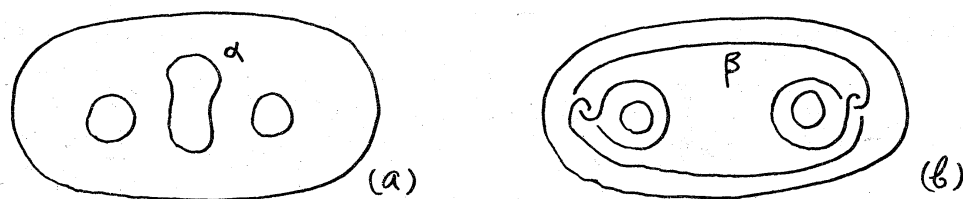


Standard representation curve of $\pi_1(M^3)$.

北大 教養 小林一章

本稿ではコンパクト向きづけ可能な次元多様体 M の基本群 $\pi_1(M^3)$ の元をある意味で標準的な単純閉曲線で表現する事を考えます。ある意味で標準的という事は、例えば下図の (a)



(b) のように genus 2 のハンドル体の内部にある 2 つの閉曲線 α, β を考える時, α, β は共にホモトピー 0 ですが $1 \in \pi_1(M)$ を表現する閉曲線としては, α を考える方がいろいろな面で好都合です。このように“標準的”な閉曲線にふさわしい, いくつかのモデルがあるのですが, それらに該当する“標準的な表現曲線”の定義を与え, そこから導かれる種々の性質を調べるのが本稿の目的です。

対象とするのは PL-カテゴリーの範囲とします。

定義. M^3 を向きづけ可能な3次元多様体とし, α, β を M^3 内の単純閉曲線とします。この時 α と β が *parallel* とは

$\exists$ 埋め込み $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ } $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha, f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ なる時と定義します。 α と β が *parallel* の時 $\alpha \parallel \beta$ と書き, α と *parallel* な単純閉曲線の集合を P_α とかく。

定義. M^3 を上の定義と同じとし, α, β を M^3 内の単純閉曲線で $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$ とする。 ($\langle \alpha \rangle$ は α のホモロジー類)。

次の条件を満足するとき, α と β は *singular parallel* と定義する。

$\exists$ map $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ } (1) $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha, f(S^1 \times \{1\}) = \beta$

(2) $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ } $\forall t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ に對し $f(S^1 \times [0, t]) \cong f(S^1 \times [t, 1])$
 $\cong f(S^1 \times [0, 1])$ 且つ $\forall t_1 \in [0, \varepsilon_1), \forall t_2 \in (\varepsilon_2, 1]$ に對し $f|_{S^1 \times [0, t_1]}$

と $f|_{S^1 \times [t_2, 1]}$ は埋め込みである。(3) f が埋め込みでない時

α によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_α に對し

$F_\alpha \cap \beta = \emptyset$ (up to ambient isotopy of M keeping α fixed, i.e.

$\exists$ cont. family of homeomorphisms $\{\varphi_t\}_{t \in [0, 1]}: M^3 \rightarrow M^3$ } $\varphi_t|_\alpha$
 $= \text{id.}$ & $\varphi_1(F_\alpha) \cap \beta = \emptyset$). α と β が *singular parallel* の

時 $\alpha \sim \beta$ と書き α と *singular parallel* な単純閉曲線の集合

を SP_α とかく。上の条件(1), (2)のみを満足するとき α と β は

weak singular parallel といい, $\alpha \sim_w \beta$ とかく。この時は

$H_1(M; \mathbb{Z})$ で $\langle \alpha \rangle = 0$ という条件は不要です。

注1. M^3 が 3 次元球面 S^3 で α と β が上の (3) の条件を満足する $\Rightarrow \alpha$ と β はホモトピカル unlinking.

