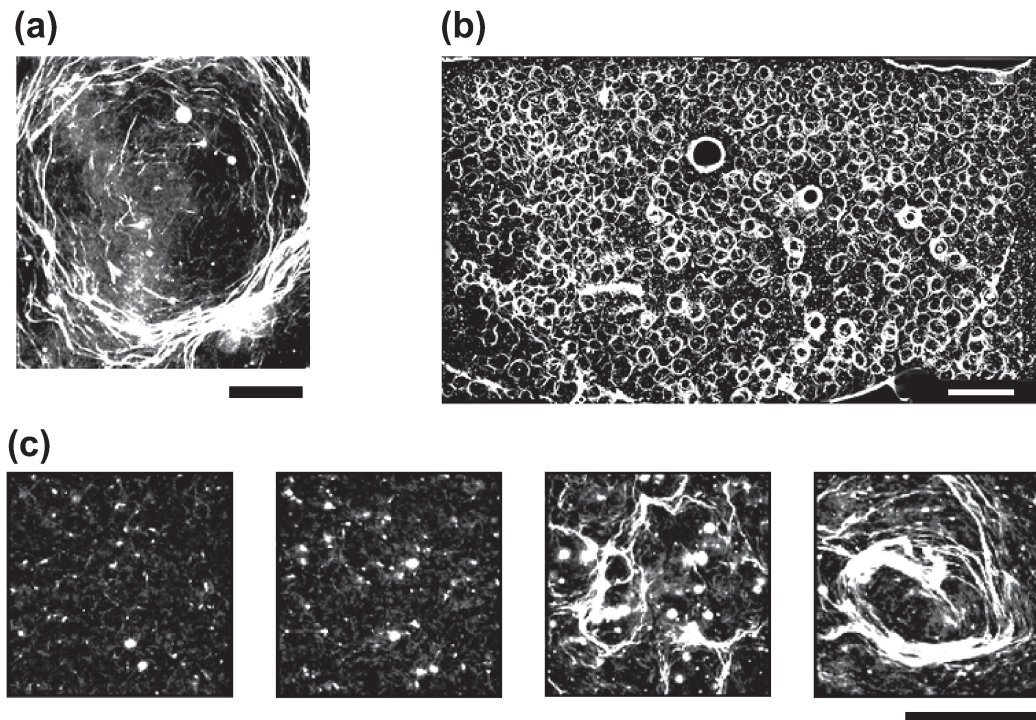


図 3: ダイニンに駆動された微小管の集団運動 [2]. (a) 微小管集団の渦構造. 明るさが微小管密度に対応する. スケールバーは 100 μm . (b) 渦の格子模様. スケールバーは 2 m. (c) 集団運動の微小管濃度依存性. 左から 14.3 $\mu\text{g/ml}$, 28.6 $\mu\text{g/ml}$, 57.2 $\mu\text{g/ml}$, 114.5 $\mu\text{g/ml}$. スケールバーは 500 μm .

参考文献

- [1] Nagai, K.-H., Sumino, Y., Montagne, R., Aranson, I.-S., and Chaté, H., Collective motion with memory, submitted.
- [2] Sumino, Y., Nagai, K.-H., Shitaka, Tanaka, D., Yoshikawa, K., Chaté, H., and Oiwa, K., Large-scale vortex lattice emerging from collectively moving microtubules, *Nature*, **483** (2012), 448-452.
- [3] Lauga, E., and Powers, T. R., The hydrodynamics of swimming microorganisms, *Rep. Prog. Phys.*, **72** (2009), 096601.
- [4] Nagai, K., Sumino, Y., Kitahata, H., and Yoshikawa, K., Mode selection in the spontaneous motion of an alcohol droplet, *Phys. Rev. E*, **71** (2005), 065301(R).
- [5] Gangwal, S., Cayre, O. J., Bazant, M. Z., and Velez, O. D., Induced-Charge Electrophoresis of Metallo-dielectric Particles, *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008), 058302.
- [6] Jiang, H.-R., Yoshinaga, N., and Sano, M., Active Motion of a Janus Particle by Self-Thermophoresis in a Defocused Laser Beam, *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010), 268302.
- [7] Taylor, G. I., Analysis of the swimming of microscopic organisms, *Proc. R. Soc. A*, **209** (1951), 447-461.
- [8] Ishikawa, T., and Pedley, T. J., Dispersion of model microorganisms swimming in a nonuniform suspension, *Phys. Rev. E*, **90** (2014), 033008.

- [9] Ramaswamy, S., The Mechanics and Statistics of Active Matter, *Ann. Rev. Condens. Matt. Phys.*, **1** (2010), 323-345.
- [10] Vicsek, T., and Zafeiris, A., Collective motion, *Phys. Rep.*, **517** (2012), 71-140.
- [11] Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I., and Shochet, O., Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 1226-1229.
- [12] Toner, J., and Tu, Y., Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking, *Phys. Rev. E*, **58** (1998), 4828-4858.
- [13] Chaté, H., Ginelli, F., and Montagne, R., Simple Model for Active Nematics: Quasi-Long-Range Order and Giant Fluctuations, *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006), 18602.
- [14] Chaté, H., Ginelli, F., and Raynaud, F., Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion, *Phys. Rev. E*, **77** (2008), 046113.
- [15] Narayan, V., Ramaswamy, S., and Menon, N., Long-lived giant number fluctuations in a swarming granular nematic, *Science*, **317** (2007), 105-108.
- [16] Deseigne, J., Dauchot, O., and Chaté, H. (2010). Collective Motion of Vibrated Polar Disks, *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010), 098001.
- [17] Schaller, V., Weber, C., Semmrich, C., Frey, E., and Bausch, A. R., Polar patterns of driven filaments, *Nature*, **467** (2010), 73-77.
- [18] Keber, F. C., Loiseau, E., Sanchez, T., DeCamp, S. J., Giomi, L., Bowick, M. J., Marchetti, M. C., Dogic, Z., and Bausch, A. R. (2014). Topology and dynamics of active nematic vesicles. *Science*, **345** (2014), 1135-1139.
- [19] Gautrais, J., Ginelli, F., Fournier, R., Blanco, S., Soria, M., Chaté, H., and Theraulaz, G., Deciphering Interactions in Moving Animal Groups, *PLoS Comp. Biol.*, **8** (2012), e1002678.
- [20] Attanasi, A., Cavagna, A., Castello, L. D., Giardina, I., Grigera, T. S., Jelić, A., Melillo, S., Parisi, L., Pohl, O., Shen, E., and Viale, M., Information transfer and behavioural inertia in starling flocks, *Nature Phys.*, **10** (2014), 691-696.
- [21] Hiratsuka, Y., Miyata, M., and Uyeda, T. Q. P., Living microtransporter by uni-directional gliding of Mycoplasma along microtracks, *Biochem. Biophys. Res. Commun.*, **331** (2005), 318-324.