

# 位相力学系の基本集合と附随する $C^*$ 環の性質

東京府立大 理 富山 淳 (Jun Tomiyama)

§ 0.  $\Sigma = (X, \sigma)$  をコンパクト空間  $X$  とその上の homeomorphism  $\sigma$  よりなる位相力学系とし,  $A(\Sigma)$  を  $\Sigma$  に附随する位相変換群  $C^*$  環とする。即ち,  $A(\Sigma)$  は  $\sigma$  に対応する連続函数環  $C(X)$  上の同型対応  $\alpha$  ( $\alpha(f)(x) = f(\sigma^{-1}x)$ ) による  $C^*$  クロス積  $C(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} (= C(X) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}, \text{ 縮約クロス積, ここで } \mathbb{Z} \text{ は整数群})$  である。エルゴード論と von Neumann 環論との向う大規模な交流を念頭に置き、位相力学系論と  $C^*$  環論との関連を考察するのが本稿の主題であるが、そのうちでは議論があるうちに広汎にわたる中でその焦点を位相力学系の基本集合の  $C^*$  環的側面にしばって行なうことにする。この主題に対する我々の立場は次の様のものである。

(1) すべて、基本結果は作用素環-力学系の向う同値関係の形で述べられるべきである。例.  $\Sigma$  minimal  $\Leftrightarrow A(\Sigma)$  単純。

(2) 古典的力学系 (無理数回転 etc.) に及ぶ様な作用素環的仮定はあかろい (作用素環論的立場と違う)。

(3) 可分性は一般には仮定しない。

誤解のちいねにつけ加えると、最後の分は通序のC\*環論にあっても特に"とり扱ったC\*環はすべて可分とする"というように制限はつけているという程の意味である。

$\Sigma_0 = (T, \phi_0)$  を無理数回転とし、無理数回転C\*環  $A_0$  の構造論をこの意味で眺めてみよう。

1°  $A_0$  が単純なのは  $\Sigma_0$  の極小性による(前述)

2°  $A_0$  の trace の一意性  $\Rightarrow \Sigma_0$  がルベフク測度によって一意にエルゴード的であることによる。

3°  $A_0$  が AF-C\*環に埋めこめることはカラス系論としては  $X(\phi) = T$  (実際は  $C(\phi) = X(\phi) = T$ ) とすることによる (1983年の Pimsner による結果) ( $C(\phi), X(\phi)$  は §1 参)。

しかし最近の発展による  $A_0$  の circle algebra としての構造などはカラス系として何が原因になっているのか見当もつていない。したがってこのような交流論の立場ではカラス系  $\Sigma_0$  もまだ説明しつくされていらないと言える。

§1 主結果. まずカラス系  $\Sigma$  について、周期点の集合, recurrent 点の集合, 非遊走集合, chain recurrent 点の集合をそれぞれ  $P_r(\phi)$ ,  $C(\phi)$ ,  $\Omega(\phi)$ ,  $X(\phi)$  とかくことにする。考えている空間  $X$  は勿論ここでは距離空間の場合である。またここで

$\Sigma$  が chain recurrent であるとは任意の  $\delta > 0$  について cyclic な  $\delta$ -擬軌道が存在することである。これらの集合が  $C^*$  環  $A(\Sigma)$  に対して果す意味は (現在判明している分は) 次のようである。しかしその前に  $C^*$  環  $A$  のクラス分けについて述べておくと、 $A$  の既約表現の像がコンパクト作用素のみからなることを  $A$  が liminal (または  $LC(R)$ )、またその逆を postliminal (または  $GC(R)$ ) 環という。  $A$  が可分なときには後者は  $A$  の任意の既約表現の像が常にコンパクト作用素環を含むことと同値である。任意の  $C^*$  環  $A$  には常に最大の postliminal なイデアル  $K$  が存在してその商  $C^*$  環  $A/K$  は non-zero な postliminal なイデアルをもたない。このような  $C^*$  環を antiliminal (または  $NGC(R)$ )  $C^*$  環という。Postliminal 環はしばしば I 型の  $C^*$  環と呼ばれる。

定理 A. 次のことが成り立つ

- (1)  $\text{Per}(\delta) = X$  となるのは  $A(\Sigma)$  の既約表現がすべて有限次元なことと同値である (可分性の仮定なしに成立)
- (2)  $A(\Sigma)$  が I 型であることと、 $\text{Per}(\delta) = \mathcal{C}(\delta)$  とは同値である。
- (3)  $A(\Sigma)$  が antiliminal なことと、集合  $\mathcal{C}(\delta) \setminus \text{Per}(\delta)$  が  $X$  で稠密なこととは同値である。
- (4)  $A(\Sigma)$  が AF  $C^*$  環に埋め込めることと、 $X(\delta) = X$  であ