注2. singular parallel, parallel という関係は同値関係のうち推移律をみたさない。

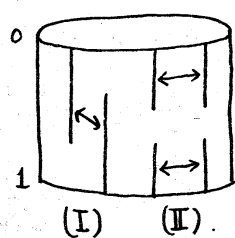
定義. α が $\omega \in \pi_1(M^3)$ の standard representation curve とは $\omega = [\alpha]$ ($[\alpha]$ は α のホモトピー-類) で, α と singular parallel となる M^3 内の任意の単純閉曲線は α と parallel となる事である。即ち $SP_\alpha = P_\alpha$ となる事である。

一般に Smythe [5] によって $\alpha \simeq \beta$ (ホモトピー, $\sim$) のとき

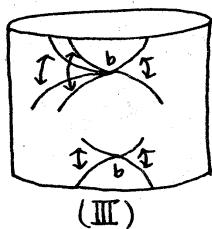
$\exists$ 写像 $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ $\exists f(S^1 \times \{0\}) = \alpha, f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ で

更に $S(f)$ は次の 3 つのタイプ I, II, III のみであるとしてよい。

ここで $S(f) = \mathcal{Q}\{x \in S^1 \times I \mid \#f^{-1}(x) \geq 2\}$: f の特異点の集合。



(I) (II).



(III)

(b は branch point (分岐点)).

(I) は C, C' が f の 2 重線 (即ち $f(C) = f(C')$) で $\partial C = p \cup q, \partial C' = p' \cup q'$ とすると $p \in S^1 \times \{0\}, p' \in S^1 \times \{1\}, q, q' \in S^1 \times (0, 1)$.

(II) は上の記号の下で $p, p' \in S^1 \times \{0\}$ または $p, p' \in S^1 \times \{1\}$ 且 $q, q' \in S^1 \times (0, 1)$. (III) は $S^1 \times \{0\}$ または $S^1 \times \{1\}$ からの 2 重線の tree T

で 1 つの分岐点を共有する。更にこの時 $\exists$ 2-ball $B^2 \subset S^1 \times I$ $\exists$

$B^2 \supset T$, $B^2 \cap \partial(S^1 \times I) \cong B^1$ (1-ball) & $B^2 \cap (S(f) - T) = \emptyset$.

(X が多様体のとき ∂X , $\text{Int} X$ は各々 X の境界, 内部を表す.)

補題 1. M^3 を向きづけ可能な 3 次元多様体とし, α, β を $\text{Int} M$ に含まれる 2 つの単純閉曲線とする。このとき $\alpha \approx \beta$ (ambient isotopic) $\iff \exists$ 写像 $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ $\int$ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ & $S(f)$ は type I の singularities のみから成る。

略証. ($\Rightarrow$) piping technique を使う事により $\exists$ map $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ $\int$ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $S(f)$ は type I, II, III のみ, しかも $F(x, t) = (f(x, t), t)$ によって定義される $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ は locally flat level preserving embedding になっている。(従って Hudson-Zeeman [H-Z] により F は ambient isotopy で cover される)。そして F が埋め込みという事から $S(f)$ は type II の singularity をもたず, また F が ambient isotopy で cover される事より type III の singularities は $F|_{S^1 \times (0, 1)}$ のみを変えて除去出来る。

($\Leftarrow$) 写像 $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ は $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ で $S(f)$ は type I の singularities のみをもつとする。 $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ を $F(x, t) = (f(x, t), t)$ とおくと, $S(f)$ が type I の singularity のみからなる事から level preserving embedding である。そして $pF = f$ で f が immersion である事から locally flat で

ある事が示される。それ故 Isotopy covering theorem [H-Z] により $\alpha \approx \beta$ である。』

I_α を α と ambient isotopic な simple closed curves の集合とし,
 SP_α^w を α と weak singular parallel な simple closed curves の集合とする。

定理 1. M^3 を向きづけ可能な 3 次元閉多様体とし, α を M に含まれる単純閉曲線とする。

(1) $SP_\alpha^w = I_\alpha$. そして $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$ なら $SP_\alpha \subset I_\alpha$.

