

机の上で光速を測る

2015 年 11 月 30 日

小林 弘和 高知工科大学システム工学群
北野 正雄 京都大学大学院工学研究科

1 はじめに

光速 c_0 は長い年月にわたって各時代の計測技術の粋を尽くして探求されてきた物理定数であり、9桁にもおよぶ正確さで測定されるようになった。¹⁻³⁾ 1983 年からは c_0 の値をメートルの定義に用いることとなり、もはや測定値ではなく定義値として位置づけられている。

光速測定では一般的に自由伝搬する光波の速度が直接的に測定される。一方、別のアプローチとして、Maxwell が提唱した電磁場の方程式を基にして、電気的手法を用いた間接的な光速測定が Weber と Kohlrausch によって 19 世紀半ばに行なわれた。^{3,4)} しかし、この手法は現在用いられていない単位系に言及しなければならず、また電気的な物理量を力学的な物理量に換算して測定する必要がある。現在では電子技術の進歩により、正確な発振器、周波数計、標準器などが開発され、力学的な量よりもはるかに高精度な電気量の測定が可能となっている。

本稿では電気的手法を用いた現代的な光速測定の実験を提案する。現在広く用いられている国際単位系 (SI) において、光速 c_0 は真空の透磁率 μ_0 と誘電率 ε_0 を用いて

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1)$$

で表わせる。したがって、 μ_0 と ε_0 の積を実験的に求めれば c_0 が得られる。これら二つの定数はそれぞれコイルとコンデンサという基本的な回路素子の幾何学的な長さと電気的な物理量を結びつける

非常に重要な役割を担っており、素子の電気的な応答から測定できる。理論的な背景や詳細については別稿で詳しく述べる。⁵⁾ 本手法は数 10 cm 四方というわずかな空間で実験系を構成でき、幾何学的な量と電気的な応答から電磁気学において重要な物理定数を再発見できる有用な実験である。

2 国際単位系 (SI) における電磁気学の基礎定数

SI における電磁気学の基礎定数の定義値と概略値、およびそれぞれの関係式を表 1 に示す。 ε_0 , μ_0 はそれぞれ電場、磁場に関する定数である。真空のインピーダンス

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2)$$

は電磁波に関して重要な量であるが、Maxwell の時代にはあまり意識されておらず、文献に登場するのは 20 世紀になってからである。⁷⁾ SI の前身である MKSA 単位系が導入されたことや、マイクロ波技術の進展過程でその重要性が認識されるようになった。 Z_0 は電磁波のみならず、電磁気学全般にかかわる重要な定数である。⁶⁾ 他方、光速 c_0 は電磁気というより、時空間に付随する定数である。相対論に c_0 , 量子論に $\hbar$, 重力理論に G を対応づけるのであれば、電磁気には Z_0 を対応づけるべきである。

表 1 の 4 つの定数は関係づけられており、独立なものは 2 つである。現在の SI では、 c_0 , μ_0 はそれ

表 1: SI における電磁気学の基礎定数.

真空の定数		定義値	概略値	関係式
誘電率	ε_0	$1/(c_0^2\mu_0)$	8.854 pF/m	$1/(c_0Z_0)$
透磁率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m	1.257 μ H/m	Z_0/c_0
光速	c_0	299 792 458 m/s	2.998×10^8 m/s	$1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$
インピーダンス	Z_0	$c_0\mu_0$	376.7 Ω	$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$

ぞれメートル, アンペアの大きさを定めるためにその数値が定義されている.

3 LCR 共振回路による光速測定の原理

まず半径 r_L , 長さ l_L , 巻き数 N_L の空芯ソレノイドコイルを考える. $r_L \ll l_L$ を満たす細長いコイル内の磁場は一様であり, インダクタンス L は

$$L = \mu_0 A_L, \quad A_L := K N_L^2 \frac{S_L}{l_L} \quad (3)$$

と書ける. ここで $S_L := \pi r_L^2$ はコイルの断面積, K は r_L と l_L に依存した定数で長岡係数と呼ばれる.⁸⁾ $r_L \ll l_L$ のとき, 長岡係数は近似的に

$$K \simeq 1 - \frac{8}{3\pi} \left(\frac{r_L}{l_L} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_L}{l_L} \right)^2 \quad (4)$$

と書ける.⁹⁾ 十分に長いコイルの場合, 長岡係数は 1 となる.