ることとは同値である。

ここで (2), (3) は青木-富山による最近の結果 [1] による。  
 (4) は前述の Pimsner の結果 ([5]) である。このような主張の特徴は先ずどの場合も (整数群  $\mathbb{Z}$  の作用と看做している) homeomorphism  $\sigma$ , とする  $\mathbb{Z}$  の力学系  $\Sigma$  に対して何の条件も課してはいないといえることである。 $A(\Sigma)$  が  $\text{I}$  型になるかについて Glimm, Zellev-Meier の先駆的な仕事以外にも、一般の群  $A \rtimes G$ ,  $A \rtimes_{\alpha} G$  の中で作用素環論では多々論じられてきたが力学系の人達からは強いて言えば "無縁" なものが多かった。しかしその中でも次の主張はここに引用すべきであろう。

(2)'  $A(\Sigma)$  が  $\text{I}$  型であることと軌道空間  $X/\mathbb{Z}$  が  $T_0$  空間であることとは同値である。

これは  $C^*$  環論の枠組で証明されていた結果であるが突然氏により条件  $P_{\text{ev}}(\sigma) = C(\sigma)$  との同値性という形でも説明されている (個人的な通信)。つまりこの条件をみたし、更に周期点が有限個という力学系は Morse-Smale 系と呼ばれ良く研究されている。

$A(\Sigma)$  の  $A$   $F$  環への埋めこみについては Pimsner-Voiculescu による無理数回転環  $A_{\theta}$  の埋めこみの後にも種々論じられているが (4) での Pimsner の埋めこみは相当面白いもので

ある。最近の Herman - Putnam - Skau ([2]) やその前の Putnam などの研究により  $A(\Sigma)$  と AF 環 との関係は力学系論から見ても益々興味深いものがあるので、 $A_\theta$  の場合 ( $C(\delta) = X$  のとき) も含めて力学系の特性に応じた canonical な AF 環への埋め込みとは何かという問題は重要な課題であると思う。

非遊走点の集合である  $\Omega(\delta)$  については  $C(\delta)$  および  $X(\delta)$  との関係も含めて何も知られていない。Anosov diffeomorphism の系について  $\Omega(\delta) = X$  かという問題が長年の課題になっているという状況を考慮させるまでもなく、 $\Omega(\delta)$  の意味の  $C^*$  環的側面の解明は魅力のあるものである。

(3) とみたら力学系の例としては無理数回転系や Bernoulli shift のほかに、3次元の discrete Heisenberg 群  $H^3$  に附随した2次元トーラス  $T^2$  上の力学系を挙げておきたい。これは結論的には2次の行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  によってひき起される力学系でこの形から見てもわかるように無理数回転と有理数回転の混合になっている。したがってここでは  $C(\delta) \setminus \text{Per}(\delta)$  が  $T^2$  で稠密であるばかりではなく、周期点の集合  $\text{Per}(\delta)$  も有理数回転の影響で  $\text{Per}(\delta)$  も稠密な集合になっている。その結果として群  $C^*$  環  $C^*(H^3) = C(T^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$  は有限次元の既約表現も十分沢山の  $\alpha$  を与える antiliminal  $C^*$  環になっている。

§2 関連する事柄. 前述の定理 A の (2), (3) の結果は実はもう少し一般的に  $A(\Sigma)$  の最大の postliminal アイデアル  $K$  を定める次の結果の系として導びかれる。そのために準備として、 $X$  の点  $x$  について  $C(X)$  上の point evaluation による pure state を  $\mu_x$  とし、その  $A(\Sigma)$  上への pure state 拡大を  $\varphi_x$  とする。 $x$  が非周期点であればこのような拡大は一意的であることが良く知られている。 $\varphi_x$  による GNS 表現の kernel を  $P(x)$  と書くことにする。今  $x$  の軌道  $O(x)$  の閉包  $\overline{O(x)}$  で  $0$  とする連続同教全体を  $k(\overline{O(x)})$  とすると、 $P(x)$  は  $k(\overline{O(x)})$  から生成された  $A(\Sigma)$  のアイデアルである ([3] 参)。次が成り立つ。

$$\text{定理 B. } K = \bigcap_{x \in C(G) \setminus \text{Per}(G)} P(x)$$

このことから (2) は自明であり、(3) は  $C(G) \setminus \text{Per}(G)$  が  $X$  で稠密なことと  $K=0$  が同値なことによる。

$A(\Sigma)$  の I 型性はその既約表現  $\tilde{\pi} = \pi \times u$  ( $\pi = \pi|_{C(X)}$ ) の像  $\pi(A(\Sigma))$  がハフマンポント作用素環を含むかに関係するがそれを解析する手段として  $\pi$  によって引き起された力学系を次の様に考える。 $\pi$  の kernel  $\pi^{-1}(0)$  は必ず  $C(X)$  の不変アイデアルであるから、 $X$  の閉不変集合  $X_\pi$  によって  $\pi^{-1}(0) = k(X_\pi)$  と書ける。 $\sigma_\pi = \sigma|_{X_\pi}$  と書く。一方  $\pi(C(X))$  の Gelfand 表現を