(2) $\alpha \approx \beta$ のとき, $SP_\alpha^w = P_\alpha \iff SP_\beta^w = P_\beta$. 更に $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$ なら $SP_\alpha = P_\beta \iff SP_\beta = P_\beta$.

略証. (1) 補題 1 を使えば $SP_\alpha^w \subset I_\alpha$ を示すには $\alpha \approx \beta$ なる β に対し, type I の singularity をもたない map $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ で $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ なるものの存在を示せばよい。そこで先ず $g: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ を $\beta \in SP_\alpha^w$ を表現している map とする。 $S(g)$ の triple points の個数, branch points の個数は $g(S^1 \times [0, 1])$ の homeomorphism type の不変量だから $\alpha \approx \beta$ の定義の条件 (2) より 3 重点, 分岐点をもたない事がわかる。従って g は type III の singularity をもたない。次に type II の singularity または ribbon type の singularity があっても適当な $t \in (0, 1)$ を取ると $\alpha \approx \beta$ の (2) を満足しない事がわかる。従って

g は type I の singularity しかもたない。 $\therefore SP^\omega \subset I_\alpha$. 逆に g が type I の singularity しかもたなければ (即ち補題 1 によって g は $\alpha \approx \beta$ を表現している) $S^1 \times I$ の適当な座標変換を行なう事によって $I_\alpha \subset SP^\omega$ が示される。

(2). $\alpha \approx \beta$ だから $f(\alpha) = \beta$ とする位相同形写像 $f: M \rightarrow M$ があり, それによって求める結果が得られる。』

補題 2. M^3 を向きづけ可能なコンパクト多様体で $\partial M \neq \emptyset$ とする。 $\alpha \subset \partial M^3$; $\beta, \gamma \subset I$ は M^3 なる単純閉曲線 α, β, γ に対しもし $\alpha \parallel \beta$, $\beta \approx \gamma$ なら $\alpha \parallel \gamma$ である。更に $\partial M^3 \cong S^2$ で $\alpha \parallel \beta$, $\beta \nparallel \gamma$ なら実は $\beta \parallel \gamma$ である。

略証. (前半). $\alpha \parallel \beta$, $\beta \approx \gamma$ だから $\exists$ 埋め込み $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ γ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$. $\exists$ 写像 $g: S^1 \times [1, 2] \rightarrow M^3$ γ $g(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $g(S^1 \times \{2\}) = \gamma$ 且 $\rightarrow S(g)$ は type I の singularities のみ。 $f = g$ on $S^1 \times \{1\}$ としてよい。 $F = f \cup g$ とおくと $\alpha \subset \partial M$ だから $S^1 \times \{0\} \cap S(F) = \emptyset$. その事と α, γ を動かさない piping technique を使って (即ち $F|_{S^1 \times (0, 2)}$ のみを変化させて) F の singularity を除去出来る。 $\therefore \alpha \parallel \gamma$.

(後半). $\alpha \subset \partial M^3 \cong S^2$ で $\alpha \parallel \beta$ だから $\exists$ embedding $h: B^2 \rightarrow M$ γ $h(\partial B^2) = \alpha$. そして $\beta \nparallel \gamma$ より $h(B^2) \cap \gamma = \emptyset$. また $g: S^1 \times [1, 2] \rightarrow M^3$ を $\beta \nparallel \gamma$ を表現している写像とし $h = g$ on $S^1 \times \{1\} = \partial B^2$