次に面積 S_C の正方形電極を間隔 d_C で平行に二枚配置した空気コンデンサを考える. $S_C \gg d_C^2$ を満たす場合, 電極の端の電界効果を無視することができて, そのキャパシタンス C は

$$C = \varepsilon_0 A_C, \quad A_C := \frac{S_C}{d_C} \quad (5)$$

と書ける.

式 (3), (5) において A_L と A_C はそれぞれコイルとコンデンサの幾何学的構造のみで決まる量で, 長さの次元を持つ. また, μ_0 と ε_0 はコイルとコンデンサの電気的な量と幾何学的な量を結びつけている. 式 (1)-(5) を用いれば, 幾何学的因子 A_L と A_C , およびインダクタンスとキャパシタンスの積 (LC) と比 (L/C) を測定すれば c_0 と Z_0 が計算できる.

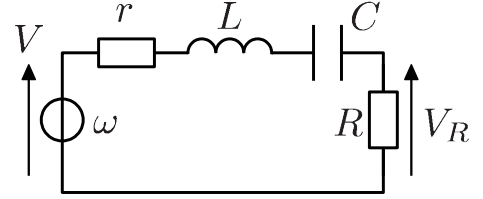


図 1: LCR 共振回路.

L と C は LCR メータで測定することもできるが, ここでは図 1 の LCR 共振回路を用いて L と C の積と比を求める. この回路はインダクタンス L のコイル, キャパシタンス C のコンデンサ, 抵抗値 R の抵抗器から構成される. またコイルの抵抗や電源の内部抵抗などを r とする. 抵抗 R の両端の電圧振幅 $\hat{V}_R$ は電源の角周波数 ω が共振角周波数

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

に等しいとき最大になる. したがって, $\hat{V}_R$ が最大となる周波数から積 (LC) を求めることができる.

また, $\hat{V}_R$ が共鳴時の $1/\sqrt{2}$ になる角周波数を $\omega_{\pm}$ ($\omega_+ > \omega_-$) とすると, 共振角周波数 ω_0 で規格化した共鳴幅 Δ は

$$\Delta := \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = (r + R) \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (7)$$

となる. 規格化共鳴幅 Δ は抵抗値 R に線形比例するため, その変化量を測定することにより,

$$y := \frac{d\Delta}{dR} = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (8)$$

を求めることができる.

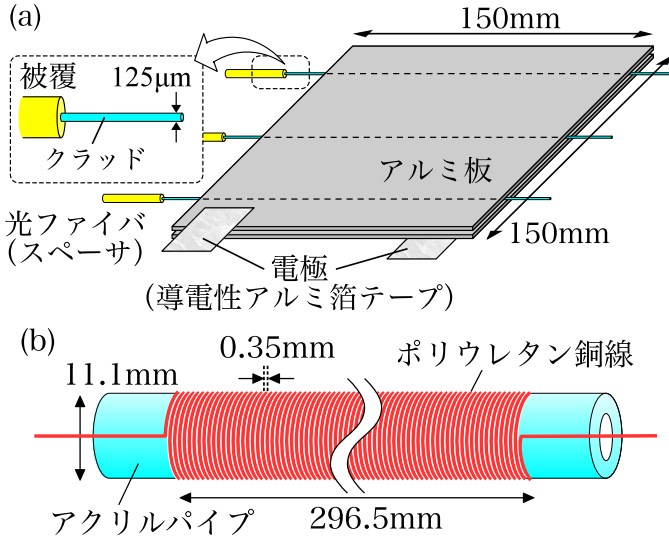


図 2: (a) 空気コンデンサと (b) 空芯コイルの概観.

