

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	た な か りょうきち 田 中 亮 吉
学位（専攻分野）	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) Large deviation on a covering graph with group of polynomial growth (べき零被覆グラフ上の大偏差原理)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 加藤 毅 教 授 深谷 賢治 教 授 池田 保 教 授

京都大学	博士 (理 学)	氏 名	田中 亮吉
論文題目	Large deviation on a covering graph with group of polynomial growth		

(論文内容の要旨)

$X = (V, E)$ を連結な無限有向グラフとし, そこにグラフ距離 d を入れる. Γ を有限生成べき零群で振れないものとする. Γ が X に自由に作用し, 商グラフ $\Gamma \backslash X$ が有限グラフ X_0 である状況を考える. $(X, (1/n)d)$ は $n \rightarrow \infty$ としたとき, あるべき零 Lie 群に Carnot-Carathéodory 距離を入れた距離空間 (G_∞, d_∞) に基点付き Gromov-Hausdorff 収束する (Gromov-Pansu).

X 上のランダムウォーク, すなわち Γ 不変な推移確率によって生成される Markov 連鎖 $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ で, 基点 x_0 から出発するものを考える.

このランダムウォークをべき零 Lie 群 G_∞ に埋め込み, そこでランダムウォークの漸近挙動をみる. 埋め込みは以下のように構成する: Γ が G_∞ の格子部分群であるときには, $\Phi: X \rightarrow G_\infty$ として Γ -同変な単射を取る. 一般には, Γ の Malév 完備化を経由して埋め込みを定義する. 以上の様にして構成される埋め込み $\Phi: X \rightarrow G_\infty$ で $\Phi(x_0) = 1$ (単位元) であるものを取る. これを用いて G_∞ 上のランダムウォークを $\xi_n := \Phi \circ w_n$ として定義する.

次に, このランダムウォークを G_∞ 上スケールすることを考える. そのために dilation map $\delta_{1/n}: G_\infty \rightarrow G_\infty$ を定義する. これは微分同相写像かつ自己同型写像になっている. dilation map $\delta_{1/n}$ は以下のように定義される: $\mathfrak{g}_\infty$ を G_∞ の Lie 環とする. $\mathfrak{g}_\infty$ は次のような $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての直和分解を持つ: $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$. (r はある正の整数). ここで, $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_\infty / [\mathfrak{g}_\infty, \mathfrak{g}_\infty]$, $\mathfrak{g}_2 \cong [\mathfrak{g}_\infty, \mathfrak{g}_\infty] / [\mathfrak{g}_\infty, [\mathfrak{g}_\infty, \mathfrak{g}_\infty]]$ であり, 一般に, $\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}_\infty$ の $i-1$ 回ブラケットを取ったものを $\mathfrak{g}_\infty$ の i 回ブラケットを取ったもので割った商空間とベクトル空間として同型なものである. $\mathfrak{g}_\infty$ の自己同型写像を $D_{1/n}v := (1/n)v_1 + (1/n^2)v_2 + \cdots + (1/n^r)v_r$, $v \in \mathfrak{g}_\infty$ で $v_i \in \mathfrak{g}_i (1 \leq i \leq r)$ と定義する. これを用いて, dilation map は $\delta_{1/n}x := \exp \circ D_{1/n} \circ \exp^{-1} x$, $x \in G_\infty$ と定義される. ここで $\exp: \mathfrak{g}_\infty \rightarrow G_\infty$ は微分同相写像であり, $\exp^{-1}$ は大域的に定義されている.

このとき, dilation map により G_∞ 上スケールされたランダムウォーク $\{\delta_{1/n}\xi_n\}_{n=0}^\infty$ について次が成り立つ:

定理. $\{\delta_{1/n}\xi_n\}_{n=0}^\infty$ について大偏差原理が成り立つ. すなわち, ある下半連続な関数 $I_\infty: G_\infty \rightarrow [0, \infty]$ で次を満たすものが存在する: 任意の Borel 集合 $A \subset G_\infty$ に対して,

$$\begin{aligned}
-\inf_{y \in \text{int} A} I_\infty(y) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_x(\delta_{1/n} \xi_n \in A) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_x(\delta_{1/n} \xi_n \in A) \leq -\inf_{y \in A} I_\infty(y).
\end{aligned}$$

この大偏差原理を制御している関数 (速度函数) I_∞ は実際に書き下すことが出来るものであるが, 簡明な表示は与えられていない. 速度函数は複雑な形をしているが, I_∞ が有限の値を取る領域 (effective domain) については, 以下の様に特徴付けることが出来る.