と取る。 $G = f \cup h$ とおき $p \in B^2 - S(G)$ を取り $U(p, B^2) \subset B^2 - S(G)$ となるように取る。 $h(\partial U(p, B^2)) = \beta'$ とおくと前半と同様にして $\beta' \parallel \gamma$ が示せる。そこで $\exists$ 埋め込み $G_1: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ $\exists$ $G_1(S^1 \times \{0\}) = \beta'$, $G_1(S^1 \times \{1\}) = \gamma$. また h が埋め込みで $\gamma \cap h(B^2) = \emptyset$ だから $\beta \parallel \beta'$ in $M - \gamma$. したがって位相同形写像 $\varphi: M \rightarrow M$ $\exists$ $\varphi(\beta') = \beta$, $\varphi|_{\gamma} = \text{id}$. ところで φG_1 によって $\beta \parallel \gamma$ 』

注. 後半の証明から明らかのように $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$, $\partial M \cong S^2$ でなくとも $\beta \approx \gamma$ であり且つ $\exists$ 埋め込み $h: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$, $\exists$ 写像 $f: S^1 \times [1, 2] \rightarrow M$ $\exists$ (1) $h(S^1 \times \{1\}) = \beta$, $h = f$ on $S^1 \times \{1\}$ (2) f は $\beta \approx \gamma$ を表現している. (3) $S(F) \cap (S^1 \times \{0\}) = \emptyset$ (ただし $F = h \cup f$) (4) $\text{Im } h \cap \gamma = \emptyset \implies \beta \parallel \gamma$ が証明出来る。

定理 2. α が $\mathbb{R}^3$ での non-trivial knot $\iff SP_\alpha \neq P_\alpha$.

略証. ($\implies$). α を $\mathbb{R}^3$ 内の non-trivial knot とし $\mathbb{R}^3$ の平行移動を使って α と split している knot β を作ると $\beta \in SP_\alpha$. α と β を split している 2次元球面を S_0^2 とおく。もし $\beta \in SP_\alpha$ なら $\exists$ 埋め込み $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\exists$ $f(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $f(S^1 \times \{1\}) = \beta$. α と β が split しているから $f^{-1}(\text{Im } f \cap S_0^2)$ の component で $S^1 \times [0, 1]$ 内で $S^1 \times \{t\}$ に ambient isotopic なものがある。その f による像を γ とすると $\alpha \approx \gamma \approx \beta$ 前が $\gamma \subset S_0^2$ だから γ は

trivial knot. これは矛盾. $\therefore \beta \in SP_\alpha - P_\alpha$.

($\Leftarrow$) α が trivial knot なら $SP_\alpha = P_\alpha$ を示す. $\beta \in SP_\alpha$ とすると $\exists$ 埋め込み $f: B^2 \rightarrow R^3$ $\gamma f(\partial B^2) = \alpha$. また写像 g は $\alpha \sim \beta$ を表現しているとする. 補題 2 の後半より $\alpha \parallel \beta$. $\therefore SP_\alpha = P_\alpha$ $\square$

系. R^3 (または S^3) には $I_\alpha \not\subseteq SP_\alpha$ となる knot α がある.

下図の Whitehead link がその例を示している.



$\beta \in I_\alpha - SP_\alpha$

補題 3. (1) M^3 を向きづけ可能な閉多様体 ($\partial M \neq \emptyset$ でも $\partial M = S^2$ なら良い), α を M^3 内の単純閉曲線とする. すると

$I_m(H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M); \mathbb{Z}))$ は無限群である. 従って特に $\langle \alpha \rangle$ が $H_1(M; \mathbb{Z})$ で有限位数 ($\langle \alpha \rangle = 0$ も含む) をもてば $\langle m_\alpha \rangle$ が $H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M); \mathbb{Z})$ で無限位数をもつ (ここで m_α は $\partial U(\alpha, M)$ の meridian curve).