以上より, 幾何学的因子 Λ_L と Λ_C , 共振回路の共振角周波数 ω_0 と規格化共鳴幅の変化量 y を用いて光速と真空のインピーダンスを表すと

$$c_0 = \frac{\sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \sqrt{\Lambda_L \Lambda_C} \quad (9)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}} = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}} \quad (10)$$

となる. この c_0 の測定手法は電気回路を使っているが, 定量的には時間と長さの測定であり, 電磁気的な基準量は用いていない. 一方, Z_0 の決定には, 長さの比と基準となる抵抗の値が必要である.

4 空気コンデンサと空芯コイルの作製

周波数と電圧の測定の容易さから, 共振周波数が数 100 kHz となるように空気コンデンサと空芯コイルを設計, 製作し, 寸法をノギスで測定して幾何学的因子を求め, その測定誤差を評価した.¹⁰⁾ 本実験の測定精度では, 空気の誘電率と透磁率, コイルを構成するアクリルの透磁率は真空の値と等しいと見なせるため, 式 (9) を用いて c_0 が求められる.

図 2(a) に作製した空気コンデンサを示す. まずシングルモード光ファイバ (SMF) の被覆を剥がしてコート材をアルコールで拭き取り, クラッド部分をむき出しにする. SMF のクラッド径の公称値

表 2: 作製したコンデンサとコイルの特性.

	幾何学的因子 (Λ_C, Λ_L)	電気的な量 (C, L)	
		計算値	実測値
コンデンサ	180.1(7) m	1.595(6) nF	1.610(12) nF
コイル	245(2) m	308(3) μ H	305(3) μ H

は 125 μ m で, その作製精度は 1 μ m 以下と高精度であるため, 大容量の空気コンデンサを自作する際の極板間スペーサとして理想的である. 一辺が 150.03(7) mm の正方形のアルミ板 (厚さ 1mm) の間に 3 本の SMF をはさみ, その上から 830g の重しを載せて空気コンデンサを構成した.¹¹⁾ またワニ口クリップで電氣的に接続できるように, 導電性アルミ箔テープを電極としてアルミ板に貼り付けた. 式 (5) より, 幾何学的因子は $\Lambda_C = 180.1(7)$ m, キャパシタンスの計算値は $C = 1.595(6)$ nF となる. 0.4% の相対誤差は主に SMF による極板間距離 $d_C = 125.0(5)$ μ m の誤差に起因する.

次に, 図 2(b) に示すように, 直径 11.06(5) mm のアクリルパイプにポリウレタン銅線を一層密巻きして長さ $l_L = 296.50(8)$ mm, 巻き数 $N_L = 850$ の空芯コイルを作製した. 銅線の直径 w_L の公称値は 0.35 mm で, $w_L \simeq l_L/N_L$ が成り立つ. コイルの半径 r_L はアクリルパイプと銅線の半径の和に等しく, r_L は l_L よりも十分に小さい. 式 (3) より, 幾何学的因子は $\Lambda_L = 245(2)$ m, インダクタンスの計算値は $L = 308(3)$ μ H となる. 0.9% の相対誤差は主にアクリルパイプの直径の二乗の誤差に起因する.

5 LCR メータを用いた空気コンデンサと空芯コイルの特性測定

予備実験として LCR メータ (LCR700, SANWA) を用いて周波数 100 kHz における空気コンデンサと空芯コイルの特性を測定した結果を表 2 に示す. C と L について, 幾何学的因子を用いた計算値と LCR メータによる実測値は測定誤差内で一致している. 式 (9), (10) を用いて光速 c_0 と真空のイン