$C(X'_\pi)$  とし covariant 表現  $\{\pi, u, H\}$  によって  $X'_\pi$  上に  $u$  を起した  $\text{homeomorphism}$  を  $\sigma'_\pi$  と記すことができる系  $\Sigma'_\pi = (X'_\pi, \sigma'_\pi)$  は同型である。

$$C(X_\pi) = C(X)/k(X_\pi) \cong C(X'_\pi)$$

を通して自然にできる系  $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$  と同一視出来る。

Fact 1.  $\tilde{\pi} = \pi \times u$  を既約表現とする。このとき  $\tilde{\pi}$  が有限次元であることと  $X_\pi$  が有限集合であることは同値である。

このことから周期点から前述のようにして作った GNS 表現  $\tilde{\pi}_{\varphi_x} = \pi_{\varphi_x} \times u$  は有限次元であること、また有限次元既約表現はすべてこの形をしていることがわかり、こうして利用して定理 A の (i) の主張が得られる (可分性の仮定はいる)。)

既約表現に対しては induced できる系  $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$  は一般に Topologically Transitive (任意の開集合  $U, V$  に対してある整数  $n$  により  $\sigma_\pi^n(U) \cap V \neq \emptyset$  とする) にちり、 $X$  が距離空間の時にはしたがって  $X_\pi$  には稠密な軌道をもつ点が存在する。このとき  $\Sigma_\pi$  とすると

$$\text{Fact 2. } \tilde{\pi}(A(\Sigma)) \cap C(H) \cong \Sigma_\pi \in C(\sigma) \setminus \text{Per}(\sigma)$$

このことの証明でも常に問題となるのはコンパクト作用系環  $C(H)$  が  $\text{iff}$  アルとして  $\pi(C(X))$  と nonzero の共通分

をもちかといふことである。一般にクロス積  $A \times G, A \times_{\text{discrete}} G$  ( $G$  はとりあえず discrete 群) のイデアルの構造を説明するにはあたつて一番厄介なのは  $I \cap A = \{0\}$  とする  $\Sigma$  のイデアル  $I$  の存在であるが、 $A(\Sigma)$  においては非序に一般のカラ系においてこのような pathology が起るゝことが知られている。つまり次のことが成り立つ。( [3] 参照 )

定理 C.  $A(\Sigma)$  について次のことは同値である。

(1)  $\Sigma$  は topologically free カラ系,

(2)  $A(\Sigma)$  の固イデアル  $I$  について

$$I \neq \{0\} \Rightarrow I \cap C(X) \neq \{0\}$$

(3)  $C(X)$  は  $A(\Sigma)$  の極大可換部分環である。

ここで  $\Sigma$  が topologically free とは非周期点の集合が  $X$  で稠密であることをいふ。定理 A の (3) の例のカラ系はすべてこの型であるのは勿論であるが manifold 上で与えられている通常のカラ系は大程  $\text{Per}(\phi)$  が高々可算集合でこの型に属している。しかし有限次元の既約表現とる目明な場合を除くと前述の Fact 2 を得るために上記定理をあてはめるにはもう 1 スラフポ次の結果が必要である。

Fact 3.  $\widehat{\pi} = \pi \times u$  を  $A(\Sigma)$  の既約表現とすると、 $\pi$  が無限次元のとき  $\pi(A(\Sigma))$  は  $A(\Sigma_\pi)$  と同型である。



最後に、カウ系  $\Sigma$  と  $C^*$  環  $A(\Sigma)$  との相関関係において最も大きな問題とされるのは von Neumann 環 (factor) の場合の Krieger の定理にあたる  $A(\Sigma)$  の同型問題

$$A(\Sigma_1) \cong A(\Sigma_2) \Leftrightarrow \Sigma_1 \text{ と } \Sigma_2 \text{ の関係は何か?}$$

であるが現在の所は Giordano - Putnam - Skau によるコントロール集合上の極小カウ系についての結果 (完全条件、しかし現時点では announce のみ) があるのみである。位相的軌道同型の概念がエルゴード論でそれに対応するものになるだろうとは予想されている。しかしその道ははるかに遠い!

## 文 献

1. N. Aoki - J. Tomiyama, Characterizations of topological dynamical systems whose transformation group  $C^*$ -algebras are unital and of type 1 (to appear in Ergodic Theory and Dynamical systems)
2. R. Herman - I. Putnam - C. Skau, Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics, International Math. J., **2** (1992), 827-864.
3. J. Tomiyama, The interplay between topological dynamics and theory of  $C^*$ -algebras, Lecture note 2, Seoul 1992.

4. ———, Invitation to  $C^*$ -algebras and topological dynamics, World Sci. Ltd., Singapore 1987.
5. M. Pimsner, Embedding some transformation group  $C^*$ -algebras into AF-algebras, Ergodic Theory and Dynamical Sys., 3 (1983), 613 - 626.