(2) M^3 を向きづけ可能なコンパクト多様体とする. M^3 内の単純閉曲線 α は $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$ とする. F_1, F_2 を α によって bound される non-singular orientable surfaces とし $\partial U(\alpha, M) \cap F_i = C_i$ ($i=1, 2$) とする. ($\partial U(\alpha, M)$ を十分小さく取って $\partial U(\alpha, M) \cap F_i \subset \text{boundary collar of } F_i$ とすれば C_i は $\partial U(\alpha, M)$ 上の単純閉曲線としてよい). このとき $\langle m_\alpha \rangle$ が $H_1(M - \mathring{U}(\alpha, M); \mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}$) で無限位数をもてば $\partial U(\alpha, M)$ 上で $C_1 \approx C_2$ である。

略証(1). $\mathbb{Q}$ を有理数体とする。 $(M - \text{Int } U(\alpha, M), \partial U(\alpha, M))$ の $\mathbb{Q}$ 係数ホモロジー完全系列を考えると、もし $\text{Im } i_*$ が有限群(従って $\mathbb{Q}$ 係数で $\text{Im } i_* = 0$) なら $H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Q}) = 0$ が出て $\partial U(\alpha, M) \cong S^1 \times S^1$ に矛盾。

(2). $\langle C_1 \rangle = \langle C_2 \rangle$ in $H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Z})$ を示せばよい。 $C_i // \alpha$ in $U(\alpha, M)$ だから $H_1(\partial U(\alpha, M); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \{ \langle m\alpha \rangle \} \oplus \{ \langle C_i \rangle \}$ ところで $\langle C_2 \rangle = \langle C_1 \rangle + p \langle m\alpha \rangle$ ($p \in \mathbb{Z}$) とかける。もし $p \neq 0$ なら条件より $H_1(M - \text{Int } U(\alpha, M); \mathbb{Z})$ で $i_* \langle C_2 \rangle \neq 0$ 。これは矛盾。
 $\therefore p = 0$. $\square$

$V \cong \mathbb{R}^3 (S^1 \times B^2)$ を(種数3の)ハンドル体とする。 $\pi_1(V)$ の standard representation curves を研究するとき SP_α の定義の中の $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(V; \mathbb{Z})$ という条件は強すぎる。 V は常に $\mathbb{R}^3$ に埋め込めることから、その事を使って singular parallel の定義を次の様にかえる。“埋め込み $V \subset \mathbb{R}^3$ が1つ固定されているとする。この時 V 内の2つの単純閉曲線 α, β が singular parallel ($\alpha \sim_{\mathbb{R}} \beta$) とは $\alpha \sim_{\omega} \beta$ であって且つ α によって bound される任意の non-singular orientable surface F_α in $\mathbb{R}^3$ に対し $F_\alpha \cap V$ の component のうち α を含むものを F_α^0 とおき、条件(3)として α と β の間の写像 f が埋め込みでな

いとき $F_\alpha \cap \beta = \emptyset$ を満足すると定義する” この singular parallel の定義によって α と singular parallel な単純閉曲線の集合を SP_α^R とかく. α が $\pi(V)$ の $\pi\omega$ の R -standard representation curve とは今迄と同様に $[\alpha] = \omega$ で $SP_\alpha^R = P_\alpha$ のときと定義する. 上の F_α を F_α の α -component とよぶ.

定理 3. $V \cong \dot{U}(S^1 \times B^2)$ を R^3 内のハンドル体とする.

(1) V 内の単純閉曲線 α によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_α in R^3 に対し, その α -component が $S^1 \times I$ と位相同型 (up to ambient isotopy of R^3 keeping $\partial F_\alpha = \alpha$ fixed) $\Rightarrow \alpha$ は $\pi(V)$ のある元の R -standard representation curve.

(2) V 内の単純閉曲線 α が $\pi(V)$ のある元の R -standard representation curve $\Rightarrow B^3 \cap \alpha \cong B^1$ なる V 内の任意の 3-ball B^3 に対し $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$.

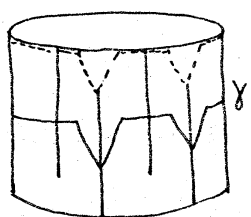
(3) $\alpha \sim 0$ (ホモトピック) in V のとき, α が R -standard $\Leftrightarrow \alpha$ が standard.