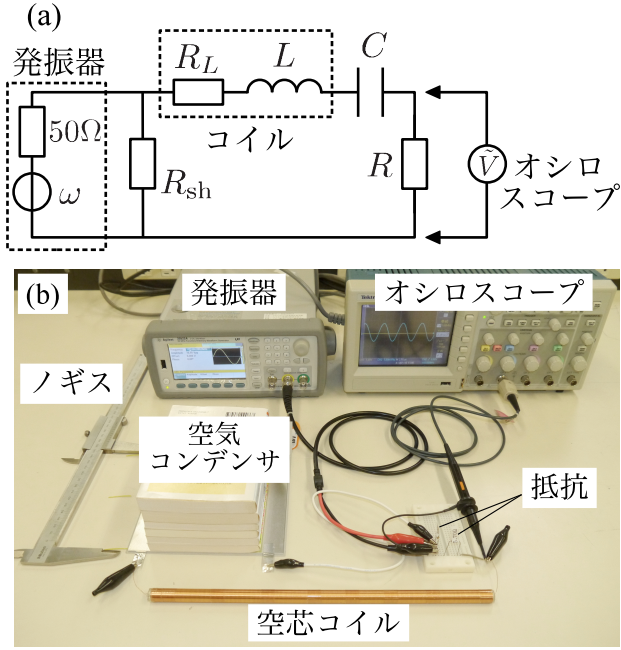


図 3: LCR 共振回路を用いた光速測定のための (a) 等価回路図と (b) 実験系の写真。

ピーダンス Z_0 を求めると、

$$c_0 = 3.00(4) \times 10^8 \text{ m/s} \quad (11)$$

$$Z_0 = 373(4) \Omega \quad (12)$$

となる。相対誤差はともに 1.2% で、幾何学的因子と LCR メータの測定誤差を含む。表 1 の c_0 と Z_0 の定義値は測定誤差の範囲内に収まっている。

6 LCR 共振回路を用いた光速測定

作製した空気コンデンサと空芯コイルを用いて LCR 共振回路を構成する [図 3(a) 参照]。集中定数回路条件、すなわち波長 $\lambda = 2\pi c_0/\omega$ に比べて素子のサイズや配線の長さが十分小さいという条件を確認しておく。本実験では周波数が数 100 kHz 程度であるため、波長は数 100 m となる。 Λ_C, Λ_L は波長 λ と同じスケールではあるが、素子のサイズに関して $\sqrt{S_L}, l_L \ll \Lambda_L, \sqrt{S_C}, d_C \ll \Lambda_C$ が成り立っており、集中定数回路の条件は満たされている。

実験では発振器 (任意波形発生器 33522A, Agilent, 周波数精度 2ppm) を用いて交流電圧を印加し、オシロスコープ (TDS2014B, Tektronics) を用

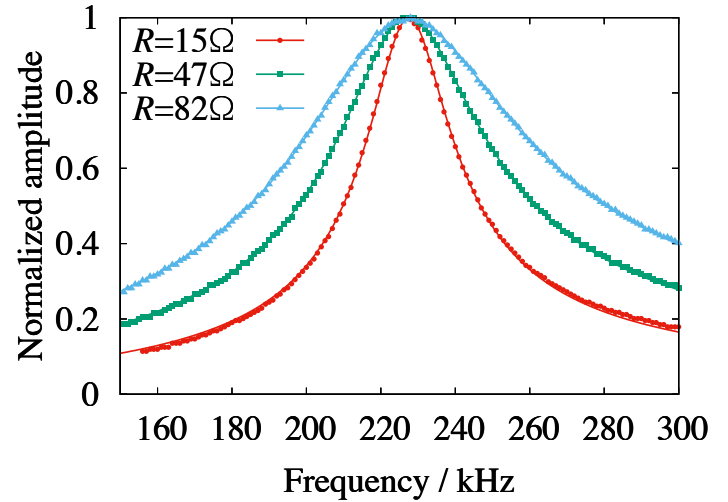


図 4: 電源周波数に対する抵抗 R の両端の規格化電圧振幅の変化。

いて抵抗 R の両端の電圧振幅を測定した。ただし、発振器を共振回路に直接接続すると、発振器の出力インピーダンス 50Ω により共鳴幅 Δ が広がってしまう。そこでシャント抵抗 $R_{sh} = 5.76(5) \Omega$ を並列に挿入し、等価的に発振器の出力インピーダンスを下げて、急峻な共鳴曲線からより正確に共振周波数を測定した。¹²⁾ 実験に使用する空間は図 3(b) に示すように測定器も含めて数 10 cm 四方である。