定理. $D_\infty := \{z \in G_\infty \mid I_\infty(z) < \infty\}$ とおく. このとき, $D_\infty = B_\infty(1) := \{z \in G_\infty \mid d_\infty(1, z) \leq 1\}$. ここで右辺は *Carnot-Carathéodoery* 距離による半径 1 の単位球である.

最後に, べき零 Lie 群の確率過程についての大偏差原理について知られていたことと本研究の関係を述べる. Baldi と Caramelino により, G_∞ 上の i.i.d. 確率変数列の積についての大偏差原理が証明されている. また, 次数付きのべき零 Lie 群上の Brown 運動に対する大偏差原理についても Baldi の研究がある. ここでの大偏差原理の証明は Baldi と Caramelino の方針を参考にしており, その証明において, 最初のステップである $C([0, 1], \mathfrak{g}_1)$ 上の大偏差原理については小谷-砂田による証明を利用している. これは, 折れ線による確率過程を離散時間で近似し, 各時間でのユークリッド空間に値を持つ確率過程たちの大偏差原理に帰着させ, 射影極限により道の空間上の過程を復元するという方針により証明される. 各時間でのユークリッド空間に値を持つ確率過程たちの大偏差原理については, アーベル群作用の場合での小谷-砂田の研究があり, 速度函数と捻った推移作用素の最大固有値との関係が調べられていた. 各時間での大偏差原理はこの場合に帰着させることが出来る. 大偏差原理の評価は, 射影極限を取る操作で保たれるが, さらに tightness を示すことが必要になる. これらの議論を経て, 最初のステップである $C([0, 1], \mathfrak{g}_1)$ の sup ノルムでの大偏差原理を証明することが出来る.

以上が本論文の主要結果である.

(論文審査の結果の要旨)

主論文は、有限生成冪零群作用のある局所有限無限グラフ上のランダムウォークに関する研究に基づいています。そのスケールを取ったものが、大偏差原理を満たすということを証明し、その事実と距離空間としての無限グラフのスケール極限との関係を論じたものです。こうした研究は、可換群作用の場合に小谷元子氏と砂田利一氏との一連の先行研究がありますが、冪零群の場合、非可換な捻れをもつため大きな困難が生じます。申請者は、Bladi-Carmellino による手法を参考にしながら、Lie 環の直和分解の第一成分へのランダムウォークの射影、線形補間、可縮原理などを用いて非可換性の困難を丁寧に解きほぐすことで主定理を得ています。これを実行するためには幾何学や確率論の深い理解が必要であり、申請者の技量や問題設定に至る着想力、問題解決能力は卓越していると言えます。

主論文は純粋数学の国際誌として高い評価を受けている *Mathematische Zeitschrift* 誌にすでに掲載されております。またフランスで開催された国際研究集会で招待講演を行いました。

また京都大学数学・数理解析専攻のグローバル COE が開始した、博士課程・多様な人材育成コースの第一期生として、数学専攻に所属しながら理化学研究所発生・再生科学総合センターの、上田泰己チームリーダー（現京都大学大学院理学研究科併任教授）の指導を受けており、離散幾何学、確率論の素養を軸足にして、生命現象に対して数理的アプローチをかける研究も行っています。凸幾何学を土台とした相互作用に関する新しい試みは、国際誌 *International Journal of Pure and Applied Mathematics* に掲載されました。

研究対象が広領域であるにも関わらず、主論文の結果は確率論に限定して見てみてもしっかりした深い結果です。

このように申請者の学位論文は国際的にも高い評価を受けており、極めて優れた独創的知見を含むものであります。従って大学院在学5年未満ですが、例外的に博士（理学）の学位を授与するのにふさわしいものであると判断しました。また論文内容とそれに関連した事項について平成23年10月28日に試問を行った結果、合格と判定いたしました。