略証. (1) Lemma 2 の後の注と Lemma 3 を使えばよい.

(2) $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ だが $(B^3, B^3 \cap \alpha) \not\cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ と仮定する. B^3 があれば $B^3 \cap \alpha$ を動かさず $\text{Int } B^3 \cap \alpha$ を “平行移動” させて定理 2 と同様の方法で $\beta \in SP_\alpha^R - P_\alpha$ なる β を作れる. これは α についての条件に矛盾.

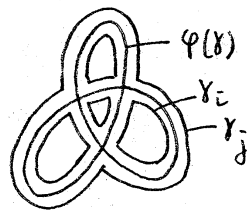
(3) 一般に $SP_\alpha^R \subset SP_\beta$. 従って $(\Leftarrow)$ は明らか. $(\Rightarrow)$ $\beta \in SP_\alpha$ とし α と β の間の写像を f とする. もし f が embedding でないなら α によって bound される V 内の曲面 F_α に対し $F_\alpha \cap \beta = \emptyset$. $\tilde{F}_\alpha$ を α によって bound される $\mathbb{R}^3$ 内の任意の曲面とする. 補題 3 によって $U(\alpha, V) \cap \tilde{F}_\alpha = U(\alpha, V) \cap F_\alpha$ だから $\tilde{F}_\alpha$ の α -component $\tilde{F}_\alpha^0$ に対し $\tilde{F}_\alpha^0 \cap \beta \neq \emptyset$ なら $F_\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ となり矛盾? $\therefore \beta \in SP_\alpha^R$ として仮定より $SP_\alpha^R = P_\alpha \therefore \beta \in P_\alpha$. 故に α は standard

Splitting. (向きづけ可能な次元多様体 M^3 内の 2 つの単純閉曲線 α, β の splitting について).



$\beta \in SP_\alpha^w$ で α と β の間の写像を f とする. $S^1 \times I$ で図のような点線に平行な線 γ による像を γ とする. このとき $\gamma \subset (\alpha \xrightarrow{f} \beta)$ とかく.

γ は自分自身に交わる曲線. γ の M における正則近傍 $U(\gamma, M)$ は種数 p のハンドル体. ここで $p = \#\{S(f) \text{ の type I の singularity の成分}\} \times \frac{1}{2} + 1$. $\mathbb{H}^p(S^1 \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ を $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ の中の種数 p のハンドル体で $\mathbb{H}^p(S^1 \times [-1, 1] \times [-1, 1]) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \mathbb{H}^p(S^1 \times [-1, 1] \times \{0\})$ となっているものとする. $\varphi: U(\gamma, M) \rightarrow \mathbb{H}^p(S^1 \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ を $\varphi(\gamma) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ となるような位相同型写像とする. $\varphi(\gamma)$ を $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ の中で図のように $p+1$ 個の交わらない単純閉曲線 $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{p+1}$ に



分ける。 $\psi^{-1}(Y_i) = Y_i$ とおく。

定義。 $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M^3; \mathbb{Z})$ で且つ $\beta \in SP_\alpha$ とする。次の条件 (1), (2) を満足している時 α と β は split していると定義する。 (1) α によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_α 及び β によって bound される任意の向きづけ可能な曲面 F_β に対し $\beta \cap F_\alpha = \emptyset$ (up to ambient isotopy of M keeping α fixed), $\alpha \cap F_\beta = \emptyset$ (up to ambient isotopy of M keeping β fixed). (2) $\beta \in SP_\alpha$ を示す写像及び上の位相同型写像 ϕ を適当に選んだ上のような単純閉曲線 $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}$ を作った時 $SP_{\gamma_i} = P_{\gamma_i}$ ($i=1, 2, \dots, p+1$) となっている。(従ってこの時各 γ_i は $\langle \gamma_i \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$ が前提条件になっている。)

定理 4. α は $\langle \alpha \rangle = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$ なる M 内の単純閉曲線とする。 α がある $w \in \pi_1(M^3)$ の standard representation curve ならば $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ となる任意の 3-ball $B^3 \subset M^3$ に対し $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^2 \times B^1, \{0\} \times B^1)$.