発振器の振幅の設定を 5 V で固定し、周波数を 150 kHz から 300 kHz まで 1 kHz 刻みで変化させながら抵抗 R の両端の電圧振幅を測定した結果を図 4 に示す。図 4 の縦軸は最大電圧振幅で規格化した値である。複数の抵抗値 R について電圧振幅 $\hat{V}_R$ の周波数依存性を理論式でフィッティングして、共振周波数 f_0 と規格化した共鳴幅 Δ を求めた。

複数の抵抗値 R に対して共振周波数 f_0 を求めると $f_0 = 227.5(1) \text{ kHz}$ となった。一方、LCR メータによる L と C の実測値から求めた共振周波数の計算値は $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 227(2) \text{ kHz}$ である。共振回路を用いたフィッティングによる共振周波数測定の相対誤差は、LCR メータによる計算値の相対誤差よりも一桁小さくなる。共振回路を用いて求めた f_0 と式 (9) を用いて光速 c_0 を計算すると、

$$c_0 = 3.003(14) \times 10^8 \text{ m/s} \quad (13)$$

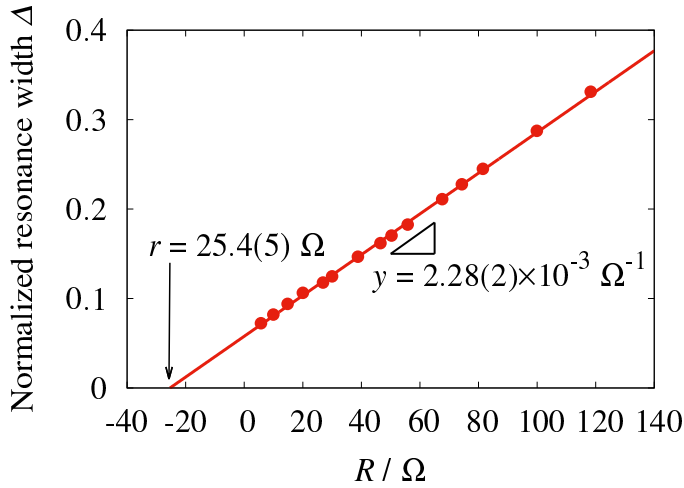


図 5: 抵抗 R に対する規格化共鳴幅 Δ の変化.

となる. 共振周波数測定 of 相対誤差が非常に小さいため, 式 (13) の相対誤差 0.45% は主に幾何学的因子の測定誤差に起因し, 式 (11) の LCR メータを用いた c_0 の測定値よりも測定誤差は小さくなる.

次に図 4 から抵抗値 R に対する規格化共鳴幅の変化を読み取った結果を図 5 に示す. 抵抗値 R は LCR メータで校正した.¹³⁾ 図 5 の傾き y から式 (10) を用いて真空のインピーダンス Z_0 を計算すると,

$$Z_0 = 376(4) \, \Omega \quad (14)$$

となり, 測定誤差内で Z_0 の定義値と一致した. 1.0% の相対誤差には幾何学的因子の測定誤差と, フィッティングによる y の推定の誤差が含まれている. 本稿では考慮しなかったが, 表皮効果によるコイルの抵抗成分 R_L の増加¹⁴⁾ を含む理論式でフィッティングすれば, y の推定の誤差を小さくすることができると思われる.

また式 (7) より $R = -r$ のとき規格化共鳴幅は 0 となるため, 図 5 の直線と横軸との交点は抵抗 R 以外の抵抗成分 r を示していて, $r = 25.4(5) \, \Omega$ となった. この抵抗値にはコイルの抵抗値 $R_L = 7.99 \, \Omega$, 発振器の出力インピーダンス $50 \, \Omega$ とシャント抵抗 $R_{sh} = 5.76 \, \Omega$ の並列合成抵抗値 $5.16 \, \Omega$, および導線の抵抗値やコンデンサの寄生抵抗値が含まれる.