略証. $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ だが $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ とならない 3-ball $B^3 \subset M^3$ があつたとする。 $U(\alpha, M^3)$ を十分小さくすると $T \equiv U(\alpha, M) \cup B^3$ は $S^1 \times B^2$ に位相同型。そこで定理 3 (2) と同様にして T 内の平行移動によって T 内では $\beta \in SP_\alpha - P_\alpha$ なる β が取れる。(実際は $\alpha \neq 0$ in T だから T を $\mathbb{R}^3$ に移して考え

る) としても $\beta \in P_\alpha$ in M^3 は α の longitude curve ℓ_T が $M - \overset{\circ}{T}$ で non-singular 2-ball B^2 を bound する事が示され、それに沿って T を surgery して α, β を内部に含む 3-ball B^3 が存在し、その中で $\alpha \parallel \beta$ という事が示される。そしてこれと $(B^3, B^3 \cap \alpha) \approx (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ という事から矛盾が出来る。

定理 5. M^3 を向きづけ可能な閉多様体とし、 α を M^3 に含まれる単純閉曲線とする。このとき α が $1 \in \pi_1(M^3)$ の standard representation curve $\iff \alpha$ が M^3 で non-singular 2-ball を bound する。

略証 ($\Rightarrow$). $\alpha \simeq 0$ in M^3 だから α は M^3 で singular 2-ball を bound する。Smythe [5] の方法でその singularity は type II, III のみとしてよい。そして α が standard representation curve という事と定理 4 を使うと type III の singularity はないと仮定してよい。そこで $\exists$ 写像 $f: D^2 \rightarrow M^3$ γ $f(\partial D^2) = \alpha$, $S(f)$ は type II のみでその成分の個数 $2p$ は最小とする。すると $U(f(D^2), M)$ は種数 p のハンドル体。 $V \cong \mathbb{H}^2(S^1 \times B^2)$ を $\mathbb{R}^3$ 内の標準的なハンドル体とし、 $h: U(f(D^2), M^3) \rightarrow V$ を位相同型写像とする。 V の中で平行移動を利用して $\beta' \in SP_{h(\alpha)} - P_{h(\alpha)}$ なる閉曲線を取る。 $\beta = h^{-1}(\beta')$ とおくと $\beta \in SP_\alpha$ となるが条件より $\beta \in P_\alpha$ 。そこで $\exists$ 埋め込み $g: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ γ $g(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $g(S^1 \times \{1\}) = \beta$,

$S^1 \times \{0\} = \partial D^2$ 上で $f=g$. この g を使って $S(f) \neq \emptyset$ なる矛盾である事を示す. ($\Leftarrow$) α が non-singular 2-ball を bound し, $\beta \in SP_2$ とすると Lemma 2 の後の注によって $\alpha \parallel \beta$ が示せる.]

定理 6. M^3 をホモロジー球面とし, α を M^3 内の任意の単純閉曲線とすると, α と split している単純閉曲線で $\alpha \parallel \beta$ なる β が取れる.

略証. F_α を α によって bound される種数最小の non-singular orientable surface とする. $U(F_\alpha, M^3) \cong T_0$ とすると T_0 は種数 $2p$ のハンドル体. ここで $p = F_\alpha$ の種数. $T = U(T_0, M^3)$ とする. $\tilde{q}^p(S^1 \times B^2)$ を $\mathbb{R}^3$ 内の種数 $2p$ のハンドル体とし $h: T \rightarrow \tilde{q}^p(S^1 \times B^2)$ を位相同型写像とする. $h(\partial T_0)$ 上に standard longitude curves $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{2p}$ を取り, $U(l_1 \vee \dots \vee l_{2p}, h(T - \text{Int } T_0)) = T'_1$, $h^{-1}(T'_1) = T_1$ とおく. $\mathbb{R}^3$ の平行移動を利用して $\beta' \in SP_2(\alpha)$ であって $h(T_0) \cap T'_1$ を含む 2次元球面によって ($\mathbb{R}^3$ 内で) split している β' を T'_1 内に取り $h^{-1}(\beta') = \beta$ とする. この β が求める閉曲線である事を示す.]