7 おわりに

入手しやすい材料と簡単な装置を用いて数 10cm 四方というわずかな空間で行なえる実験であるが, 光速 c_0 と真空のインピーダンス Z_0 という電磁気学において非常に重要な値を数%以下の誤差で求めることができ, その物理的意義は大きい. 電磁気学の重要性について改めて認識してもらうための学生実験として最適ではないだろうか.

貴重なアドバイス, コメントを頂いた霜田光一氏, 中田陽介氏に感謝いたします.

参考文献および注

- 1) 霜田光一「光速測定 of 進歩」日本物理教育学会誌 **20**, 253 (1973).
- 2) 原宏「光速測定 of 測定」応用物理 **23**, 337 (1954).
- 3) 西条敏美「物理定数の探求史」第 6 章, 52 (徳島科学研究会, 1996).
- 4) J. C. Maxwell “A Treatise on Electricity and Magnetism” Vol. 2, chapter XIX, Dover, 1954.
- 5) 北野正雄「LC 共振回路で光速を測る」大学の物理教育 **21**, 126 (2015).
- 6) M. Kitano “The vacuum impedance and unit systems” Trans. Electron. **E92-C**, 3 (2009).
- 7) S. A. Schelkunoff “The Impedance Concept and Its Application to Problems of Reflection, Refraction, Shielding and Power Absorption” Bell System Tech. J. **17**, 17 (1938).
- 8) H. Nagaoka “The inductance coefficients of solenoids” J. Coll. Sci., Imp. Univ. Tokyo **27**, 18 (1909).
- 9) R. Lundin “A handbook formula for the inductance of a single-layer circular coil” Proc. IEEE **73**, 1428 (1985).
- 10) 誤差は括弧内に表記する. 例えば, $65.43(21) \, \text{m}$ は $(65.43 \pm 0.21) \, \text{m}$ を表す. ノギスの測定誤差としては JIS 規格の器差の許容値を用いた. 器差は測定長 50 mm 以下で $\pm 0.05 \, \text{mm}$, 測定長 50~100 mm で $\pm 0.06 \, \text{mm}$, 測定長 100~200 mm で $\pm 0.07 \, \text{mm}$, 測定長 200~300 mm で $\pm 0.08 \, \text{mm}$ である.
- 11) 重しの質量が大きくなるにつれて空気コンデンサの電極間隔はスペーサの直径に漸近するため, キャパシタンスは一定値に近づく. ただし, 質量が大き

すぎるとアルミ板がたわむため注意が必要である。今回作製した空気コンデンサの場合、およそ 800 g でキャパシタンスは一定値に達した。なお、光ファイバーは先端が鋭く刺さりやすいので取り扱いには十分な注意が必要である。

- 12) 抵抗値の低いシャント抵抗を挿入すると急峻な共振曲線を得ることができるが、共振回路にかかる電圧が低下するため、発振器の出力電圧を大きくする必要がある。シャント抵抗を挿入しなくても共振周波数の測定精度が極端に低下するわけではないので、電圧が大きくとれない場合には発振器を直接共振回路に接続してもよい。
- 13) LCR メータで抵抗 R が校正できない場合は高精度の抵抗を用いてその公称値に頼れば良い。最近では誤差 0.1% の抵抗も安く入手できる。
- 14) 高周波の交流電流が導体を流れるとき、導体表面に電流が集中する現象を表皮効果と呼ぶ。電流が流れる領域の厚さ (表皮厚さ) は銅の場合、100 kHz のとき 0.2 mm, 400 kHz のとき 0.1 mm である。実験で用いた銅線の半径 $w_L/2$ は測定周波数における表皮厚さと同じスケールであるため、表皮効果でコイルの抵抗値 R_L は周波数に対して増加する。

連絡先 E-mail: kobayashi.hirokazu@kochi-tech.ac.jp