系. M^3 は $\pi_1(M^3) \neq \{1\}$ であるようなホモロジー球面とする.

$\Rightarrow$ standard representation curve をもつ $\pi_1(M^3)$ の元 w がある.

略証. $\pi_1(M^3)$ はアーベル群でない。そこで $\exists \eta (\neq 1) \in \pi_1(M^3)$
 $\exists \varphi(\eta) \neq 0$ ($\varphi: \pi_1(M^3) \rightarrow H_1(M^3; \mathbb{Z})$ は Hurewicz 準同型) と
 なる $\pi\eta$ があり, α を η の表現曲線とする。 $SP_\alpha = P_\alpha$ なら $\omega =$
 η とおけばよい。 $SP_\alpha \neq P_\alpha$ のとき定理 6 より α と split して
 いて $\alpha \cap \beta$ となる閉曲線 β がある。そこで $\gamma \subset (\alpha \frown \beta)$ を取
 り γ から交わらない単純閉曲線 $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ を取ると定義より
 $SP_{\gamma_i} = P_{\gamma_i}$ ($i=1, 2, \dots, g$)。そして $[\alpha] \neq 1$ だから $\exists i \exists [\gamma_i] \neq 1$ 。
 そこで $\omega = [\gamma_i]$ とおけばよい。』

定理 7. M^3 をホモロジー球面とする。 $\omega \in \pi_1(M^3)$ が standard
 representation curve をもてば ambient isotopy を除いて一意
 である。

略証. α, β を ω の standard representation curves とした
 とき $\alpha \approx \beta$ を示せばよい。 $\alpha \simeq \beta$ だから $\exists$ 写像 $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$
 $\exists f(S^1 \times \{0\}) = \alpha, f(S^1 \times \{1\}) = \beta$ 且つ $S(f)$ は type I, II, III の
 みをもつ。そして α, β が standard representation curves と
 いう事と定理 4 から f は type III の singularity をもたないとし
 てよい事が示せる。次に piping technique 及び ambient iso-
 topy によって $\exists \beta_1 \approx \beta$, $\exists$ 写像 $g: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$
 $\exists g(S^1 \times \{0\}) = \alpha, g(S^1 \times \{1\}) = \beta_1$ 且つ $S(g)$ は $S^1 \times \{1\}$ に足をもつ type II の singular-
 ity のみ。定理 6 より β_1 と split していて $\gamma \in SP_{\beta_1}$ となる γ が

ある。 $SP_{\beta_1} = P_{\beta_1}$ だから $\exists$ 埋め込み $h: S^1 \times [1, 2] \rightarrow M^3 \supset h(S^1 \times \{1\}) = \beta_1$, $h(S^1 \times \{2\}) = \gamma$ 且つ $h = g$ on $S^1 \times \{1\}$. この h を使って
 実は $S(g) = \emptyset$ である事を示す. 従って $\alpha // \beta_1 \approx \beta$. $\therefore \alpha \approx \beta$ $\square$

References

- [H-Z]. J.F.P. Hudson and E.C. Zeeman; 'On combinatorial isotopy' Publ. I.H.E.S. 19(1964) 69-94.
- [R] D. Rolfsen: 'Isotopy of links in codimension two' J. the Indian Math. Soc. 36 (1972) 263-278.
- [S] N. Smythe: 'Handlebodies in 3-manifolds' Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534-538.